

J. DIENGER

**Note sur l'intégration de
l'équation différentielle**

$$\frac{d^n y}{dx^n} + A_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} \cdots + A_{n-1} \frac{dy}{dx} + A_n y = 0,$$

A_1, A_2, \dots, A_n étant supposés constants

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 6
(1847), p. 124-127

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1847_1_6__124_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1847, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

NOTE

sur l'intégration de l'équation différentielle

$$\frac{d^n y}{dx^n} + A_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + A_{n-1} \frac{dy}{dx} + A_n y = 0,$$

A_1, A_2, \dots, A_n étant supposés constants.

PAR M. J. DIENGER,

Docteur ès sciences, à Sinsheim, près Heidelberg, en Bade.

Supposons qu'on ait

$$\begin{aligned} & x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \dots + A_{n-1} x + A_n = \\ & = (x-\alpha_1)^{n_1} (x-\alpha_2)^{n_2} \dots (x-\alpha_s)^{n_s} = \varphi(x), \end{aligned}$$

où $n_1 + n_2 + \dots + n_s = n$, on aura, d'après un théorème bien connu :

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha_1) = 0, \quad \varphi'(\alpha_1) = 0, \quad \varphi''(\alpha_1) = 0, \quad \dots, \quad \varphi^{(n_1-1)}(\alpha_1) = 0, \\ \varphi(\alpha_2) = 0, \quad \varphi'(\alpha_2) = 0, \quad \varphi''(\alpha_2) = 0, \quad \dots, \quad \varphi^{(n_2-1)}(\alpha_2) = 0, \quad \text{etc.}, \end{aligned}$$

en désignant par $\varphi'(x), \varphi''(x), \dots$ les fonctions dérivées de $\varphi(x)$.

En mettant $y = e^{\alpha_i x} x^r$, on aura en général :

$$\begin{aligned} \frac{d^\nu y}{dx^\nu} = e^{\alpha_i x} [r \cdot (r-1) \dots (r-\nu+1) x^{r-\nu} + \nu \alpha_i r (r-1) \dots \\ \dots (r-\nu+2) x^{r-\nu+1} + \frac{\nu \cdot (\nu-1)}{1 \cdot 2} \alpha_i^2 r \cdot (r-1) \dots (r-\nu+3) x^{r-\nu+2} + \\ + \dots + \alpha_i^\nu x^r] \end{aligned}$$

pour $\nu \begin{matrix} = \\ < \end{matrix} r$, et

$$\begin{aligned} \frac{d^\nu y}{dx^\nu} = e^{\alpha_i x} [\nu \cdot (\nu-1) \dots (\nu-r+1) \alpha_i^{\nu-r} + \nu \cdot (\nu-1) \dots \\ \dots (\nu-r+2) \alpha_i^{\nu-r+1} x + \dots + \alpha_i^\nu x^r] \end{aligned}$$

pour $\nu > r$. (*V.* pour exemples les leçons sur le calcul des fonctions, page 57.)

Donc on aura, r étant supposé $< n$, ou tout au plus $= n$:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{d^n y}{dx^n} + A_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + A_{n-1} \frac{dy}{dx} + A_n y \right) \cdot \frac{1}{e^{\alpha_1 x}} = \\ & = x^r [A_n + A_{n-1} \alpha_1 + A_{n-2} \alpha_1^2 + \dots + A_{n-r} \alpha_1^r + A_{n-r-1} \alpha_1^{r+1} + \\ & \quad + \dots + A_1 \alpha_1^{n-1} + \alpha_1^n] + \\ & + r \cdot x^{r-1} [A_{n-1} + 2A_{n-2} \alpha_1 + \dots + r A_{n-r} \alpha_1^{r-1} + (r+1) A_{n-r-1} \alpha_1^r + \\ & \quad + (n-1) A_1 \alpha_1^{n-2} + n \alpha_1^{n-1}] + \\ & + \frac{r \cdot (r-1)}{1 \cdot 2} x^{r-2} [2 \cdot 1 A_{n-2} + \dots + r \cdot (r-1) A_{n-r} \alpha_1^{r-2} + \\ & \quad + (r+1) r A_{n-r-1} \alpha_1^{r-1} + \dots + \\ & \quad + (n-1)(n-2) A_1 \alpha_1^{n-3} + n \cdot (n-1) \alpha_1^{n-2}] + \\ & + \frac{r(r-1)(r-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^{r-3} [3 \cdot 2 \cdot 1 A_{n-3} + \dots + \\ & \quad + r(r-1)(r-2) A_{n-r} \alpha_1^{n-r} + \dots + n \cdot (n-1)(n-2) \alpha_1^{n-3}] \\ & \quad \vdots \\ & + r x [(r-1) \dots 1 A_{n-r+1} + r \cdot (r-1) \dots 2 A_{n-r} \alpha_1 + \dots + \\ & \quad + n \cdot (n-1) \dots (n-r+2) \alpha_1^{n-r+1}] + \\ & + r \cdot (r-1) \dots 1 A_{n-r} + (r+1) r \dots 2 A_{n-r-1} \alpha_1 + \dots + \\ & \quad + n \cdot (n-1) \dots (n-r+1) \alpha_1^{n-r} = \\ & = x^r \varphi(\alpha_1) + r x^{r-1} \varphi'(\alpha_1) + \frac{r \cdot (r-1)}{1 \cdot 2} x^{r-2} \varphi''(\alpha_1) + \dots + r x \varphi^{(r-1)}(\alpha_1) + \\ & \quad + \varphi^{(r)}(\alpha_1). \end{aligned}$$

