NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

TERQUEM

Relations d'identité et équations fondamentales relatives aux lignes du second degré

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 5 (1846), p. 618-629

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1846_1_5__618_0>

RELATIONS D'IDENTITÉ

et équations fondamentales relatives aux lignes du second degré. (*Voir* t. IV, p. 526.)

Problèmes sur les directrices; théorie générale des directrices et des foyers.

PROBLÈME LXIX. Étant données les équations d'une conique et d'une droite, à quels caractères peut-on reconnaître que la droite est une directrice ?

Solution. Soit :

$$\varphi(x,y) = Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0,$$

l'équation de la conique ; $dy + ex + f = 0$, celle de la droite $\gamma =$ angle des axes.

x' et y' étant les coordonnées du pôle de la droite, relativement à la conique

$$x'(k'd + ke + mf) = -nd + le + kf;$$
$$y'(k'd + ke + mf) = l'd - ne + k'f;$$

(V. t. II, p. 305) ; transportons l'origine au pôle, à cet effet, remplaçons dans l'équation de la conique x et y, respectivement par $x + x'$ et $y + y'$, il vient :

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + y[2Ay' + Bx' + D] +$$
$$+ x[2Cx' + By' + E] + \varphi(x',y') = 0;$$
$$(k'd + ke + mf)^2 \varphi(x',y') = A[l'd - ne + k'f]^2 +$$
$$+ B[l'd - ne + k'f][-nd + le + kf] + C[-nd + le + kf]^2 +$$
$$+ D[l'd - ne + k'f][k'd + ke + mf] +$$
$$+ E[-nd + le + kf][k'd + ke + mf] + F[k'd + ke + mf]^2;$$

ayant égard aux relations d'identité 1,2,3,4,5 données, t. IV, p. 425 et 426, on trouve :

$$(k'd+ke+mf)^2\varphi(x',y')=$$
$$=\mathrm{L}[l'd^2+le^2+mf^2-2nde+2k'df+2kef]=\mathrm{LV},$$

(t. IV, p. 108).

$$(k'd+kc+mf)^2\ [2\mathrm{A}y'+\mathrm{B}x'+\mathrm{D}]=$$
$$=(k'd+ke+mf)\ [2\mathrm{A}(l'd-ne+k'f)+\mathrm{B}(-nd+le+kf)+$$
$$+\mathrm{D}\,(k'd+ke+mf)]=2d\mathrm{L}\,[dk'+ke+mf]\ ;$$

ainsi l'équation de la conique devient :

$$(k'd+ke+mf)^2\ (\mathrm{A}y^2+\mathrm{B}xy+\mathrm{C}x^2)+$$
$$+24\,[dy+ex]\ [dk'+ke+mf]+\mathrm{LV}=0.$$

Si la droite est une directrice, la nouvelle origine est un foyer ; alors, d'après les deux relations connues (tome II, page 427), on trouve, après avoir divisé par le facteur $\mathrm{L}(k'd+ke+mf)^2$,

$$\mathrm{L}\,(d^2-e^2)=\mathrm{V}\,(\mathrm{A}-\mathrm{C})\,; \qquad (1)$$
$$2\mathrm{L}d\,(e-d\cos\gamma)=\mathrm{V}[\mathrm{B}-2\mathrm{A}\cos\gamma]\,; \qquad (2)$$

d'où

$$d^2(\mathrm{B}-2\,\mathrm{C}\cos\gamma)-2de\,(\mathrm{A}-\mathrm{C})+e^2\,(2\mathrm{A}\cos\gamma-\mathrm{B})=0\,; \quad (3)$$

il faut donc que les deux rapports $\frac{e}{d}$, $\frac{f}{d}$ satisfassent à deux quelconques des équations (1), (2), (3), pour que la droite donnée par l'équation $dy+ex+f=0$, soit une directrice, et *vice-versâ* ; ce qu'il fallait trouver.

PROBLÈME LXX. Étant donnée l'équation d'une conique, trouver celle d'une directrice.

