Nouvelles annales de mathématiques

Emile Coupy

Solution d'un problème d'algèbre sur les mélanges

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 6 (1847), p. 14-20

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1847_1_6__14_1>

SOLUTION

D'un problème d'algèbre sur les mélanges.

PAR M. ÉMILE COUPY,
Bachelier ès sciences et professeur de mathématiques à Orleans.

On a deux vases d'égale capacité prise pour unité ; le premier plein d'eau, et le second plein de vin, à $\frac{1}{n}$ près (c'est-à-dire que les $\frac{n-1}{n}$ seulement du deuxième vase sont pleins de vin, la $n^{ème}$ partie est vide). On remplit le deuxième vase avec de l'eau du premier, puis on remplit le premier avec le mélange du deuxième puis on remplit le deuxième avec le mélange du premier et ainsi de suite alternativement. On demande ce qu'il y aura d'eau et de vin dans chaque vase, après ν opérations?

Il est bien entendu que dans ce problème, comme dans tous ceux de ce genre, on fait abstraction des circonstances physiques. Ainsi on suppose qu'il ne se perd pas même une goutte de liquide à chaque opération, et que le volume du mélange est égal à la somme des volumes des liquides mélangés.

Il faut d'abord distinguer deux cas, selon que ν est pair ou impair. On voit en effet qu'après un nombre pair d'opérations, c'est le premier vase qui est tout plein, le deuxième n'est plein qu'à $\frac{1}{n}$ près. C'est l'inverse après un nombre impair d'opérations. Remarquons ensuite que la quantité d'eau contenue dans les deux vases est constante et égale à 1 (capacité commune des deux vases); et la quantité de vin contenue dans les deux vases, aussi constante et égale à $\frac{n-1}{n}=p$.

Cela posé, soit k_{2m}, ce que contient de vin le premier vase, après $2m$ opérations; ce nombre d'opérations étant pair, le premier vase est tout plein; donc il contient $(1-k_{2m})$ d'eau et le deuxième vase qui n'est plein, lui, qu'à $\frac{1}{n}$ près, renfermera alors : $(p-k_{2m})^{\text{vin}}$ et $k_{2m}{}^{\text{eau}}$, puisque la quantité totale de vin est p. et que celle d'eau est 1. Ce qui nous montre déjà qu'après un nombre *pair* d'opérations, il y aura toujours autant d'eau dans le deuxième vase que de vin dans le premier.

Passons à l'opération suivante, la $(2m+1)^{\text{ème}}$.

Le premier vase ne contiendra plus que k_{2m} de vin, diminué de ce qu'on verse dans le second vase, c'est-à-dire diminué de $\frac{1}{n}k_{2m}$; ce qui fait en résultat pk_{2m} : de même il ne contiendra plus que $p(1-k_{2m})$ eau, et quant au second vase, qui sera maintenant tout plein, il contiendra :

$$p-pk_{2m} \text{ de vin } = p(1-k_{2m}),$$

et en eau : $$1-p(1-k_{2m}) = \frac{1}{n} + pk_{2m}.$$

On voit par là qu'après un nombre *impair* d'opérations, il y aura toujours autant de vin dans le second vase que d'eau dans le premier, ce qui est l'inverse de tout à l'heure.

Enfin voyons ce qui arrive après l'opération suivante, la $(2m+2)^{\text{ème}}$.

Le premier vase, qui est tout plein alors, contient en vin : pk_{2m} qu'il avait d'abord, plus ce qu'on lui a ajouté du deuxième vase, c'est-à-dire $\frac{p}{n}(1-k_{2m})$, ce qui fait :

$$pk_{2m} + \frac{p}{n} - \frac{p}{n} k_{2m},$$

ou $$p\left[\frac{1}{n} + \left(1-\frac{1}{n}\right)k_{2m}\right] = p\left[\frac{1}{n} + pk_{2m}\right].$$

On trouverait de même, que la quantité d'eau de ce premier vase est actuellement : $p\left[1-pk_{2m}\right] + \frac{1}{n^2}$, et que les quantités d'eau et de vin du second vase sont respectivement :

$$p(1-k_{2m}) \text{ et } p\left[\frac{1}{n} + k_{2m}\right].$$

Du reste ces trois dernières expressions n'ont pas besoin d'être connues.

En résumé, nous avons :

quantité totale constante d'eau : $=1$.

——————— de vin : $=p$; $p<1$, car $p=\frac{n-1}{n}$.

Nombre d'opérations.	1er vase. vin.	eau.
$2m$,	k_{2m}.	$1-k_{2m}$.
$2m+1$.	pk_{2m}.	$p(1-k_{2m})$.
$2m+2$.	$p\left[\frac{1}{n}+pk_{2m}\right]$.	$p\left(1-pk_{2m}\right)+\frac{1}{n^2}$.

2^e vase.

$2m$.	$p-k_{2m}$.	k_{2m}.
$2m+1$.	$p(1-k_{2m})$.	$\frac{1}{n}+pk_{2m}$.
$2m+2$.	$p^2(1-k_{2m})$.	$p\left(\frac{1}{n}+pk_{2m}\right)$.

Et si, maintenant, nous faisons successivement :

$$m=0.\,1.\,2.\,3.\,4 \ldots\ldots\ldots$$

Nous formerons les deux tableaux suivants, dont la loi est manifeste :

$$k_0=0. \qquad\qquad k_1=0.$$

$$k_2=\frac{p}{n}. \qquad\qquad k_3=\frac{p^2}{n}.$$

$$k_4=\frac{p+p^3}{n}. \qquad\qquad k_5=\frac{p^2+p^4}{n}.$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$k_{2r}=\frac{p+p^3+p^5+\ldots.+p^{2r-1}}{n}. \qquad\qquad k_{2r+1}=\frac{p^2+p^4+p^6+\ldots.+p^{2r}}{n}.$$

Le numérateur de k_{2r} est la somme des termes d'une progression géométrique décroissante dont la raison est p^2. et ce numérateur pourra s'écrire :

$$\frac{p-p^{2r-1}.p^2}{1-p^2}=\frac{p(1-p^{2r})}{1-p^2}.$$

De sorte que : $k_{2r}=\dfrac{p(1-p^{2r})}{(1-p^2)n}$.

