DROT

Solution d'un problème sur les arrangements

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 5 (1846), p. 97-100

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1846_1_5__97_1>

SOLUTION

d'un problème sur les arrangements

PAR M. DROT,
Professeur au Collége de Poitiers.

---

1. Étant données plusieurs espèces de lettres $a, b, c \ldots r, s$

et un nombre déterminé de lettres de chaque espèce, de manière que leur produit puisse être représenté par $a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}\ldots.$ $r^{\rho}s^{\sigma}$ trouver le nombre des arrangements de ces lettres n à n. (Le nombre total des lettres $\alpha+\beta+\gamma+\ldots.+\rho+\sigma=m.$)

On adopte, pour les arrangements en question, la notation $(a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}\ldots.r^{\rho}s^{\sigma}A_n)$. Cela posé, le nombre des arrangements qui ne contiennent pas a est évidemment $(b^{\beta}c^{\gamma}\ldots.r^{\rho}s^{\sigma}A_n)$. Pour avoir ceux qui contiennent a une fois, on arrangera $n-1$ à $n-1$ les lettres $b^{\beta}c^{\gamma}\ldots.r^{\rho}s^{\sigma}$, et dans chacun de ces arrangements, on placera a à toutes les places possibles au nombre de n; le nombre des arrangements en question sera donc $n(b^{\beta}c^{\gamma}\ldots.r^{\rho}s^{\sigma}A_{n-1})$. Pour avoir les arrangements qui contiennent a deux fois, arrangeons $n-2$ à $n-2$ les lettres $b^{\beta}c^{\gamma}\ldots.r^{\rho}s^{\sigma}$ et disposons dans chacun de ces arrangements, de toutes les manières possibles, les lettres a et a'; la lettre a pourra être placée à $n-1$ places différentes; et en prenant un des résultats obtenus, la lettre a' pourra encore y être placée à n places différentes; donc, dans chacun des arrangements en question, il y aura $n(n-1)$ manières de disposer les lettres a et a'. Supposons actuellement $a=a'$; en prenant un des arrangements précédemment formés, et en y permutant de toutes les manières possibles, c'est-à-dire de 1.2 manières, les deux lettres a et a', sans toucher aux autres lettres, on aura autant d'arrangements qui précédemment étaient différents et qui maintenant deviennent les mêmes. Donc, en résumé, le nombre de manières de disposer deux lettres semblables dans chacun des arrangements $n-2$ à $n-2$ de $b^{\beta}c^{\gamma}\ldots.r^{\rho}s^{\sigma}$ se réduira à $\frac{n(n-1)}{1.2}$; donc le nombre total des arrangements qui contiennent a deux fois est représenté par $\frac{n(n-1)}{1.2}(b^{\beta}c^{\gamma}\ldots.r^{\rho}s^{\sigma}A_{n-2})$. On trouvera, par des raisonnements analogues, que le nombre des arrangements qui contiennent a trois fois est exprimé par $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}(b^{\epsilon}c^{\gamma}\ldots\ldots r^{\rho}s^{\sigma}A_{n-3})$; que le nombre des arrangements qui contiennent a α fois est exprimé par $\frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-\alpha+1)}{1.2.3\ldots\ldots\alpha}\left(b^{\epsilon}c^{\gamma}\ldots\ldots r^{\rho}s^{\sigma}A_{n-\alpha}\right)$. Donc on a la formule générale :

$$(a^{\alpha}b^{\epsilon}c^{\gamma}\ldots\ldots r^{\rho}s^{\sigma}A_n)=(b^{\epsilon}c^{\gamma}\ldots\ldots r\,s^{\sigma}A_n)+n(b^{\epsilon}c^{\gamma}\ldots\ldots r^{\rho}s^{\sigma}A_{n-1})+$$
$$+\frac{n(n-1)}{1.2}(b^{\epsilon}c^{\gamma}\ldots\ldots r^{\rho}s^{\sigma}A_{n-2})+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}(b^{\epsilon}c^{\gamma}\ldots\ldots r^{\rho}s^{\sigma}A_{n-3})$$
$$+\ldots\ldots+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-\alpha+1)}{1.2.3\ldots\ldots\alpha}(b^{\epsilon}c^{\gamma}\ldots\ldots r^{\rho}s^{\sigma}A_{n-\alpha}).$$

Cette formule ramène le problème proposé à d'autres du même genre, mais plus simples, sur lesquels on raisonnera de la même manière.