Solution. Même notation que pour le problème précédent ; l'équation (3) détermine la direction des directrices ; elle est identique avec l'équation aux directions des axes principaux (v. t. I, p. 496) ; donc les directrices sont parallèles aux axes principaux; ces directions étant connues, l'équation (1) ou l'équation (2) détermine la position. Faisant $\frac{d}{e}=d'$; $\frac{f}{e}=f'$; d' est connue; les équations (1) et (2) deviennent :

$$\left.\begin{aligned} &m(\mathrm{A}-\mathrm{C})f'^2+2f'(\mathrm{A}-\mathrm{C})(k'd'+k)+\mathrm{L}(1-d'^2)+\\ &\qquad+(\mathrm{A}-\mathrm{C})[l'd'^2+l-2nd']=0; \end{aligned}\right\}\quad(4)$$

$$\left.\begin{aligned} &mf'^2(\mathrm{B}-2\mathrm{A}\cos\gamma)+2f'(\mathrm{B}-2\mathrm{A}\cos\gamma)(k'd'+k)+\\ &\quad+2\mathrm{L}d'(d'\cos\gamma-1)+\\ &\quad+(\mathrm{B}-2\mathrm{A}\cos\gamma)(l'd'^2+l-2nd')=0. \end{aligned}\right\}\quad(5)$$

Si $\mathrm{A}=\mathrm{C}$, l'équation (3) donne $d'^2=1$; l'équation (4) devient une identité, il faut alors recourir à l'équation (5); on sait que cette équation $\mathrm{A}=\mathrm{C}$ subsiste lorsque les axes coordonnés, ou les parallèles à ces axes coupent la conique en quatre points situés sur le même cercle. Si l'on a en même temps $\mathrm{B}=2\mathrm{A}\cos\gamma$, les deux racines de l'équation (5) deviennent infinies; ce qui doit être, puisque la conique devenant alors un cercle, les directrices sont à l'infini.

Si $m=0$, les deux équations (4) ou (5) ne donnent qu'une valeur pour f', ce qui est le cas de la parabole, qui a deux directrices *réelles*, dont l'une est située à l'infini, et deux directrices imaginaires, à directions réelles; si m n'est pas nul, d' ayant deux valeurs, on aura pour f' quatre valeurs, deux réelles et deux imaginaires. La discussion est analogue à celle qu'on a établie pour les foyers. (V. t. II, p. 430.)

Problème LXXI. Étant donnés trois points d'une conique et une directrice, trouver la conique?

1° *Solution analytique.* Même notation que dans le problème I; et pour simplifier, prenons $\gamma=\frac{1}{2}\pi$; et la directrice pour axe des y; alors $d=f=0$; e étant quelconque, faisons $e=1$.

L'équation (3) donne $\mathrm{B}=0$, alors l'équation (2) devient une identité, et l'équation (1) donne :

$L = l(C-A)$, ou $AE^2 + CD^2 - 4ACF = (C-A)(D^2-4AF)$;
et $D^2 + E^2 = 4AF$; l'équation de la conique prend donc la forme

$$4A^2y^2 + 4ACx^2 + 4ADy + 4AEx + D^2 + E^2 = 0. \quad (6)$$

Soient x', y'; x'', y''; x''', y'''; les coordonnées des trois points donnés, on aura pour déterminer les trois rapports $\frac{C}{A}$, $\frac{D}{A}$, $\frac{E}{A}$, les trois équations :

$$D^2 + E^2 + 4ADy' + 4AEx' + 4ACx'^2 = -4A^2y'^2; \quad (6)$$

et deux équations semblables en y'', x'', y''', x''', on en déduit :

$$D(y'-y'') + E(x'-x'') + C(x'^2-x''^2) = -A(y'^2-y''^2), \quad (7)$$
$$D(y'-y''') + E(x'-x'') + C(x'^2-x'''^2) = -A(y'^2-y'''^2), \quad (8)$$
$$D[x'y''' - y'x''' + x''y' - y''x' + x'''y'' - x''y'''] =$$
$$= C[x'(x''^2 - x'''^2) + x''(x'''^2 - x'^2) + x'''[x'^2 - x''^2]] +$$
$$+ A[x'(y''^2 - y'''^2) + x''[y'''^2 - y'^2] + x'''[y'^2 - y''^2];$$

où $D = \dfrac{CM + AN}{\rho}$; de là on déduit en changeant x en y, et *vice versâ*, et les signes, $E = \dfrac{CM' + AN'}{\rho}$; ou ρ est le double de l'aire du triangle, qui a pour sommets les trois points donnés; substituant les valeurs de D et E dans l'équation (6), il vient :

$$C^2(M^2 + M'^2) + 2AC[MN + M'N' + 2\rho(My' + Mx' + \rho x'^2)] +$$
$$+ A^2[N^2 + N'^2 + 4\rho(Ny' + N'x' + \rho y'^2)] = 0.$$

