NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

TERQUEM

Question d'examen. Théorie des exposants de nature quelconque

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 6 (1847), p. 106-113

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1847_1_6__106_1>

QUESTION D'EXAMEN.

Théorie des exposants de nature quelconque (*v.* t. V, p. 704).

A. Quantités réelles, ni nulles, ni infinies; exposants réels rationnels, ni nuls, ni infinis.

1. *Définition. Exposant entier positif.* L'exposant entier

positif est un nombre entier positif écrit à droite et au-dessus de la quantité et désignant qu'il faut multiplier la quantité autant de fois moins une, qu'il y a d'unités dans l'exposant; le produit, résultat de ces opérations, se nomme *puissance*, dont le quantième est indiqué par l'exposant.

2. *Identités fondamentales.* m et n étant des nombres entiers positifs, l'on a : 1° $a^m a^n = a^{m+n}$; 2° $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ si $m > n$; et $\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}}$ si $m < n$; 3° $(a^m)^n = a^{mn}$; 4° $\sqrt[n]{a^{np+q}} = a^p \sqrt[n]{a^q}$; $q < n$. Ces identités sont des conséquences immédiates de la définition.

3. *Définition. Exposant entier négatif.* Cet exposant indique qu'il faut élever la *réciproque* de la quantité à une puissance marquée par l'exposant pris positivement.

4. *Identités fondamentales.* Elles sont les mêmes que pour les exposants entiers et sont aussi des conséquences de la définition; ainsi $a^{-m}.\, a^{-n} = \frac{1}{a^m} \cdot \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a^{m+n}} = a^{-m-n}$, et ainsi des autres.

5. Les quatre identités fondamentales subsistent donc pour les exposants entiers, positifs ou négatifs; on peut écrire $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ lors même que n est plus grand que m; et c'est ce qui a donné naissance aux exposants négatifs.

6. *Définition. Exposant fractionnaire positif.* Cet exposant indique qu'il faut élever la quantité à une puissance marquée par le numérateur et extraire de cette puissance une racine d'un indice marqué par le dénominateur de l'exposant fractionnaire; ou bien encore, à l'inverse, il faut commencer par extraire de la quantité la racine désignée par le dénominateur et élever le résultat à la puissance indiquée par le numérateur; on démontre facilement que ces deux modes d'opérer donnent le même résultat.

7. On a l'identité $a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{pm}{pn}}$; c'est une conséquence de la définition ; il faut remarquer que le premier membre a n valeurs diverses, et le second membre pn valeurs; mais parmi ces pn valeurs se trouvent les n valeurs du premier membre; et ce n'est que pour celle-ci que l'identité subsiste.

8. Les quatre identités fondamentales subsistent pour les exposants fractionnaires positifs; ainsi $a^{\frac{m}{n}} a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$. En effet, $\sqrt[u]{a^m}.\sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{mq+np}}$; donc, etc.

9. *Définition. Exposant fractionnaire négatif.* Comme pour l'exposant positif; mais la quantité est remplacée par sa réciproque $a^{\frac{-m}{n}} = \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{m}{n}}$.

Résumé. Les identités fondamentales ont lieu pour des exposants entiers ou fractionnaires, positifs ou négatifs.

B. Quantités nulles ou infinies; exposants réels, rationnels, ni nuls, ni infinis.

11. On a évidemment : $0^m = 0$; $0^{-m} = \infty$; $\infty^m = \infty$; $\infty^{-m} = 0$.

C. Quantités réelles rationnelles, ni nulles, ni infinies, exposants nuls ou infinis.

12. $a^0 = 1$; car a^0 provient de $\frac{a^m}{a^m}$; $a^{-0} = \frac{1}{a^0} = 1$; $a^{\infty} = \infty$ si $a > 1$; et $a^{\infty} = 0$ si $a < 1$; et inversement $a^{-\infty} = 0$ si $a > 1$; et $a^{-\infty} = \infty$ si $a < 1$.

13. Les identités fondamentales subsistent encore pour les exposants nuls ou infinis.

D. Quantités nulles ou infinies; exposants nuls ou infinis.

14. $0^{\infty}=0$; $0^{-\infty}=\infty$; $\infty^{\infty}=\infty$; $\infty^{0}=\frac{\infty^{m}}{\infty^{m}}=\frac{\infty}{\infty}=$ indéterminé; $0^{0}=\frac{0^{m}}{0^{m}}=\frac{0}{0}=$ indéterminé.

