JULES VIEILLE

Théorème d'Apollonius (extrait d'une lettre)

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 5 (1846), p. 637-640

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1846_1_5__637_0>

THEORÈME D'APOLLONIUS,

(Extrait d'une lettre.)

PAR M. JULES VIEILLE,
professeur.

Il existe diverses démonstrations des deux théorèmes d'Apollonius sur les diamètres conjugués de l'ellipse et de l'hyperbole. Je ne sache pas qu'on ait donné les suivantes, qui me paraissent mériter d'être connues des élèves à cause de leur simplicité.

Ces démonstrations reposent sur ce lemme connu :

LEMME. *Deux diamètres d'une ellipse sont conjugués si leurs projections sur le grand axe coïncident avec les projections de deux diamètres perpendiculaires entre eux (ou conjugués) du cercle décrit sur le grand axe comme diamètre. La réciproque est vraie.*

En effet, soient (*fig.* 54) om, on deux rayons perpendiculaires entre eux du cercle décrit sur le grand axe d'une ellipse; OP et OQ leurs projections sur cet axe; OC et OD les deux diamètres de cette ellipse, qui ont les mêmes projections; a et b les demi-axes de l'ellipse. On a :

$$\text{tang COP} = \frac{\text{CP}}{\text{OP}};$$

comme

$$\text{CP} = \frac{b}{a}\, m\text{P}, \quad \text{tang COP} = \frac{b}{a} \cdot \frac{m\text{P}}{\text{OP}};$$

de même

$$\text{tang DOQ} = \frac{b}{a} \cdot \frac{n\text{Q}}{\text{OQ}};$$

donc

$$\text{tang COP. tang DOQ} = \frac{b^2}{a^2}\,\frac{mP}{OP}\cdot\frac{nQ}{OQ}.$$

Mais les triangles mOP et nOQ étant égaux, on a :

$$mP = OQ \quad \text{et} \quad nQ = OP\,;$$

donc l'égalité précédente se réduit à :

$$\text{tang COP.tang DOQ} = \frac{b^2}{a^2}, \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

La réciproque se démontre aussi aisément.

Corollaire 1. On a :

$$\overline{OC}^2 + \overline{OD}^2 = \overline{OP}^2 + \frac{b^2}{a^2}\,\overline{mP}^2 + \overline{OQ}^2 + \frac{b^2}{a^2}\,\overline{nQ}^2\,;$$

ou bien, en remplaçant OQ et nQ respectivement par mP et OP :

$$\overline{OC}^2 + \overline{OD}^2 = \frac{a^2 + b^2}{a^2}\,(\overline{OP}^2 + \overline{mP}^2) = a^2 + b^2.$$

Corollaire 2. Soit, pour abréger l'écriture,

$$COD = \gamma\,;\ COP = \alpha\,;\ DOQ = \beta,$$

on a :

$$\sin\gamma = \sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha\,;$$

or,

$$\sin\alpha = \frac{b}{a}\,\frac{mP}{CC},\quad \cos\alpha = \frac{OP}{OC},\quad \sin\beta = \frac{b}{a}\,\frac{OP}{OD},\quad \cos\beta = \frac{mP}{OD}.$$

Donc, en substituant ces valeurs, il vient :

$$OC.\ OD.\ \sin\gamma = \frac{b}{a}\,(mP^2 + \overline{OP}^2) = ab.$$

Voilà les deux théorèmes qu'il s'agissait d'établir dans le cas de l'ellipse.

Pour l hyperbole, la démonstration est toute semblable ; seulement il faut remplacer le cercle décrit sur le grand axe par *une hyperbole équilatère ayant même axe transverse que l'hyperbole proposée.*

Le lemme sur lequel nous nous sommes appuyé tout à l'heure, s'énonce alors ainsi :

Deux diamètres d'une hyperbole sont conjugués si leurs projections sur l'axe transverse coïncident avec les projections de deux diamètres conjugués d'une hyperbole équilatère ayant même axe transverse que la proposée.

En conservant les mêmes lettres que dans la première figure, on voit que le demi-diamètre om de l'hyperbole équilatere (*fig.* 55) est encore égal à son conjugué on, mais non perpendiculaire; ces deux droites font avec l'axe transverse des angles complémentaires. Il en résulte que les triangles mOP, nOQ sont encore égaux; mais ce n'est plus la somme $\overline{OP}^2 + \overline{mP}^2$, qui égale a^2, mais bien la différence $\overline{OP}^2 - \overline{mP}^2$, d'ailleurs on a toujours :

$$CP = \frac{b}{a} mP \text{ et } DQ = \frac{b}{a} nQ.$$

Sans insister davantage, il est clair que les raisonnements précédents sont applicables, et ils conduiront aux deux égalités :

$$\overline{OC}^2 - \overline{OD}^2 = a^2 - b^2,$$
$$OC.\ OD \sin\gamma = ab.$$

Note. Segner a composé en allemand un traité des coniques où toutes les propriétés de l'ellipse sont déduites de celles du cercle dont l'ellipse est la projection orthogonale, cercle dont on fait emploi dans ce qui précède, en le faisant tourner autour du grand axe pour le ramener dans le plan de l'ellipse. Par la même voie, on peut démontrer ces théorèmes généraux.

1° Tous les polygones réguliers, d'un même nombre de côtés inscrits dans l'ellipse, sont équivalents;

2° La somme des carrés des demi-diamètres qui vont aux sommets est constante.

On nomme ici polygone régulier celui dont les côtés retranchent des segments équivalents ; les théorèmes d'Apollonius répondent au polygone régulier de quatre côtés.

Tm.