Le signe de C détermine les espèces des deux coniques, qui satisfont à la question; lorsque C est imaginaire, la question est impossible. Si $C = 0$, la conique devient une parabole; et d'ailleurs, on n'a besoin que de se donner deux points, si l'on veut que la conique soit une parabole. C étant nul dans l'équation (6), il ne reste que deux coefficients à déterminer.

Les coordonnées du centre sont $x = -\frac{E}{2C}$; $y = -\frac{D}{2A}$; et les coordonnées du foyer $x = -\frac{E}{2A}$; $y = -\frac{D}{2A}$; il faut se rappeler que le foyer est le pôle de l'axe des y. (V. t. II, p. 305.)

Les coordonnées du second foyer sont :

$$x = \frac{E(C - 2A)}{2AC}; \quad y = -\frac{D}{2A}.$$

2° *Solution géométrique.* Soient M, M', M''; les trois points donnés et MP, M'P', M''P'' les perpendiculaires sur la direction; on partage la droite MM' au point I en deux segments *additifs* proportionnels à MP et M'P'; et de même en I' en deux segments soustractifs; un de ces points est nécessairement sur la directrice; décrivant une circonférence sur II' comme diamètre, le foyer est évidemment sur cette circonférence; agissant de même par rapport à l'une quelconque de deux droites MM'', M'M'' on aura une seconde circonférence, qui coupe la première, généralement parlant, en deux mêmes points, dont chacun est le foyer d'une des deux coniques cherchées; F désignant ce foyer, le rapport $\frac{FM}{MP}$ indique l'espèce de la conique.

Conservant la même notation que ci-dessus, un calcul facile donne pour équation de la circonférence décrite sur le diamètre II',

$$(x'^2 - x''^2)(y^2 + x^2) + 2y(y'x''^2 - x'^2y'') - 2xx'x''(x' - x'') +$$
$$+ x'^2y''^2 - x''^2y'^2 = 0,$$

x et y étant les coordonnées du foyer, on remplace D et E par $-2Ay$ et $-2Ax$ dans les équations (6) et (7) et l'on élimine ensuite C.

La discussion ne présente aucune difficulté.

Observation. Les deux points d'intersection ne peuvent être les deux foyers d'une même conique; car, soient F et F′ ces deux points ; supposons qu'ils s'agisse d'une ellipse, on aurait donc $FM+F'M=FM'+F'M'$, et ensuite $\frac{FM}{FM'}=\frac{F'M}{F'M'}$; ce qui entraîne $FM=F'M'$ et $F'M=F'M$.

LXXII. Étant donnés deux points de la conique et une directrice trouver le lieu du centre ?

Solution. Soient x et y les coordonnées du centre ; on a $E=-2Cx$; $D=2Ay$; on substitue ces valeurs dans les équations (6) et (7), l'on élimine ensuite C, et l'on parvient à une équation du sixième degré ; $4y^2x^4$ est le seul terme de ce degré.

LXXIII. Étant donnés deux points, la directrice et une tangente, déterminer la conique.

Solution. Conservez la même notation et $dy+ex+f=0$ l'équation de la tangente ; on a donc l'équation $V=0$ (*V.* t. II, p. 108) ; et ensuite les deux équations (6) et (7) ; il y a ainsi trois équations, l'une du premier degré et deux du second degré entre les trois rapports $\frac{C}{A}$, $\frac{D}{A}$, $\frac{E}{A}$; ce qui conduit à une équation du quatrième degré, qui s'abaisse au second lorsque les deux points sont sur une droite perpendiculaire à la directrice ou lorsque la tangente fait avec cette directrice un angle droit ou nul.