Observation. Presque tous les géomètres admettent avec Euler que $0^{0}=1$; car, dit ce dernier (Alg., t. I, § 175), $\frac{a}{a}=a^{0}=1$; cette équation subsiste, quelque petite valeur qu'on attribue à a; donc aussi lorsque $a=0$, ainsi $0^{0}=1$; mais cette conclusion manque de justesse; il s'ensuivrait aussi que $\frac{0}{0}=1$; l'identité $0=0$ n'est pas du même genre que l'identité $2=2$; la première peut s'écrire $6.0=7.0$; on ne peut pas écrire $6.2=7.2$; et $\frac{0}{0}$ n'est pas identique à $\frac{2}{2}$. Aussi M. Cauchy range-t-il les expressions $\frac{\infty}{\infty}$, ∞^{0}, $\frac{0}{0}$ parmi les symboles d'indétermination (Résumé des leçons données à l'École polytechnique sur le calcul infinitésimal, p. 25). Un anonyme, qui signe S, enseigne la même doctrine dans le Journal de Crelle (t. XI, p. 272, 1834, en français). Nous avons montré que si l'on admet que 0^{0} soit constamment égal à l'unité, on serait conduit à cette conclusion absurde que; dans la surface transcendante représentée par $z=x^{y}$, tout l'axe des y appartient à la surface, excepté le point servant d'origine. La vérité est que l'axe des z appartient aussi à la surface, ainsi que la droite $z=1$ située dans le plan xz (*v.* t. V, p. 648).

C. Quantités réelles, ni nulles, ni infinies; exposants réels irrationnels.

15. *Définition*. Le symbole m étant un nombre entier, p

un nombre qui n'est pas une puissance d'indice m ; le symbole $\sqrt[m]{p}$ désigne qu'il existe une série infinie de nombres *finis*, telle qu'en les élevant tous à la puissance m, on obtient une seconde série qui a p pour limites ; c'est-à-dire une seconde série dont aucun terme n'est égal à p, mais où la différence, en excès ou en défaut, entre les termes et p peut devenir plus petite qu'aucune quantité donnée. Dans la première série, la différence entre deux termes consécutifs peut aussi descendre au-dessous de toute quantité donnée ; mais elle n'a pas de limite assignable par un nombre *fini* de chiffres, dans aucun système de numération; tandis que la seconde série a une limite assignable. Prenons pour exemple $\sqrt{2}$; on a pour première série : $1, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{19}, \ldots$ les différences entre les termes vont en diminuant; elle n'a pas de limite exprimable en chiffres d'une numération. On désigne symboliquement cette limite par $\sqrt{2}$, c'est-à-dire qu'en formant la seconde série $1, \frac{9}{4}, \frac{49}{25}, \frac{289}{144}$, etc., la limite est 2.

16. *Observation générale.* Toutes les fois qu'on fait une quelconque des six opérations arithmétiques sur des expressions irrationnelles, il faut toujours sous-entendre, à moins de ne savoir ce qu'on dit, qu'on fait ces opérations sur les quantités rationnelles de la première série dont ces expressions rationnelles représentent la limite symbolique. Ainsi les identités fondamentales du § 2 ont donc encore lieu pour des exposants irrationnels, puisqu'on n'opère jamais que sur des quantités rationnelles.

D. Quantités imaginaires, monômes ou binômes ; exposant réel.

17. Représentons $\sqrt{-1}$ par i ; m étant un nombre en-

tier; $i^{4m}=1$; $i^{4m+1}=i$; $i^{4m+2}=-1$; $i^{4m+3}=-i$ (*Voir* t. V, p. 141).

18. Les identités fondamentales s'appliquent encore ici. Par exemple, on a : $i^p \times i^q = i^{p+q}$; il suffit de le démontrer pour p et q, chacun plus petit que 4.

