NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

TH. CLAUSEN

Détermination des axes principaux de rotation d'un corps, par M. Th. Clausen, de Munich

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 5 (1846), p. 81-83

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1846_1_5__81_0>

DÉTERMINATION

des axes principaux de rotation d'un corps, par M. Th. Clausen, de Munich.

(Crelle, t. V, p. 383.)

La solution ordinaire conduit à une équation du troisième degré, un peu compliquée; la méthode suivante donne à l'équation une forme plus symétrique; elle a été employée par M. Gauss pour la solution d'un autre problème; l'origine est au centre de gravité du corps; axes rectangulaires; x,y,z, coordonnées d'un point; x',y',z', coordonnées du même point relativement aux axes principaux; on a :

$$\left.\begin{aligned} \int x^2dm &= \alpha\,; & \int xydm &= \delta \\ \int y^2dm &= \beta\,; & \int yzdm &= \varepsilon \\ \int z^2dm &= \gamma\,; & \int zxdm &= \theta \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Les six lettres grecques représentent des quantités connues. Et relativement aux axes principaux :

$$\left.\begin{aligned} \int x'^2dm &= \xi\,; & \int x'y'dm &= 0 \\ \int y'^2dm &= \upsilon\,; & \int y'z'dm &= 0 \\ \int z'^2dm &= \zeta\,; & \int z'x'dm &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

et soit

$$\left.\begin{aligned} x' &= ax + by + cz \\ y' &= a'x + b'y + c'z \\ z' &= a''x + b''y + c''z \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

on doit avoir $x^2+y^2+z^2=x'^2+y'^2+z'^2$; donc

$$\left.\begin{array}{ll} a^2+a'^2+a''^2=1, & ab+a'b'+a''b''=0 \\ b^2+b'^2+b''^2=1, & bc+b'c'+b''c''=0 \\ c^2+c'^2+c''^2=1, & ac+a'c'+a''c''=0 \end{array}\right\} \quad (4)$$

Ainsi nous avons douze inconnues, ξ, υ, ζ et les neuf coefficients des équations (3) ; mais aussi douze équations, savoir les systèmes (2) et (4).

Les équations (3) donnent :

$$\left.\begin{array}{l} x=ax'+a'y'+a''z' \\ y=bx'+b'y'+b''z' \\ z=cx'+c'y'+c''z' \end{array}\right\} \quad (5)$$

d'où

$$\left.\begin{array}{ll} a^2+b^2+c^2=1, & aa'+bb'+cc'=0 \\ a'^2+b'^2+c'^2=1, & a'a''+b'b''+c'c''=0 \\ a''^2+b''^2+c''^2=1, & a''a+b''b+c''c=0 \end{array}\right\} \quad (6)$$

Substituant dans les équations (1), les valeurs déduites de (5) et (2), il vient :

$$\left.\begin{array}{l} \alpha=a^2\xi+a'^2.\upsilon+a''^2.\zeta \\ \beta=b^2\xi+b'^2.\upsilon+b''^2.\zeta \\ \gamma=c^2\xi+c'^2.\upsilon+c''^2.\zeta \\ \delta=ab\xi+a'b'.\upsilon+a''b''.\zeta \\ \varepsilon=bc\xi+b'c'.\upsilon+b''c''.\zeta \\ \theta=ca\xi+c'a'.\upsilon+c'a''.\zeta \end{array}\right\} \quad (7)$$

celles-ci donnent, ayant égard aux équations (6) :

$$\left.\begin{array}{l} \xi a=\alpha a+\delta b+\theta c \\ \xi b=\delta a+\beta b+\varepsilon c \\ \xi c=\theta a+\varepsilon b+\gamma c \end{array}\right\} \quad (8)$$

$$\left.\begin{array}{l} \upsilon a'=\alpha a'+\delta b'+\theta c' \\ \upsilon b'=\delta a'+\beta b'+\varepsilon c' \\ \upsilon c'=\theta a'+\varepsilon b'+\gamma c' \end{array}\right\} \quad (9)$$

$$\left.\begin{aligned}\zeta a''&=\alpha a''+\delta b''+\theta c''\\ \zeta b''&=\delta a''+\beta b''+\varepsilon c''\\ \zeta c''&=\theta a''+\varepsilon b''+\gamma c''\end{aligned}\right\}\qquad(10)$$

Par l'élimination de $a,b,c,$ des équations (8), on trouve l'équation suivante entre ξ, et les quantités connues α,β,γ, etc.:

$$-\xi)(\beta-\xi)(\gamma-\xi)-\delta^2(\gamma-\xi)-\varepsilon^2(\alpha-\xi)-\theta^2(\beta-\xi)+2\delta\varepsilon\theta=0.\quad(11)$$

On voit de suite qu'on trouve une semblable équation, en υ et en ζ, en éliminant a',b',c' entre les équations (9), et a'',b'',c'' entre les équations (10); ainsi, si on développe l'équation (11), et qu'on remplace ξ par u, on obtient:

$$u^3-(\alpha+\beta+\gamma)u^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha-\delta^2-\varepsilon^2-\theta^2)u+\alpha\varepsilon^2+$$
$$+\beta\theta^2+\gamma\delta^2-2\delta\varepsilon\theta-\alpha\beta\gamma=0;\qquad(12)$$

les trois racines sont les valeurs de ζ, υ et ξ.

Les équations (8) donnent:

$$a\left((\alpha-\xi)\xi-\delta\theta\right)=b\left((\beta-\xi)\xi-\delta\varepsilon\right)=c\left((\gamma-\xi)\xi-\theta\varepsilon\right)$$

$$\left.\begin{aligned}\lambda a&=\frac{1}{(\alpha-\xi)\xi-\delta\theta}\\ \lambda b&=\frac{1}{(\beta-\xi)\xi-\varepsilon\delta}\\ \lambda c&=\frac{1}{(\gamma-\xi)\xi-\theta\varepsilon}\\ \lambda^2&=\frac{1}{\left((\alpha-\xi)\xi-\delta\theta\right)^2}+\frac{1}{\left((\beta-\xi)\xi-\delta\varepsilon\right)^2}+\frac{1}{\left((\gamma-\xi)\xi-\theta\varepsilon\right)^2}\end{aligned}\right\}\qquad(13)$$

On trouve de la même manière a',b',c' en υ, et a'',b'',c'' en ζ.