NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

TERQUEM

Considérations élémentaires sur les nombres ; suite naturelle des nombres impairs ; crible pour les nombres premiers ; table relative au nombre des nombres premiers

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 5 (1846), p. 607-611

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1846_1_5__607_1>

CONSIDÉRATIONS ÉLÉMENTAIRES

Sur les nombres; suite naturelle des nombres impairs; crible pour les nombres premiers; table relative au nombre des nombres premiers.

—

1. *Toute quantité est la différence de deux carrés*, car l'on a identiquement :

$$p=\left(\frac{p+1}{2}\right)^2-\left(\frac{p-1}{2}\right)^2.$$

2. *Tout nombre impair* est la différence *de deux carrés entiers*, car on a l'identité :

$$2p+1=(p+1)^2-p^2.$$

3. *Tout nombre pairement pair est la différence de deux carrés entiers*, à cause de l'identité :

$$4p=(p+1)^2-(p-1)^2.$$

4. *Un nombre simplement pair ne peut être la différence de deux carrés entiers*; car ces deux carrés sont nécessairement ou tous deux pairs ou tous deux impairs; dès lors leur différence est divisible par 4.

5. *Une puissance entière quelconque d'un nombre entier est la différence de deux carrés*, car une telle puissance est pairement paire ou impaire.

Observation. Cette proposition *élémentaire*, consignée par M. Rallier des Ourmes dans l'article IMPAIR du *Dictionnaire des Mathématiques de l'encyclopédie méthodique* semblait avoir échappé à l'attention des arithmologues'; son existence a été récemment signalée à l'Académie des sciences (*Comptes rendus*, 1846, 2me semestre, p. 151).

6. *La différence de deux carrés entiers est un nombre premier, lorsque la somme des racines est un nombre premier et que leur différence est égale à l'unité; et lorsque la différence de deux carrés entiers est un nombre premier, cette différence est nécessairement égale à la somme des racines.*

Remarque. M. Lescure a proposé d'employer la table des *carrés* des nombres naturels, pour opérer des multiplications; cet emploi est fondé sur l'identité

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = ab.$$

(*Comptes rendus de l'Académie*, 1835, 2me semestre, p. 151.)

7. *La somme des* n *premiers termes de la suite naturelle des nombres impairs est égale à* n^2.

Observation. Cette proposition, déjà énoncée dans le *Lilavati* (chap. V, sect. 1), se démontre intuitivement en rangeant des points en carrés.

8. *Tout nombre pairement pair est égal à la somme d'une suite de nombres impairs consécutifs, en nombre pair*; c'est une conséquence de (3) et de (7).

9. *Tout nombre impair, non premier, est égal à la somme d'une suite de nombres impairs consécutifs, en nombre impair*; conséquence de (2) et de (7).

10. *La puissance entière d'un nombre entier est toujours égale à la somme d'une suite de nombres impairs consécutifs*; conséquence de (5).

11. *Un nombre simplement pair ne peut être égal à la*

somme d'une suite de nombres impairs consécutifs; car ce nombre serait la différence de deux carrés, ce qui est impossible (4).

12. *Un nombre premier ne peut être égal à la somme d'une suite de nombres impairs consécutifs*; conséquence de (6).

13. *Dans la suite naturelle des nombres impairs, faisant la somme de* n *termes en partant du premier*; *la même somme en partant du second; puis en partant du troisième, etc.; on forme une progression arithmétique dont la raison est* 2n.

Soit x un terme quelconque de la suite; le n^{me} terme à partir de x est $x+2n-2$ et la somme de ces n termes est $nx+n^2-n$; si l'on part du terme suivant $x+2$, cette somme devient $nx+n^2-n+2n$; donc, etc.

