Nouvelles annales de mathématiques

Breton de Champ

Des systèmes simultanés de description de l'ellipse par le point d'une droite de longueur constante inscrite dans un angle fixe

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 5 (1846), p. 591-599

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1846_1_5__591_1>

DES SYSTÈMES SIMULTANÉS

de description de l'ellipse par le point d'une droite de longueur constante inscrite dans un angle fixe,

PAR M. BRETON (DE CHAMP),
Ingenieur des ponts et chaussées.

Dans une note publiée en 1844 (*), j'ai eu l'occasion de

(*) *Nouvelles Annales des Mathématiques*, t. III, p. 292.

faire remarquer que certaines propriétés de l'ellipse dépendent de ce que cette courbe est une épicycloïde *allongée* ou *raccourcie* décrite par le point du plan d'un cercle roulant intérieurement sur une circonférence d'un diamètre double du sien. En se plaçant à ce point de vue, on est conduit à des théorèmes intéressants ; telle est la construction du rayon de courbure de l'ellipse donnée par M. Transon (*). Je me propose actuellement d'y montrer quelques-unes des relations par lesquelles les axes principaux de l'ellipse et ses diamètres conjugués sont liés aux divers systèmes de génération de cette courbe, au moyen du point d'une droite de longueur constante inscrite dans un angle fixe, *qui ont la propriété de décrire simultanément l'ellipse par un même point mobile.*

1. Je rappellerai d'abord que si MN est une droite de longueur constante continuellement inscrite dans l'angle droit YOX, le point i de cette droite décrit une ellipse ayant pour axes les côtés de cet angle, et que les segments iN, iM *additifs* ou *soustractifs* (**) sont égaux en longueur aux demi-axes OA, OB comptés suivant OX, OY (le lecteur est prié de faire les figures).

Supposons, pour fixer les idées, que l'on ait un système additif; pour avoir le système correspondant, décrivez du point O, comme centre avec le rayon OA, une circonférence, et soit I celui de ses points qui se trouve avec i sur une même perpendiculaire IP à OX. Menez ensuite parallèlement au rayon OI la droite iM'N', qui rencontre OX en M' et OY en N'; il est aisé de voir que iM', iN', et par suite M'N', sont des longueurs constantes, quelle que soit la position du point décrivant. Car, à cause des parallèles, $i\mathrm{N}' = \mathrm{OI}$, par conséquent le triangle iNN' est isocèle, d'où il suit que iMM' l'est

(*) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, t. III, p. 595, et *Journal de M. Liouville*, t. X, p. 151.

(**) Ces dénominations sont dues à M. Terquem. V. *Manuel de Géométrie.*

aussi ; donc $iM' = iM$. On voit par là que le point i peut être regardé à volonté comme placé sur MN ou sur le prolongement de M'N', de manière à déterminer dans le premier cas des segments *additifs*, et dans le second, des segments *soustractifs*. C'est en cela que consiste le type le plus simple de deux systèmes *simultanés* de description de l'ellipse ; je les désignerai, comme les segments eux-mêmes, par les noms d'*additif* et de *soustractif*.

Observation. Rien n'empêche de faire la recherche du second système au moyen de la circonférence décrite du centre O avec le rayon OB ; on n'obtient de cette manière aucun nouveau résultat, ainsi qu'il est facile de s'en convaincre.

2. Lorsqu'on prend, au lieu de l'angle droit YOX, un angle quelconque, il y a non plus *deux*, mais *quatre* systèmes simultanés, ayant, comme les précédents, des segments de même longueur ; ce qui suit a pour objet leur détermination et l'exposition de leurs propriétés les plus saillantes.

Pour bien comprendre l'existence et la raison d'être de ces systèmes, il faut remonter à la génération des épicycloïdes. Lorsqu'une courbe roule sur une autre courbe, chaque point attaché invariablement à la première et entraîné avec elle décrit une trajectoire normale à la droite qui le joint au point de contact, principe que l'on doit à Descartes. Dans le cas particulier d'un cercle qui roule intérieurement sur une circonférence d'un rayon double du sien, la tangente à la trajectoire du point de la circonférence mobile passe donc constamment par le centre du cercle fixe, d'où il suit évidemment que cette trajectoire est un de ses diamètres ; cette proposition est d'ailleurs facile à démontrer d'une manière tout à fait élémentaire.

Concevons présentement que par le centre O du cercle fixe on ait mené deux droites OX, OY, et que dans une de ses positions la circonférence mobile les coupe en M et N, si l'on regarde la corde MN comme attachée invariablement à cette circonférence, ses extrémités, d'après ce qui vient d'être dit, demeureront respectivement sur les côtés de l'angle YOX, et si ce dernier est droit, tout point i de MN décrira une ellipse.

