NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

J. DIENGER

Note sur l'intégration de l'équation différentielle $\frac{d^ny}{dx^n}+A_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\cdots+A_{n-1}\frac{dy}{dx}+A_ny=0$, $A_1,A_2,\ldots A_2$ étant supposés constants

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 6 (1847), p. 124-127

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1847_1_6__124_0>

NOTE

sur l'intégration de l'équation différentielle

$$\frac{d^n y}{dx^n} + A_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} \ldots\ldots + A_{n-1} \frac{dy}{dx} + A_n y = 0,$$

A_1, A_2, … A_2 étant supposés constants.

PAR M. J. DIENGER,
Docteur ès sciences, à Sinsheim, près Heidelberg, en Bade.

Supposons qu'on ait

$$\alpha^n + A_1 \alpha^{n-1} + A_2 \alpha^{n-2} + \ldots + A_{n-1} \alpha + A_n =$$
$$= (\alpha - \alpha_1)^{n_1} (\alpha - \alpha_2)^{n_2} \ldots (\alpha - \alpha^s)^{n_s} = \varphi(\alpha),$$

où $n_1 + n_2 + \ldots + n^s = n$, on aura, d'après un théorème bien connu :

$$\varphi(\alpha_1) = 0,\ \varphi'(\alpha_1) = 0,\ \varphi''(\alpha_1) = 0, \ldots\ldots \varphi^{(n_1-1)}(\alpha_1) = 0,$$
$$\varphi(\alpha_2) = 0,\ \varphi''(\alpha_2) = 0,\ \varphi''(\alpha_2) = 0, \ldots\ldots \varphi^{(n_2-1)}(\alpha_2) = 0, \text{ etc.},$$

en désignant par $\varphi'(\alpha)$, $\varphi''(\alpha)$….. les fonctions dérivées de $\varphi(\alpha)$.

En mettant $y = e^{\alpha_1 x} x^r$, on aura en général :

$$\frac{d^\nu y}{dx^\nu} = e^{\alpha_1 x} [r.(r-1)\ldots(r-\nu+1)\, x^{r-\nu} + \nu.\alpha_1 r(r-1)\ldots$$
$$\ldots(r-\nu+2) x^{r-\nu+1} + \frac{\nu.(\nu-1)}{1.2} \alpha_1^2 r.(r-1)\ldots(r-\nu+3) x^{r-\nu+2} +$$
$$+ \ldots\ldots + \alpha_1^\nu x^r]$$

pour $\nu \leqq r$, et

$$\frac{d^\nu y}{dx^\nu} = e^{\alpha_1 x} [\nu.(\nu-1)\ldots(\nu-r+1)\, \alpha_1^{\nu-r} + \nu.(\nu-1)\ldots$$
$$\ldots(\nu-r+2)\, \alpha_1 \frac{x}{1} + \ldots\ldots + \alpha_1^\nu x^r]$$

pour $\nu > r$. (*V.* pour exemples les leçons sur le calcul des fonctions, page 57.)

Donc on aura, r étant supposé $< n$, ou tout au plus $= n$:

$$\left(\frac{d^n y}{dx^n} + A_1 \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + A_{n-1}\frac{dy}{dx} + A_n y\right) \cdot \frac{1}{e^{\alpha_1 x}} =$$

$$= x^r [A_n + A_{n-1}\alpha_1 + A_{n-2}\alpha_1^2 + \ldots\ldots + A_{n-r}\alpha_1^r + A_{n-r-1}\alpha_1^{r+1} +$$
$$+ \ldots\ldots + A_1\alpha_1^{n-1} + \alpha_1^n] +$$
$$+ r.x^{r-1}[A_{n-1} + 2A_{n-2}\alpha_1 + \ldots\ldots + rA_{n-r}\alpha_1^{r-1} + (r+1)A_{n-r-1}\alpha_1^r +$$
$$+ (n-1)A_1\alpha_1^{n-2} + n\alpha_1^{n-1}] +$$
$$+ \frac{r.(r-1)}{1.2} x^{r-2} [2.1 A_{n-2} + \ldots\ldots + r.(r-1) A_{n-r}\alpha_1^{r-2} +$$
$$+ (r+1) r A_{n-r-1}\alpha_1^{r-1} + \ldots\ldots +$$
$$+ (n-1)(n-2) A_1 \alpha_1^{n-3} + n.(n-1)\alpha_1^{n-2}] +$$
$$+ \frac{r(r-1)(r-2)}{1.2.3} x^{r-3} [3.2.1 A_{n-3} + \ldots\ldots +$$
$$+ r(r-1)(r-2)A_{n-r}\alpha_1^{n-r} + \ldots\ldots + n.(n-1)(n-2)\alpha_1^{n-3}]$$
$$\vdots$$
$$+ rx[(r-1)\ldots 1 A_{n-r+1} + r.(r-1)\ldots\ldots 2A_{n-r}\alpha_1 + \ldots\ldots +$$
$$+ n.(n-1)\ldots\ldots(n-r+2)\alpha_1^{n-r+1}] +$$
$$+ r.(r-1)\ldots 1 A_{n-r} + (r+1) r \ldots\ldots 2A_{n-r-1}\alpha_1 + \ldots\ldots +$$
$$+ n.(n-1)\ldots\ldots(n-r+1)\alpha_1^{n-r} =$$
$$= x^r\varphi(\alpha_1) + rx^{r-1}\varphi'(\alpha_1) + \frac{r.(r-1)}{1.2}x^{r-2}\varphi''(\alpha_1) + \ldots + rx\varphi^{(r-1)}(\alpha_1) +$$
$$+ \varphi^{(r)}(\alpha_1).$$