D'ailleurs : $\dfrac{n-1}{n}=p$, d'où $n=\dfrac{1}{1-p}$.

Donc : $n(1-p^2)=\dfrac{1-p^2}{1-p}=1+p$.

Donc en définitive : $k_{2r}=\dfrac{p(1-p^{2r})}{1+p}$.

On trouvera de même : $k_{2r+1}=\dfrac{p^2(1-p^{2r})}{1+p}$.

Ce qui est évident *à priori*, puisque $k_{2r+1}=pk_{2r}$.

Maintenant qu'on a la quantité de vin du premier vase, il n'est pas difficile, d'après ce qui précède, d'avoir les trois autres résultats demandés, et on arrive aux formules suivantes :

	1^er^ vase.		2^e^ vase.	
	vin.	*eau.*	*vin.*	*eau.*
$2r$ opérations.	$\dfrac{p(1-p^{2r})}{1+p}$.	$\dfrac{1+p^{2r+1}}{1+p}$.	$\dfrac{p(p+p^{2r})}{1+p}$.	$\dfrac{p(1-p^{2r})}{1+p}$.
$2r+1$ *id.*	$\dfrac{p^2(1-p^{2r})}{1+p}$.	$\dfrac{p(1+p^{2r+1})}{1+p}$.	$\dfrac{p(1+p^{2r+1})}{1+p}$.	$\dfrac{1-p^{2r+2}}{1+p}$.

Comme p est <1, les puissances de p vont en décroissant ; et si nous supposons : $2r=\infty$, et $2r+1=\infty$; alors $p^{2r}\ldots\ldots=0$, et nous aurons ainsi les limites vers lesquelles convergent les quantités de vin et d'eau de chaque vase, à mesure qu'on fait un plus grand nombre *pair* ou *impair* d'opérations ; ces limites sont respectivement dans l'ordre des formules précédentes

$\dfrac{p}{1+p}$ vin. $\dfrac{1}{1+p}$ eau. $\dfrac{p^2}{1+p}$ vin. $\dfrac{p}{1+p}$ eau. pour l'infini *pair*.

et $\dfrac{p^2}{1+p}$ vin. $\dfrac{p}{1+p}$ eau. $\dfrac{p}{1+p}$ vin. $\dfrac{1}{1+p}$ eau. pour l'infini *impair*.

On peut se proposer de trouver au bout de combien d'opérations, en nombre pair ou impair, l'un des liquides de l'un des vases est réduit à $\frac{1}{q}$. Cherchons par exemple, au bout de quel nombre *pair* $2x$ d'opérations, la quantité de vin du premier vase sera $\frac{1}{q}$. On a : $k_{2x}=\frac{1}{q}$.

C'est-à-dire : $$\frac{p(1-p^{2x})}{1+p}=\frac{1}{q};$$

d'où $$pq-p^{2x+1}q=1+p,$$

ou $$p^{2x+1}=\frac{pq-p-1}{q}=\frac{p(q-1)-1}{q};$$

d'où $$(2x+1.)\log p=\log(p(q-1)-1)-\log q;$$

donc enfin : $$x=\frac{\log[p(q-1)-1]-\log q-\log p}{2\log p}.$$

L'expression $p^{2x+1}=\frac{p(q-1)-1}{q}$ nous montre que q ne peut égaler 2; car alors $p(q-1)-1$ serait négatif puisque $p<1$. Il n'y aura donc *jamais* autant d'eau que de vin dans le premier vase, après un nombre pair d'opérations. Plus généralement, on voit que la question n'est possible qu'autant que $p(q-1)>1$,

ou $$q>\frac{1+p}{p}, \text{ ou enfin } \frac{1}{q}<\frac{p}{1+p}.$$

Ce qui était évident *à priori*, puisque $\frac{p}{1+p}$ est la limite vers laquelle tend la quantité de vin du premier vase à mesure qu'on fait un plus grand nombre pair d'opérations.

On peut reprendre le même calcul, pour un nombre *impair* $2y+1$ d'opérations, et on trouvera :

$$y=\frac{\log[p(pq-1)-1]-\log q-2\log p}{2\log p}.$$

Et pour la possibilité il faut :

$$\frac{1}{q} < \frac{1+p}{p}.$$

$\frac{1}{q}$ ne sera donc encore ici jamais $=\frac{1}{2}$, comme dans le cas précédent.

Les calculs ne seraient pas plus difficiles pour l'eau de chaque vase ou pour le vin du deuxième vase.

Application numérique. $p=\frac{4}{5}$; $2r=1000$. On trouvera : $k_{1000}=\frac{4}{9}$, à moins d'une unité décimale du 97ème

$\frac{4}{9}$ est la limite donnée par la formule $\frac{p}{1+p}$, et $\frac{16}{45}$ est la limite pour un nombre impair d'opérations, donnée par la formule $\frac{p^2}{1+p}$.

Enfin, on trouvera qu'il faut faire environ 4 opérations pour que la quantité de vin du premier vase soit :

$$\frac{3}{11}=\frac{1}{\left(\frac{11}{3}\right)}<\frac{4}{9},$$

et qu'il en faut faire 5 environ pour que cette quantité soit :

$$\frac{17}{81}=\frac{1}{\left(\frac{81}{17}\right)}<\frac{16}{45}.$$