MIDY

Sur une propriété des nombres

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 5 (1846), p. 640-646

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1846_1_5__640_1>

SUR UNE PROPRIÉTÉ DES NOMBRES,

PAR M. MIDY,
professeur à la Grande-Sauve, près Bordeaux.

M. Cauchy a rendu compte à l'Académie des sciences de deux propositions nouvelles sur les propriétés des nombres, communiquées par M. d'Adhémar et Breton (de Champ). Nous allons les indiquer et les démontrer, en donnant plus d'extension à la première proposition.

Proposition de M. d'Adhémar (*).

Si l'on conçoit la suite des nombres impairs :

$$(1). \qquad \begin{array}{c|c|c|c|c} 1, & 3,\ 5, & 7,\ 9,\ 11, & 13,\ 15,\ 17,\ 19, & \text{etc.} \\ 1, & 8, & 27, & 64, & \end{array}$$

Décomposée comme ci-dessus, en suites partielles dont le nombre des termes aille toujours en croissant suivant la progression naturelle 1, 2, 3, 4, etc., la somme des termes de chaque suite sera le cube du nombre entier marquant le rang correspondant.

(*) Cette propriéte a eté énoncée, il y a une vingtaine d'années, dans la *Bibliothèque universelle de Genève*, où je l'ai copiee. J'ai oublie de marquer le volume. Tm.

Nous allons faire voir que cette propriété est comprise dans une proposition plus générale :

Savoir, que toutes les puissances semblables, ou du même degré de tous les nombres entiers sont toujours des sommes partielles de termes consécutifs de la suite (A), se succédant à des intervalles variables, en général, mais suivant une loi facile à déterminer, et dont le nombre de termes est, pour toutes ces puissances semblables, la même puissance du nombre entier considéré.

Pour cela nous nous appuierons sur les deux identités suivantes :

$$n^p\left(\frac{n+1}{2}+\frac{n-1}{2}\right)=n^{p+1},$$

$$n^p\left(\frac{n+1}{2}-\frac{n-1}{2}\right)=n^p.$$

En les multipliant entre elles nous aurons :

$$\left(\frac{n^p(n+1)}{2}\right)^2-\left(\frac{n^p(n-1)}{2}\right)^2=n^{2p+1}, \qquad \text{(B)}$$

on a encore :

$$n^{p-1}\left(\frac{n^2+1}{2}+\frac{n^2-1}{2}\right)=n^{p+1},$$

$$n^{p-1}\left(\frac{n^2+1}{2}-\frac{n^2-1}{2}\right)=n^{p-1},$$

par suite :

$$\left(\frac{n^{p-1}(n^2+1)}{2}\right)^2-\left(\frac{n^{p-1}(n^2-1)}{2}\right)^2=n^{2p}. \qquad \text{(C)}$$

Or on sait que la somme d'un nombre quelconque de termes de la suite (A), à partir du 1er, est le carré du nombre qui marque le rang du terme. Les identités (B) et (C) démontrent donc le principe général que nous avons énoncé.

2. Nous allons chercher dans quelques cas particuliers le

nombre des termes de chaque suite et le rang qu'elle occupe dans la série (A).

Si, dans l'identité (B), l'on fait $p=1$, elle devient :

$$\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2-\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2=n^3.$$

Or on a :

$$\frac{n(n+1)}{2}-\frac{n(n-1)}{2}=n.$$

Donc le nombre de termes de chaque suite est marqué par le nombre même dont la somme des termes de cette suite est le cube, ou par le rang qu'elle occupe. De plus si dans les nombres précédents $\frac{n(n+1)}{2}$, $\frac{n(n-1)}{2}$, on change n en $n+1$, ils deviennent $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$, $\frac{(n+1)n}{2}$. On voit par là que le premier terme de chaque suite succède immédiatement au dernier de celle qui précède. Ainsi se trouve démontrée la propriété particulière que nous avons d'abord indiquée.

En général on a :

$$\frac{n^p(n+1)}{2}-\frac{n^p(n-1)}{2}=n^p.$$

On voit par là que, quel que soit p, le nombre de termes de chaque suite est constamment la même puissance du nombre qui marque le rang de cette suite.

3. Faisons dans la même formule $p=2$, nous aurons

$$\left(\frac{n^2(n+1)}{2}\right)^2-\left(\frac{n^2(n-1)}{2}\right)^2=n^5.$$

Si dans le nombre $\frac{n^2(n-1)}{2}$, on change n en $n+1$, il deviendra $\frac{(n+1)^2 n}{2}$. Or ce nombre est plus reculé dans la suite naturelle que $\frac{n^2(n+1)}{2}$ et leur différence $\frac{n(n+1)}{2}$ sera l'intervalle, ou le nombre de termes qui existera entre la suite dans le rang en n et celle qui la suit immédiatement. D'ailleurs la différence des nombres

$$\frac{n^2(n+1)}{2},\ \frac{n^2(n-1)}{2}$$

étant $n^{ème}$, le nombre de termes de chaque suite sera le carré du nombre correspondant.

On peut remarquer que la différence trouvée $\frac{n(n+1)}{2}$ est le $n^{ème}$ terme suite des nombres triangulaires :

$$1,\ 3,\ 6,\ 10,\ 15,\ \text{etc.}$$

dont chacun, comme on sait, est la somme des termes de la suite naturelle des nombres jusqu'à celui, inclusivement compris, qui indique le rang du terme considéré. D'après cela la série (A), partagée comme il suit, donnera les sommes successives demandées.

Rang	1, 2	3, 4, 5, 6	7, 8, 9
(A)	1, 3	5, 7, 9, 11	13, 15, 17
	2	4	3 termes,
Sommes. . . .		$32=2^5$	

Rang	1, 2	10. . . . 18	19. . . . 24	25. . . . 40	
(A)	1, 3	19. . . . 35		49. . . . 79	etc.
	2	9	6	16 termes,	
Sommes. . . .		$243=3^5$		$1024=4^5$.	