Maintenant si l'on a $r \leqq n_1 - 1$, on aura :

$\varphi(\alpha_1) = 0$, $\varphi'(\alpha_1) = 0$, ….. $\varphi^{(r)}(\alpha_1) = 0$, donc, pour $y = e^{\alpha_1 x} x^r$:

$$\frac{d^n y}{dx^n} + A_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + A_2\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \ldots + A_{n-1}\frac{dy}{dx} + A_n y = 0,$$

c'est-à-dire $y = e^{\alpha_1 x} x^r$ sera une solution de l'équation différentielle proposée. De même $Ce^{\alpha_1 x} x^r$ en sera une solution, si C est une constante arbitraire.

Donc, les solutions de l'équation proposée seront :

$$C_0 e^{\alpha_1 x},\ C_1 e^{\alpha_1 x} x,\ C_2 e^{\alpha_1 x} x^2 \ldots\ldots C_{n_1-1} e^{\alpha_1 x} x^{n_1-1},$$

$$C_0' e^{\alpha_2 x},\ C_1' e^{\alpha_2 x} x,\ C_2' e^{\alpha_2 x} x^2 \ldots\ldots C'_{n_1-1} e^{\alpha_2 x} x^{n_2-1},$$

$$\vdots$$

$$C_0^{(s-1)} e^{\alpha_s x} x,\ C_1^{(s-1)} e^{\alpha_s x} x,\ C^{(s-1)} e^{\alpha_s x} x^2,\ \ldots C^{(s-1)}_{n^s-1} e^{\alpha_s x} x^{n_s-1}$$

où les quantités C sont des constantes absolument arbitraires. Or, comme l'équation proposée est linéaire, la somme de toutes ces solutions en sera aussi une solution, et cette somme sera l'intégrale complète, vu qu'elle renferme $n_1+n_2+\ldots+n^s=n$ constantes arbitraires. Donc l'intégrale complète de notre équation différentielle est :

$$e^{\alpha_1 x}\,[C_0+C_1 x+C_2 x^2+\ldots\ldots+C^{n_1-1}x^{n_1-1}]+$$
$$+e^{\alpha_2 x}\,[C'_0+C'_1 x+C'_2 x^2+\ldots\ldots+C'^{n_2-1}x^{n_2-1}]+$$
$$+\ldots$$
$$\vdots$$
$$+e^{\alpha_s x}[C_0^{(s-1)}+C_1^{(s-1)}x+C_2^{(s-1)}x^2+\ldots\ldots+$$
$$+C^{(s-1)}_{n^s-1}x^{n^s-1}]=y.$$

Cette équation a lieu, même pour des valeurs imaginaires de α_1, α_2, ... Or, si l'on suppose $\alpha_1=\gamma_1+\beta_1(i=\sqrt{-1})$, il faudra nécessairement qu'une des autres quantités $\alpha_2,\ldots\alpha_s$ soit égale à $\gamma_1-\beta_1 i$; soit donc $\alpha_2=\gamma_1-\beta_1 i$, on aura :

$$e^{\alpha_1 x}=e^{\gamma_1 x}[\cos(\beta_1 x)+i\sin(\beta_1 x)]\ ;$$
$$e^{\alpha_2 x}=e^{\gamma_1 x}[\cos(\beta_1 x)-i\sin(\beta_1 x)].$$

De là on tirera en supposant

$$C_r+C'_r=B_r$$
$$(C_r-C'_r)i=D_r.$$

$$e^{\alpha_1 x}(C_0+C_1 x+\ldots\ldots+C_{n-1}x^{n_1-1})+$$
$$+e^{\alpha_2 x}(C'_0+C'_1 x+\ldots\ldots+C'_{n_2-1}x^{n_2-1})=$$
$$=e^{\gamma_1 x}[B_0+B_1 x+\ldots\ldots+B_{n_1-1}x^{n_1-1}]\cos(\beta_1 x)+$$
$$+e^{\gamma_1 x}[D_0+D_1 x+\ldots\ldots+D_{n_1-1}x^{n_1-1}]\sin(\beta_1 x).$$

On fera les mêmes substitutions pour d'autres racines imaginaires, et ainsi l'intégrale complète se trouvera dans la plus grande généralité possible. En traitant la question de la manière précédente, on n'aura pas besoin de considérations étrangères, quelquefois embarrassantes surtout pour les commençants. (Voyez par exemple *Leçons sur le calcul intégral*, par Moigno, leçon 37, § 242.)