LXXIV. Étant donnés un point, deux tangentes et la directrice, ou bien trois tangentes avec la directrice, déterminer la conique.

Solution. Les premières données mènent à une équation du quatrième degré et les secondes à une équation du huitième degré, dans le cas général ; mais, les degrés s'abaissent, lorsque les tangentes font avec la directrice des angles droits ou nuls.

Théorie générale des foyers et des directrices.

LXXV. Problème. Soient 1° m points fixes (foyers); 2° n droites fixes (directrices), situés dans le même plan; 3° une *relation donnée* entre les distances d'un point *variable* du même plan, aux points et droites fixes; trouver le lieu géométrique du point variable.

Solution. Axes *rectangulaires*; x_p, y_p coordonnées du point fixe de quantième p; $d_q y + e_q x + t_q = 0$ l'équation de la droite fixe de quantième q; p ayant toutes les valeurs entières de 1 à m inclus; et q les valeurs entières de 1 à n inclus; et soient x, y, les coordonnées du point *variable* M.

Désignant par δ_1, $\delta_2 \dots \delta_m$ les diverses distances aux foyers; par $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \dots \varepsilon_m$ les distances aux directrices et par $\varphi(\delta_1, \delta_m; \varepsilon_1 \dots \varepsilon_n) = 0$ la relation donnée.

Alors $[(x - x_p)^2 + (y - y_p)^2]^{\frac{1}{2}}$ est la distance de M au point (x_p, y_p); et $\dfrac{d_q y + e_q x + f_q}{\sqrt{d_q^2 + e_q^2}}$ est la distance du point M à la droite de quantième q; mettant ces valeurs dans la relation donnée entre les distances et faisant disparaître les radicaux, on a le lieu cherché du point variable.

Corollaire. S'il n'y a point de foyers et que la relation donnée soit une fonction entière de degré s; alors le lieu cherché, ayant égard au double signe de radical est un système de lignes de l'ordre s; au nombre de 2^n au plus.

Applications. Soient n directrices et point de foyers; et soit :

1° $a_1 \delta_1 + a_2 \delta_2 \dots\dots a_n \delta_n = b$ la relation donnée; $a_1, a_2 \dots\dots a_n$, b sont $n+1$ constantes, le lieu cherché est un système de 2^n droites; si b est nul, le système se réduit à 2^{n-1} droites.

2° $a_1\delta_1^2 + a_2\delta_2^2 \times \ldots\ldots a_n\delta_n^2 = b$ le lieu cherché est une conique.

3° $a_1\delta_1\delta_2 + a_2\delta_1\delta_3 + \ldots\ldots a_n\delta_{n-1}\delta_n = b$, la relation; le lieu cherché est un système de coniques, dont le nombre dépend du nombre des radicaux. Si $n = 4$ et si la relation est $a\delta_1\delta_3 + b\delta_2\delta_4 = c$; le lieu est en général un système de quatre coniques; si $c = 0$, il n'y a plus que deux coniques; ou une seule conique en conservant toujours le même signe; de plus la conique passe par les quatre points donnés par les intersections respectives des droites $\delta_1 = 0$, $\delta_2 = 0$; $\delta_1 = 0$, $\delta_4 = 0$; $\delta_3 = 0$, $\delta_2 = 0$; $\delta_3 = 0$, $\delta_4 = 0$; ou δ_1, représente la droite $d_1y + e_1x + f_1 = 0$ et ainsi des autres; donc toute conique circonscrite à un quadrilatère dont les côtés successifs sont représentés par $d_1y + e_1x + f_1 = 0 \ldots\ldots d_4y + e_4x + f_4 = 0 \ldots\ldots$ a pour équation :

$$a(d_1y + e_1x + f_1)(d_3y + e_3x + f_3) + b(d_2y + e_2x + f_2)(d_4y + e_4x + f_4) = 0,$$

et un cinquième point de la conique détermine le rapport $\frac{b}{a}$ (voir t. III, p. 575).