4. Dans l'identité (C) la différence des nombres

$$\frac{n^{p-1}(n^2+1)}{2},\ \frac{n^{p-1}(n^2-1)}{2} \text{ est } n^{p-1}.$$

Le nombre de termes de chaque suite sera donc encore une puissance de n. Dans le cas le plus simple, celui où $p=2$, cette identité devient :

$$\left(\frac{n(n^2+1)}{2}\right)^2 - \left(\frac{n(n^2-1)}{2}\right)^2 = n^4,$$

et chaque suite est composée de n termes. D'ailleurs, si dans $\frac{n(n^5-1)}{2}$ on change n en $n+1$, cette expression devient $\frac{n(n+1)(n+2)}{2}$, et sa différence avec $\frac{n(n^2+1)}{2}$ est $\frac{n(3n+1)}{2}$. Ce dernier nombre est donc l'intervalle qui doit exister entre le dernier terme de la n^e suite et le premier de celle qui la suit. Si dans la formule $\frac{n(3n+1)}{2}$ on fait n successivement égal à 2, 3, 4, etc., et qu'on prenne les différences premières et deuxièmes, avec les résultats l'on pourra former le tableau suivant :

On voit que les différences secondes sont constantes. D'ailleurs la formule $\frac{n(n^2-1)}{2}$, pour $n=2$, devient 3. Donc la première suite commence au quatrième terme.

n	Valeurs.	1^re différence.	2e différence.
2	7		
		8	
2	15		3
		11	
4	26		3
		14	
5	40		3
		17	
6	57		

Au moyen de la table précédente on pourra donc étendre, autant qu'on le voudra, par un calcul très-simple, le tableau suivant :

Rang,	1, 2, 3	4, 5	6. . . . 12	13, 14, 15
(A)	1, 3, 5	7, 9		25, 27, 29
	3	2	7	3 termes,
Sommes,	. . . .	$16=2^4$		$81=3^4$

Rang,	16. . . . 30	31, 32, 33, 34	
(A)		61, 63, 65, 67	etc.
	15	4 termes,	
Sommes,		$256=4^4$	

Nous bornerons là les applications numériques des identités (B) et (C) et nous passerons à la seconde propriété que M. Breton (de Champ) a fait connaître (*). Sa proposition est celle-ci : toute puissance entière d'un nombre entier est la différence des carrés de deux nombres entiers; aussi et par conséquent elle est la somme d'un nombre déterminé de termes de la suite des nombres impairs.

Démonstration. On a d'abord l'identité :

$$(n+1)^2-n^2=2n+1.$$

Donc tout nombre impair est la différence de deux carrés; ce qui devait être, puisqu'il fait nécessairement partie de la suite (A) et qu'il est conséquemment la différence entre la somme des termes de cette suite jusqu'au nombre lui-même et la somme des termes qui le précèdent.

Soit en second lieu $N=n\times n'$ et $n>n'$.

On aura l'identité

$$\left(\frac{n+n'}{2}\right)^2-\left(\frac{n-n'}{2}\right)^2=nn'.$$

C'est-à-dire que le produit nn' peut toujours être considéré comme la différence des carrés de deux nombres dont l'un est la demi-somme des deux facteurs, et l'autre leur demi-différence. Donc, suivant que les deux nombres

$$\frac{n+n'}{2} \quad \text{et} \quad \frac{n-n'}{2}$$

seront entiers, ou fractionnaires, le produit nn' jouira de la propriété énoncée, ou en sera dépourvu.

Le premier cas aura lieu quand les facteurs inégaux n et n' seront tous les deux pairs, ou tous les deux impairs. Le second, quand l'un étant simplement pair, l'autre sera impair. De là et du principe précédant résulte évidemment la proposition énoncée.

(*) Elle est de Ballier des Ourmes (V. *Nouv. Ann.* p. [illegible]) Tm

Il faut néanmoins excepter, on le voit, la première puissance des nombres qui sont le produit de 2 par un nombre impair quelconque, puisque ne faisant point partie de la suite (A), ils ne sont pas d'ailleurs susceptibles, d'après la démonstration qui vient d'être donnée de la décomposition indiquée.

Appliquons la théorie qui précède à un exemple, et soit le nombre $105 = 3.5.7.$

on a: $105 = 3.35 = 5.21 = 7.15$,

donc: $105 = 19^2 - 16^2 = 13^2 - 8^2 = 11^2 - 4^2$,

ou: $105 = 33+35+37 = 17+19+21+23+25 = 9+11 + 13+15+17+19+21$.

Nous bornerons là ces applications.

Note. 1° Soit une progression arithmétique ayant pour premier terme $2y+1$, et 2 pour raison; le nombre des termes étant $x-y$, les formules connues donnent $2x-1$ pour dernier terme, et x^2-y^2 pour somme.

2° L'équation $x^2-y^2=a$, où a est un nombre donné, a une infinité de solutions rationnelles; à toutes les solutions où $x-y$ est un nombre entier, correspond donc une progression arithmétique dont la raison est 2, et dont la somme est a, et cette progression devient celle des nombres impairs lorsque x et y sont entiers, et par conséquent a. On sait d'ailleurs toujours trouver les solutions entières.

3° On trouve dans *Arithmetica integra* de Stiffel (p. 8), cette intéressante observation:

Dans toute progression géométrique, dont le premier terme est entier, et dont la raison est *deux élevé à une puissance de deux*, la somme de trois termes consécutifs est divisible par 7. Il est facile de trouver des propriétés analogues pour d'autres nombres. Tm.