Maintenant si l'on a $r \leq n_i - 1$, on aura :

$\varphi(\alpha_i) = 0, \varphi'(\alpha_i) = 0, \dots, \varphi^{(r)}(\alpha_i) = 0$, donc, pour $y = e^{\alpha_i x} x^r$:

$$\frac{d^n y}{dx^n} + A_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + A_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \dots + A_{n-1} \frac{dy}{dx} + A_n y = 0,$$

c'est-à-dire $y = e^{\alpha_i x} x^r$ sera une solution de l'équation différentielle proposée. De même $C e^{\alpha_i x} x^r$ en sera une solution, si C est une constante arbitraire.

Donc, les solutions de l'équation proposée seront :

$$\begin{aligned} & C_0 e^{\alpha_1 x}, C_1 e^{\alpha_2 x} x, C_2 e^{\alpha_3 x} x^2 \dots C_{n_1-1} e^{\alpha_1 x} x^{n_1-1}, \\ & C'_0 e^{\alpha_2 x}, C'_1 e^{\alpha_2 x} x, C'_2 e^{\alpha_2 x} x^2 \dots C'_{n_2-1} e^{\alpha_2 x} x^{n_2-1}, \\ & \vdots \\ & C_0^{(s-1)} e^{\alpha_s x} x, C_1^{(s-1)} e^{\alpha_s x} x, C_2^{(s-1)} e^{\alpha_s x} x^2, \dots C_{n_s-1}^{(s-1)} e^{\alpha_s x} x^{n_s-1} \end{aligned}$$

où les quantités C sont des constantes absolument arbitraires. Or, comme l'équation proposée est linéaire, la somme de toutes ces solutions en sera aussi une solution, et cette somme sera l'intégrale complète, vu qu'elle renferme $n_1 + n_2 + \dots + n^s = n$ constantes arbitraires. Donc l'intégrale complète de notre équation différentielle est :

$$\begin{aligned} & e^{\alpha_1 x} [C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \dots + C_{n_1-1} x^{n_1-1}] + \\ & + e^{\alpha_2 x} [C'_0 + C'_1 x + C'_2 x^2 + \dots + C'_{n_2-1} x^{n_2-1}] + \\ & + \dots \\ & \vdots \\ & + e^{\alpha_s x} [C_0^{(s-1)} + C_1^{(s-1)} x + C_2^{(s-1)} x^2 + \dots + \\ & + C_{n_s-1}^{(s-1)} x^{n_s-1}] = \gamma. \end{aligned}$$

Cette équation a lieu, même pour des valeurs imaginaires de $\alpha_1, \alpha_2, \dots$. Or, si l'on suppose $\alpha_i = \gamma_i + \beta_i \sqrt{-1}$, il faudra nécessairement qu'une des autres quantités $\alpha_2, \dots, \alpha_s$ soit égale à $\gamma_i - \beta_i i$; soit donc $\alpha_2 = \gamma_i - \beta_i i$, on aura :

$$\begin{aligned} e^{\alpha_1 x} &= e^{\gamma_i x} [\cos(\beta_i x) + i \sin(\beta_i x)] ; \\ e^{\alpha_2 x} &= e^{\gamma_i x} [\cos(\beta_i x) - i \sin(\beta_i x)]. \end{aligned}$$

De là on tirera en supposant

$$\begin{aligned} C_r + C'_r &= B_r \\ (C_r - C'_r) i &= D_r. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & e^{\alpha_1 x} (C_0 + C_1 x + \dots + C_{n_1-1} x^{n_1-1}) + \\ & + e^{\alpha_2 x} (C'_0 + C'_1 x + \dots + C'_{n_2-1} x^{n_2-1}) = \\ & = e^{\gamma_i x} [B_0 + B_1 x + \dots + B_{n_1-1} x^{n_1-1}] \cos(\beta_i x) + \\ & + e^{\gamma_i x} [D_0 + D_1 x + \dots + D_{n_1-1} x^{n_1-1}] \sin(\beta_i x). \end{aligned}$$

On fera les mêmes substitutions pour d'autres racines imaginaires, et ainsi l'intégrale complète se trouvera dans la plus grande généralité possible. En traitant la question de la manière précédente, on n'aura pas besoin de considérations étrangères, quelquefois embarrassantes surtout pour les commençants. (Voyez par exemple *Leçons sur le calcul intégral*, par Moigno, leçon 37, § 242.)