

H. DORMOY

Solution du problème 133

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 5
(1846), p. 633-635

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1846_1_5__633_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1846, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SOLUTION DU PROBLÈME 133 (p. 556).

PAR M. H. DORMOY.

Problème. On nomme points conjugués d'une ellipse les extrémités de deux diamètres conjugués : 1° la somme des carrés des normales par rapport au même axe de deux points conjugués est constante.

2° La somme des carrés des quatre rayons vecteurs est constante.

3° On a : $(a-r)^2 + (a-r')^2 = c^2$, r, r' rayons vecteurs conjugués ; a demi-grand axe ; c excentricité.

(G. RITT.)

Solution. x', y' étant les coordonnées d'un point P' , il est facile de voir que celles de son conjugué P'' sont :

$$(1) \quad x'' = \frac{a}{b} y'; \quad y'' = -\frac{b}{a} x'.$$

Cela posé, je vais examiner successivement chacune des trois parties du problème.

1° (Fig. 56). La somme des carrés des normales par rapport au même axe de deux points conjugués est constante.

Considérons par exemple l'axe des x .

Si dans l'équation de la normale au point P',

$$y - y' = \frac{a^2 y'}{b^2 x'} (x - x'),$$

je fais $y = 0$, pour déterminer le point N' où cette droite rencontre l'axe des x , j'ai :

$$x = \text{ON}' = \frac{a^2 - b^2}{a^4} x',$$

et en nommant n' la portion P'N' de la normale :

$$n'^2 = y'^2 + x'^2 \left(1 - \frac{a^2 - b^2}{a^4} \right)^2,$$

$$n'^2 = \frac{a^4 y'^2 + b^4 x'^2}{a^4}.$$

De même on a au point P'' :

$$n''^2 = \frac{a^4 y''^2 + b^4 x''^2}{a^4}.$$

Donc

$$n'^2 + n''^2 = \frac{a^4 (y'^2 + y''^2) + b^4 (x'^2 + x''^2)}{a^4}.$$

Mais

$$y'^2 + y''^2 = y'^2 + \frac{b^2}{a^2} x'^2 = b^2, \quad x'^2 + x''^2 = a^2,$$

donc enfin ,

$$n'^2 + n''^2 = \frac{a^4 b^2 + a^2 b^4}{a^4} = \frac{a^2 b^2 + b^4}{a^2} = \frac{b^2}{a^2} (a^2 + b^2),$$

quantité constante.

2° La somme des carrés des quatre rayons vecteurs est constante.

Soient r_1, r_2 les rayons vecteurs du point P', et r_3, r_4 ceux des points P''.

Nous avons, comme on peut s'en convaincre à l'inspection de la figure .

$$r_1^2 + r_2^2 = 2y'^2 + (x' - c)^2 + (x' + c)^2 = 2y'^2 + 2x'^2 + 2c^2,$$

$$r_3^2 + r_4^2 = 2y''^2 + (x'' - c)^2 + (x'' + c)^2 = 2y''^2 + 2x''^2 + 2c^2,$$

donc, en ajoutant,

$$r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2 = 2(y'^2 + y''^2 + x'^2 + x''^2) + 4c^2;$$

mais $y'^2 + y''^2 + x'^2 + x''^2 = a^2 + b^2$ comme on vient de le voir, donc

$$r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2 = 2a^2 + 2b^2 + 4c^2,$$

quantité constante. *

3° On a $(a - r_1)^2 + (a - r_3)^2 = c^2$. (r_1, r_3 rayons vecteurs conjugués).

Pour cela, je vais faire voir d'abord que

$$(a - r_1)^2 + (a - r_3)^2 = (a - r_2)^2 + (a - r_4)^2.$$

En effet, $r_2 = 2a - r_1$, $r_4 = 2a - r_3$, donc il suffit de faire voir pour démontrer l'égalité précédente, que l'on a :

$$(a - r_1)^2 + (a - r_3)^2 = (r_1 - a)^2 + (r_3 - a)^2,$$

égalité évidente, donc.....

Je dis maintenant que

$$(a - r_1)^2 + (a - r_2)^2 + (a - r_3)^2 + (a - r_4)^2 = 2c^2.$$

En effet,

$$(a - r_1)^2 + (a - r_2)^2 + (a - r_3)^2 + (a - r_4)^2 = 4a^2 - 2a(r_1 + r_2 + r_3 + r_4) + r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2;$$

mais $r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = 4a$,

$$r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2 = 2a^2 + 2b^2 + 4c^2,$$

donc

$$(a - r_1)^2 + (a - r_2)^2 + (a - r_3)^2 + (a - r_4)^2 = 4a^2 - 8a^2 + 2a^2 + 2b^2 + 4c^2 = 2c^2;$$

mais $(a - r_1)^2 + (a - r_3)^2 = (a - r_2)^2 + (a - r_4)^2$, donc.....