Si la conique à circonscrire est une parabole, on a, pour déterminer $\frac{b}{a}$, la relation

$$a^2[d_1e_3 - e_1d_3]^2 + 2ab\,[[d_3e_4 - e_3d_4]\,[d_2e_1 - e_2d_1] + \\ + [d_2e_3 - e_2d_3]\,[d_1e_4 - e_1d_4]] + b^2[d_2e_4 - e_2d_4]^2 = 0;$$

de là découle le théorème suivant.

LXXVI. Théorème. *Un quadrilatère étant inscrit dans une conique, le produit des distances d'un point quelconque de la conique à deux côtés opposés, divisé par le produit des distances aux deux autres côtés donne un quotient constant, et lorsqu'une telle relation existe, le lieu du point est une conique.*

LXXVII. Lorsque la conique devient un cercle. on a la double relation :

$$a(d_1 d_3 - e_1 e_3) - b(e_2 e_4 - d_2 d_4) = 0\,;$$
$$a(d_1 e_3 + e_1 d_3) + b(d_2 e_4 + e_2 d_4) = 0\,;$$

d'où

$$d_1 d_2 d_3 e_4 - d_1 d_2 d_4 e_3 + d_1 d_3 d_4 e_2 - d_2 d_3 d_4 e_1 - e_1 e_2 e_3 d_4 +$$
$$+ e_1 e_2 e_4 d_3 - e_1 e_3 e_4 d_2 + e_2 e_3 e_4 d_1 = 0\,;$$

relation entre les coefficients lorsque le quadrilatère est inscriptible, et que les axes sont rectangulaires et pour des axes quelconques, il faut ajouter au premier membre

$$2\cos\gamma\,[d_1 d_3 - e_1 e_3]\,[d_3 d_4 - e_3 e_4]\,;$$

γ est l'angle des axes.

LXXVIII. Nous avons supposé les axes rectangulaires; s'ils forment entre eux un angle γ la distance du point variable à une directrice sera de la forme :

$$\frac{(dy + ex + f)\sin\gamma}{\sqrt{a^2 + e^2 - 2de\cos\gamma}}\,;$$

on voit donc que la proposition précédente subsiste pour des axes quelconques; adoptant pour axes deux côtés consécutifs du quadrilatère, l'équation de la conique circonscrite sera de la forme :

$$ax(dy + ex + f) + by(d_1 y + e_1 x + f_1) = 0\,,$$

l'expression $(ad + be_1)^2 - 4abd_1e$ indique l'espèce de la conique; p étant le coefficient angulaire de la tangente, on a

$$p = -\frac{y(ad + be_1) + 2aex}{2bd_1 y + x(ad + be_1)}\,;$$

à l'origine p prend la forme $\frac{0}{0}$, dont on trouve la valeur en considérant qu'alors $\frac{y}{x} = -\frac{af}{bf_1}$; pour les trois autres sommets du quadrilatère l'expression ne présente aucune difficulté.

LXXIX. Les anciens se sont beaucoup occupés de la construction des coniques à l'aide de *directrices* et sans *foyers*. Pappus en parle en son livre VII sous le nom de *locum ad tres et quatuor lineas*, et fait à ce sujet une sortie contre Apollonius (Voir *Nouvelles Annales*, t. III, p. 481). Descartes a repris le même problème dans sa géométrie (*OEuvres*, t. V, p. 323, édit. Cousin), et Newton a tiré un grand parti du théorème énoncé (LXXVI), ainsi que nous le verrons en rapportant les solutions géométriques des problèmes sur les coniques, qu'on doit à l'illustre philosophe anglais.

LXXX. Supposons maintenant qu'il y a n foyers et sans directrices avec la relation algébrique donnée $\varphi(\varepsilon_1, \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n)=0$; le degré de l'équation dépend de la manière dont les expressions *radicales* ε_1, $\varepsilon_2 \ldots$ sont combinées entre elles, combinaisons qui se réduisent à moitié lorsque la quantité toute connue est nulle.

