Sur la décomposition des fractions rationnelles, d'après M. Liouville

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 6 (1847), p. 127-129

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1847_1_6__127_1>

SUR LA DÉCOMPOSITION

des fractions rationnelles, d'après M. Liouville (Journal de Mathématiques, t. XI, p. 462; 1846).

I. Soient :

$F(x) = Ax^n + A_1x^{n-1} + \dots A_n$; $fx = Bx^{n-1} + B_1x^{n-2} + \dots B_n$.

Formons l'équation $F(x) + \alpha fx = 0$, où α est un paramètre quelconque, mais ne se trouvant ni dans $F(x)$, ni dans $f(x)$; cette équation étant du degré n, désignons ses racines par $x_1, x_2 \dots x_p \dots x_n$; le théorème newtonien sur les coefficients des équations donne :

$$x_1 + x_2 + \dots x_n = -\frac{A'}{A} - \alpha B.$$

Or, les racines sont évidemment chacune fonction de α ; prenant donc la dérivée de cette dernière équation, on obtient :

$$\frac{dx_1}{d\alpha} + \frac{dx_2}{d\alpha} + \dots \frac{dx_n}{d\alpha} = -B.$$

Le premier membre peut s'écrire symboliquement :

$$\Sigma_1^n \frac{dx_p}{d\alpha} = -B;$$

c'est-à-dire qu'il faut donner à l'indice p successivement les valeurs 1, 2, 3 ... n, et prendre la somme de ces valeurs.

On a $F(x_1) + \alpha f(x_1) = 0$; et prenant la dérivée par rapport à α, il vient :

$$F'(x_1)\frac{dx_1}{d\alpha} + f(x_1) + \alpha f'(x_1)\frac{dx_1}{d\alpha} = 0\,;$$

où $F'x, f'x$ désignent les dérivées de Fx_1 et fx_1 par rapport à x_1, d'où l'on tire :

$$\frac{dx_1}{d\alpha} = -\frac{f(x_1)}{F'(x_1) + \alpha f'(x_1)}.$$

On a une semblable équation pour $\frac{dx_2}{d\alpha}$, et ainsi de suite; ajoutant toutes ces équations membre à membre, et comparant avec l'équation trouvée ci-dessus, on obtient :

$$B = \Sigma_1^n \frac{f(x_p)}{F'(x_p) + \alpha f'(x_p)},$$

symbole déjà expliqué.

II. Faisant $\alpha = 0$, on a $B = \Sigma_1^n \frac{f(x_p)}{F'(x_p)}$; et alors les racines $x_1, x_2 \ldots x_n$ sont celles de l'équation $F(x) = 0$; mais il ne faut pas qu'une racine de $F(x) = 0$ annule $F'(x)$. Ainsi Fx ne doit pas avoir de facteurs égaux.

III. *Théorème d'Euler.* Si l'on a $\alpha = 0$ et $B = 0$, fx n'est plus que du degré $n - 2$; alors $\Sigma_1^n \frac{f(x_p)}{F'(x_p)} = 0$; ainsi si l'on divise un polynôme du degré $n - 2$ par la dérivée d'un polynôme du degré n, et qu'on substitue dans le quotient, à la place de x, les n racines du polynôme de degré n, la somme de tous les résultats est nulle ; théorème dû à Euler et qui renferme toute la théorie de la décomposition des fractions rationnelles en fractions simples, comme on va voir.

IV. Faisons $Fx = (x - x_1)\varphi x$, alors φx est du degré $n - 1$ et a pour racines $x_2, x_3 \ldots x_n$; prenant la dérivée de Fx, il vient $F'x = \varphi x + (x - x_1)\varphi' x$; et fx étant du degré

$n-2$, on peut appliquer le théorème d'Euler à la fraction $\frac{fx}{Fx}$; substituant, à cet effet, dans $\frac{fx}{F'x}$ les racines de $Fx=0$, la somme des résultats est nulle. Donc

$$\frac{f(x_1)}{\varphi(x_1)}+\frac{f(x_2)}{(x_2-x_1)\varphi'(x_2)}+\ldots\frac{f(x_n)}{(x_n-x_1)\varphi'(x_n)}=0;$$

d'où l'on a l'identité

$$\frac{f(x_1)}{\varphi(x_1)}=\frac{f(x_2)}{(x_1-x_2)\varphi'(x_2)}+\ldots\frac{f(x_n)}{x_1-x_n}.$$

La fraction $\frac{f(x_1)}{\varphi(x_1)}$ est donc décomposée en ses fractions simples $\frac{1}{x_1-x_2}$, $\frac{1}{x_1-x_3}$ ... etc.; on peut encore écrire ce résultat de cette manière :

$$\frac{fx}{\varphi x}=\Sigma_1^n\frac{f(x_p)}{(x-x_p)\varphi'(x_p)};$$

x_p désigne une des n racines de $\varphi x=0$, et fx est du degré $n-1$ au plus.

Observation. Cette méthode ne s'étend pas au cas des facteurs multiples. Celle qu'on a donnée t. IV, p. 295, est plus générale et plus élémentaire.