NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

C. JOHN

Théorèmes sur les angles des polygones plans convexes et des polygones sphériques convexes

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 5 (1846), p. 674-675

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1846_1_5__674_0>

THÉORÈMES

sur les angles des polygones plans convexes et des polygones sphériques convexes.

PAR M. C. JOHN,
Élève en mathématiques, à Marseille.

THÉORÈME I. Dans tout polygone plan convexe, ayant plus de quatre côtés, le nombre des angles droits ajouté au nombre des angles aigus est toujours moindre que quatre.

Démonstration Soient o, d, a le nombre des angles obtus, droits et aigus d'un polygone convexe de n côtés ; on a donc $o+d+a=n$; chaque angle obtus est moindre que deux droits ; donc $(2o+d+a)$ surpasse le nombre de droits contenus dans la somme des angles du polygone ; de là l'inégalité $2o+d+a>2n-4$. Éliminant o au moyen de l'équation, il vient $2n-d-a>2n-4$; donc $d+a<4$, c q. f. d.

Corollaire. Le nombre des angles obtus surpasse $n-4$.

THEORÈME II. Même enoncé pour le polygone sphérique convexe.

Démonstration. Conservons la même notation ; un triangle sphérique contient $2(1+e)$ angles dièdres où e représente l'excès sphérique moindre que l'unité. Donc un polygone de n côtés contient $2n-4+2e$ angles droits, où e est la somme des $n-2$ excès sphériques répondant aux $n-2$ triangles qui composent le polygone. Raisonnant comme ci-dessus, on obtient l'inégalité $2n-(a+d)>2n-4+2e$. Il est évident que $2e$ doit être moindre que 4. Donc $a+d<4-2e$, et, *à fortiori*, $a+d<4$.

Corollaire 1. Dans un angle solide convexe, le nombre des angles dièdres droits ajoutés au nombre des angles dièdres aigus est moindre que 4.

Corollaire 2. Soit S le nombre des sommets d'un polyèdre convexe; le nombre total des angles dièdres droits et aigus est moindre que 4S.

Corollaire 3. F et A étant le nombre des faces et des arêtes, on a la relation d'Euler $S + F = A + 2$. Donc le nombre total des angles dièdres droits et aigus est moindre que $4A - 4F + S$.

Note. Les deux théorèmes se déduisent directement de cette considération. Dans un polygone plan convexe, la somme des suppléments des angles est égale à quatre droits, et dans un polygone sphérique, à moins de quatre droits.

Tm.