19. On a encore $i^{\frac{m}{n}} . i^{\frac{p}{q}} = i^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$; $i^{\frac{m}{n}}$ est racine d'une équation binôme de la forme $x^n \pm 1 = 0$ ou $x^{2n} \pm 1 = 0$; de même, $i^{\frac{p}{q}}$ est racine d'une des équations de cette forme $x^q \pm 1 = 0$; $x^{2q} \pm 1 = 0$; $i^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$ est racine de l'une de ces équations $x^{nq} \pm 1 = 0$ ou $x^{2nq} \pm 1 = 0$. Ces troisièmes formes renferment les produits des racines des premières par les racines des secondes.

20. $(a+bi)^m (a+bi)^n = (a+bi)^{m+n}$. En effet, soit $a^2+b^2=r^2$; $\frac{a}{r}=\cos x$; $\frac{b}{r}=\sin x$. Ainsi :

$a+bi=r(\cos x+i\sin x)$; $(a+bi)^m=r^m(\cos mx+i\sin mx)$; $(a+bi)^n=r^n(\cos nx+i\sin nx)$; $(a+bi)^m(a+bi)^n=$ $=r^{m+n}[\cos(m+n)x+i\sin(m+n)x]=r^{m+n}(\cos x+i\sin x)^{m+n}=$ $=(a+bi)^{m+n}$.

On peut trouver une démonstration purement algébrique, mais très-longue.

21. E. Exposants imaginaires.

Définition. L'exposant imaginaire a^{pi} désigne symboliquement la série qu'on obtient en développant a^p en une série ordonnée suivant les puissances de p, et remplaçant ensuite p par pi.

22. On a : $a^{pi}.a^{qi}=a^{(p+q)i}$. En effet, $a^{pi}=e^{pila}$; où la désigne le logarithme népérien de a. Donc :

$$a^{pi}=\cos pl.a+i\sin pl.a;\quad a^{qi}=\cos qla+i\sin qla;$$

donc

$$a^{pi} \cdot a^{qi} = \cos(p+q)la + i\sin(p+q)la = e^{(p+q)ila} = a^{(p+q)i}.$$

C. Q. F. D.

23. Conclusion générale. Les identités fondamentales subsistent pour des exposants entiers ou fractionnaires, positifs ou négatifs, rationnels ou irrationnels, réels ou imaginaires.

24. L'indice exponentiel est employé d'une manière générale pour indiquer une suite consécutive d'opérations similaires. Ainsi f^mP désigne qu'il faut faire sur P une certaine opération indiquée par f; sur ce premier résultat, la même opération qu'on a faite sur P; sur ce second résultat, encore la même opération, et ainsi de suite jusqu'à la $m^{ème}$ opération, et f^{-m}P désigne une expression sur laquelle il faut faire m de ces opérations pour parvenir à l'expression P, et $f^{\frac{m}{n}}$P indique des opérations *interpolatoires*. Ainsi x^m indique donc réellement m opérations. La première est le produit de 1 par x; la seconde le produit de ce premier résultat encore par x, et ainsi de suite; x^{-m} est la quantité sur laquelle il faut opérer ainsi m fois pour parvenir à 1; c'est donc $\frac{1}{x^m}$; $x^{\frac{m}{n}}$ désigne l'interpolation de n opérations semblables entre 1 et x^m.

On voit donc que la notation $\sin^m x$ pour $(\sin x)^m$ est vicieuse; car elle désigne qu'il faut prendre le sinus de x, puis le sinus de sinus x, etc. Comme cette notation usitée est commode, il est avantageux de la conserver.

25. Les identités fondamentales n'ont pas lieu pour les indices exponentiels, dans le sens général. Aussi on n'a pas, en général, f^m P . f^nP $= f^{m+n}$P. On démontre, au contraire, que lorsque cette identité subsiste, l'indice exponentiel devient *potentiel*. Il est donc le seul pour lequel cette

identité subsiste. Les considérations sont fondées sur le calcul fonctionnel ou autrement le calcul aux différences partielles.

26. Dans les opérations de dérivations on a cette identité remarquable qui les caractérise :

$$D^m . D^n = D^n . D^m .$$

C'est le sujet d'un très-beau Mémoire de M. Servois, qui s'est malheureusement retiré trop tôt de la science où il a rendu et pouvait rendre encore d'utiles services. Il est du petit nombre de géomètres français qui lisent. (Annales de Gergonne, t. V, p. 93, 1814.)