On observera 1° que si $\alpha > n$, on pourra évidemment le réduire à n sans rien changer ; de manière que si $\alpha \geqq n$, $\epsilon \geqq n$, $\gamma \geqq n \ldots\ldots$, le problème se ramènera à celui des arrangements complets des lettres $a, b, c \ldots\ldots r, s$ pris n à n.

2° Que si $\alpha=\epsilon=\gamma=\ldots\;=\sigma=1$, le problème devient un problème d'arrangements ordinaires.

3° Que si $\epsilon+\gamma+\ldots\ldots+\rho+\sigma<n$, l'expression $(b^{\epsilon}c^{\gamma}\ldots\ldots r^{\rho}s\;A_n)=0$; de même pour les autres, dans les cas semblables.

4° Que si $n=\alpha$, l'expression $(b^{\epsilon}c^{\gamma}\ldots\ldots r^{\rho}s\;A_0)$ devra être considérée comme egale à 1.

On parviendra finalement à avoir à calculer des expressions telles que $s^{\sigma}A_n$, et une pareille expression revient, d'après la première remarque, si $\sigma \geqq n$, à $s^{n}A_n=1$; et si $\sigma<n$, elle est égale à 0, d'après la troisième remarque.

2. Examinons le cas particulier de $m = n$; alors, dans la formule générale, tous les termes du second membre disparaissent, excepté le dernier, et on a successivement :

$$\left(a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} \ldots\ldots r^{\rho} s^{\sigma} \mathrm{A}_{m}\right) = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-\alpha+1)}{1.2.3\ldots\alpha}$$

$$\left(b^{\beta} c^{\gamma} \ldots\ldots r^{\rho} s^{\sigma} \mathrm{A}_{m-\alpha}\right),$$

$$\left(b^{\beta} c^{\gamma} \ldots\ldots r^{\rho} s^{\sigma} \mathrm{A}_{m-\alpha}\right) = \frac{(m-\alpha)(m-\alpha-1)\ldots\ldots(m-\alpha-\beta+1)}{1.2.3\ldots\beta}$$

$$\left(c^{\gamma} \ldots r^{\rho} s^{\sigma} \mathrm{A}_{m-\alpha-\beta}\right),$$

$$c^{\gamma} \ldots\ldots r^{\rho} s^{\sigma} \mathrm{A}_{m-\alpha-\beta}) = \frac{(m-\alpha-\beta)(m-\alpha-\beta-1)\ldots\ldots(m-\alpha-\beta-\gamma+1)}{1.2.3\ldots\gamma}$$

$$\left(\ldots\ldots r^{\rho} s^{\sigma} \mathrm{A}_{m-\alpha-\beta-\gamma}\right),$$

. . . .

$$\left(r^{\rho} s^{\sigma} \mathrm{A}_{m-\alpha-\beta-\gamma-\ldots}\right) =$$

$$= \frac{(m-\alpha-\beta-\gamma-\ldots\ldots)\ldots\ldots(m-\alpha-\beta-\gamma-\ldots\ldots-\rho+1)}{1.2.3\ldots\rho}$$

$$\left(s^{\sigma} \mathrm{A}_{m-\alpha-\beta-\gamma-\ldots\ldots\rho}\right),$$

$$\left(s^{\sigma} \mathrm{A}_{m-\alpha-\beta-\gamma-\ldots\ldots\rho}\right) =$$

$$= (s^{\sigma} \mathrm{A}_{\sigma}) = \frac{(m-\alpha-\beta-\gamma-\ldots-\rho)(m-\alpha-\beta-\gamma\ldots-\rho-1)\ldots(m-\alpha-\beta-\ldots-\rho-\sigma+1)}{1.2.3\ldots\sigma}$$

$$= \frac{\sigma(\sigma-1)(\sigma-2)\ldots\ldots 1}{1.2.3\ldots\sigma} = 1 ;$$

d'où

$$\left(a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} \ldots r^{\rho} s^{\sigma} \mathrm{A}m\right) = \frac{1.2.3.4\ldots(m-1)m}{(1.2.\ldots\alpha)(1.2\ldots\beta)\ldots(1.2\ldots\sigma)},$$ formule connue.

3. La question analogue pour les combinaisons se traite de la même manière ; seulement, dans la formule générale, tous les termes du second membre ont 1 pour coefficient. (Cette formule relative aux combinaisons m'avait été donnée autrefois et je l'ai étendue aux arrangements.)