Applications. 1° Soit la relation

$$a_1\varepsilon_1^2 + a_2\varepsilon_2^2 + \ldots + a_n\varepsilon_n^2 + b = 0,$$

le lieu est un cercle ayant pour équation :

$$(y^2 + x^2)\,\Sigma a_p - 2\,[y\,\Sigma a_p y_p + x\Sigma a_p x_p] +$$
$$+ \Sigma a_p\,[y^2_p + x^2_p] + b = 0\,;$$

Σ désignant une somme relative aux valeurs de p depuis 1 à n inclus (LXXV). Les coordonnées du centre sont

$$\frac{\Sigma a_p y_p}{\Sigma a_p}, \quad \frac{\Sigma a_p x_p}{\Sigma a_p},$$

ainsi le centre est le centre de gravité des n foyers, considérés comme des molécules telles que celle qui a pour coordonnées x_p, y_p, a pour masse a_p ; et il est facile de prouver que pour ce point la fonction $a_1\varepsilon_1^2 + a_2\varepsilon_2^2 + \ldots a_n\varepsilon_n^2$ est un minimum. Si les coefficients deviennent tous egaux entre eux, le centre du cercle est le centre de moyenne distance des foyers. Ce lieu géométrique est déjà dans Pappus.

2° Relation : $a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 \ldots\ldots + a_n\varepsilon_n + b = 0$.

Faisant disparaître les radicaux, l'équation est généralement du degré 2^n; soit $n = 2$, il vient :

$$(a_1^2\varepsilon_1^2 - a_2^2\varepsilon_2^2)^2 - 2b[a_1^2\varepsilon_1^2 + a_2^2\varepsilon_2^2] + b^4 = 0,$$

équation du quatrième degré, qui se réduit au second lorsque $a_1 = a_2$; et on rentre dans la discussion ordinaire des trois coniques définies par les propriétés focales, et par lesquelles ces courbes devraient *raisonnablement* et *utilement* faire partie de l'enseignement géométrique rudimentaire, et par conséquent n'en feront pas partie de longtemps.

LXXXI. Soit $\varphi(\varepsilon_1, \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n) = 0$ la relation focale. Prenant la dérivée par rapport à x, on a :

$$\frac{d\varphi}{dx} = \Sigma_1^n \frac{d\varphi}{d\varepsilon_p}\left[\frac{x - x_p}{\varepsilon_p} + \frac{y - y_p}{\varepsilon_p}\frac{dy}{dx}\right] = 0.$$

Faisons :

$$\frac{x - x_p}{\varepsilon_p} = \cos\alpha_p; \quad \frac{y - y_p}{\varepsilon_p} = \sin\alpha_p;$$

il vient :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\Sigma_1^n \frac{d\varphi}{d\varepsilon_p}\cos\alpha_p}{\Sigma_1^n \frac{d\varphi}{d\varepsilon_p}\sin\alpha_p} = \operatorname{tang}\beta.$$

Considérons $\frac{d\varphi}{d\varepsilon_p}$ comme une force appliquée au point (x_p, y_p) et dirigée vers l'origine, on aura un système de n forces convergeant vers l'origine; soit R la résultante et α l'angle qu'elle forme avec l'axe des x; donc :

$$R\cos\alpha = \Sigma_1^n \frac{d\varphi}{d\varepsilon_p}\cos\alpha_p; \quad R\sin\alpha = \Sigma_1^n \frac{d\varphi}{d\varepsilon_p}\sin\alpha_p;$$

d'où tang $\alpha = -$ tang β ; ainsi la résultante R est perpendiculaire à la tangente à la courbe, passant par le point x_p, y_p, ou autrement, la résultante R est normale à la courbe. C'est la méthode de Roberval pour mener une tangente à une courbe donnée par une relation focale. « Cette méthode présente, quant au principe métaphysique, une analogie remarquable avec celle des fluxions, que Newton créa longtemps après (*Hist. de la Géométrie*, p. 59). » Comme on vient de voir, c'est en tout point celle des fluxions, moins la notation. Voici comment Roberval énonce sa règle : « Par les propriétés spécifiques de la ligne courbe (qui vous seront données), examinez les divers mouvements qu'a le point qui la décrit à l'endroit où vous voulez mener la touchante : de tous ces mouvements composés en un seul, tirez la ligne de direction du mouvement composé, vous aurez la touchante de la ligne courbe. » Newton dit : « Methodum quærebam determinandi quantitates ex velocitatibus motuum vel incrementorum quibus generantur (*De quad. curv. Introd.*). »