14. *Problème.* Trouver tous les nombres premiers compris entre 1 et n^2;

Solution. Formez successivement les progressions arithmétiques suivantes :

$$9,\ 15,\ 21,\ 27\ldots.$$
$$25,\ 35,\ 45,\ 55\ldots.$$
$$49,\ 63,\ 77,\ 91\ldots.$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$q^2,\ q^2+2q,\ q^2+4q,\ q^2+6q\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(n-1)^2,\ n^2-1.$$

En poussant chaque progression jusqu'au terme le plus approché de n^2.

Les nombres impairs non renfermés dans ces suites sont les nombres premiers cherchés.

Observation. Ce crible ne diffère pas essentiellement de celui d'Erathosthène, d'une si admirable simplicité; mais il se présente sous une forme un peu abrégée, puisqu'on n'a pas besoin d'écrire les nombres pairs.

15. Euler a démontré pour les nombres premiers de la forme $4n+1$; 1° n est la somme de deux nombres triangulaires. 2° Ces nombres premiers sont la somme de deux carrés entiers et d'une seule manière seulement. 3° Si un nombre de la forme $4n+1$ n'est la somme de deux carrés que d'une seule manière, il est nombre premier. 4° Tout nombre qui peut être la somme de deux carrés de plusieurs manières, n'est pas un nombre premier. (M. de Pet. 1760-1761.) Il semblerait d'après ces restrictions, qu'il y a moins de nombres premiers de la forme $4n+1$ que de la forme $4n-1$; on verra ci-dessous qu'il n'en est pas ainsi. Euler s'est servi de ces propriétés comme critérium de nombre premier, lorsqu'il s'agit de très-grands nombres.

16. *La somme des cubes des nombres naturels est le carré du nombre triangulaire marqué par le nombre des termes. Observation* ; cette proposition se trouve aussi dans le *Lilavati* au chapitre ci-dessus cité.

17. *En prenant dans la suite des nombres impairs, une suite de termes dont le premier soit le double d'un nombre triangulaire plus un et dont le dernier soit le double du nombre triangulaire consécutif moins un, la somme de cette suite est un cube*; conséquence de (7, 8, 16).

Cette observation élémentaire a été l'objet d'une communication à l'Académie (*Comptes rendus*, 1846, 2ème semestre, p. 501).

18. Nous donnons ici d'après M. Scherk, professeur à Halle, le nombre des nombres premiers des deux formes $4n\pm1$ renfermés entre 1 et 1000 ; 1 et 2000 ; 1 et 3000, etc. (*Crelle*, t. X, p. 208, 1833).

	$4n+1$	$4n-1$		$4n+1$	$4n-1$		$4n+1$	$4n-1$
1,000	81	87	18,000	1,023	1,041	35,000	1,865	1,867
2,000	148	155	19,000	1,074	1,084	36,000	1,908	1,916
3,000	212	218	20,000	1,131	1,131	37,000	1,958	1,964
4,000	269	281	21,000	1,178	1,182	38,000	2,007	2,010
5,000	331	338	22,000	1,229	1,235	39,000	2,054	2,053
6,000	385	398	23,000	1,278	1,286	40,000	2,096	2,107
7,000	444	456	24,000	1,332	1,336	41,000	2,138	2,153
8,000	501	506	25,000	1,377	1,385	42,000	2,190	2,202
9,000	556	561	26,000	1,428	1,432	43,000	2,244	2,250
10,000	611	618	27,000	1,484	1,477	44,000	2,288	2,291
11,000	661	674	28,000	1,527	1,528	45,000	2,335	2,340
12,000	710	728	29,000	1,574	1,579	46,000	2,384	2,377
13,000	769	778	30,000	1,618	1,627	47,000	2,326	2,325
14,000	821	831	31,000	1,670	1,670	48,000	2,476	2,470
15,000	869	835	32,000	1,714	1,718	49,000	2,520	2,515
16,000	923	939	33,000	1,769	1,769	50,000	2,566	2,567
17,000	972	988	34,000	1,822	1,816			

On voit qu'il y a à peu près autant de nombres premiers d'une forme que d'une autre au moins, dans cet intervalle.