Quand au lieu de l'angle droit on a un angle yOx aigu ou obtus, et une corde mn, la conclusion est la même; seulement les côtés Ox, Oy ne sont plus les axes de la courbe. Pour les trouver, il faut mener par le point décrivant i le diamètre MN du cercle mobile, et tirer les droites indéfinies OMX, OMY, lesquelles seront visiblement les axes cherchés, l'angle YOX étant droit par construction. Tout point i attaché invariablement au plan du cercle qui roule décrit donc une ellipse, et on peut le regarder comme lié à une corde quelconque, continuellement inscrite dans un angle fixe. De là une infinité de systèmes, *additifs* ou *soustractifs*, suivant que le point i est intérieur ou extérieur au cercle mobile. Il n'est même pas nécessaire que ce point soit sur la corde mn ou sur son prolongement; le sommet d'un triangle quelconque imn construit sur mn décrit une ellipse comme tout point de cette corde (*).

Si l'on appelle a, b les demi-axes, α, β, les segments, et φ, l'angle du système, on a évidemment les relations $\alpha\beta = ab$, et $\sin\varphi = \frac{\alpha \pm \beta}{a \pm b}$, selon que le système est *additif* ou *soustractif*.

3. Je vais chercher maintenant parmi tous ces systèmes ceux où les segments, soit *additifs*, soit *soustractifs*, comptés sur une corde ou sur son prolongement, entre le point i et les côtés d'un angle fixe, sont de même longueur, comme

(*) Voir *Nouvelles Annales de Mathématiques*, t. V, p. 191, la solution analytique de M. Terquem.

il arrive dans le cas d'un angle droit. Supposons un système *additif*, composé de la corde mn inscrite dans l'angle yOx. Après avoir tracé la circonférence Omn et déterminé les points M, N, où elle est rencontrée par les axes OX, OY, je prends les arcs $Mm_1 = Mm$, $Nn_1 = Nn$; de cette manière, on a la corde $m_1n_1 = mn$, et elle passe visiblement en i. Cette corde et l'angle y_1Ox_1, dont les côtés passent en m_1, n_1, forment donc un deuxième système *additif* qui satisfait à la condition d'avoir des segments égaux en longueur à ceux du système donné. Il y a plus : que l'on décrive du centre i avec l'un des segments im par exemple comme rayon, une circonférence qui coupe Ox, Ox_1 en m', m_1', on verra avec un peu d'attention que les droites im', im_1' rencontrent Oy_1, Oy' en des points n_1', n', situés sur la circonférence décrite du même centre i avec le second segment in, d'où il suit que le quadrilatère $m'm_1'n'n_1'$ est un trapèze isocèle, et par conséquent *inscriptible.* La circonférence déterminée par ses sommets passe nécessairement aussi par le point O, car on aperçoit sans peine que les angles $m'On'$, $m'm_1'n'$ du quadrilatère $On'm_1'm'$, qui a trois sommets de communs avec $m'm_1'n'n_1'$, sont supplémentaires l'un de l'autre · cela résulte simplement des constructions indiquées.

Si donc on imagine que cette circonférence roule à l'intérieur d'un cercle de rayon double, les cordes $m'n_1'$, $m_1'n'$, que le point i partage en deux segments *soustractifs* égaux à im, in, demeureront inscrites dans les angles y_1Ox, yOx_1; en d'autres termes, on a deux nouveaux systèmes, nécessairement *soustractifs*, et il est facile de s'assurer qu'il n'y en a aucun autre où les segments soient de même longueur.

4. De ce que l'on a pris $Mm_1 = Mm$, $Nn_1 = Nn$, je conclus que l'axe OX est la bissectrice des angles xOx_1, yOy_1, et l'axe OY la bissectrice de leurs suppléments.

Une semblable relation existe entre les axes et les droites qui vont du centre O de la courbe ou des circonférences fixes aux centres des cercles mobiles; il suffit, pour le voir, de construire les deux systèmes *additif* et *soustractif*, relatifs aux axes, comme au n° 1.

Ceci compris, je nommerai *correspondants* parmi les systèmes qui viennent d'être définis par l'égalité des segments, *ceux dont les angles ont un côté commun*. Ils sont nécessairement d'espèce différente, c'est-à-dire que l'un est additif et l'autre soustractif. L'angle formé par les deux côtés non communs et son supplément ont pour bissectrices les axes de l'ellipse.

5. Lorsque la corde mobile mn du système additif prend la position GH perpendiculaire à l'un des côtés Ox de l'angle fixe, de manière que le triangle GOH soit rectangle en H, celle du système *soustractif correspondant* relatif à Ox devient aussi perpendiculaire sur Ox en H, c'est-à-dire que les deux cordes coïncident alors en direction.

Dans ce cas, OG est un diamètre du cercle roulant, et le point G est le *centre instantané de rotation* (*); donc GH n'est autre chose que la normale à l'ellipse menée par le point décrivant i, d'où je conclus que la droite Oi est, en direction, le *diamètre conjugué* au côté Ox.

Cela se démontre d'ailleurs directement : supposez que la corde GH prenne les positions LP, LQ, qui ont en commun le point L de OG; du point K' où Oi coupe la perpendiculaire LK, abaissée de L sur Ox; menez à cette droite une parallèle qui rencontre LP, LQ en p, q, je dis que ces deux points sont sur l'ellipse, car on a :

$$Pp:LP::KK':LK, \quad \text{et } KK':LK::Hi:GH\,;$$

donc :

$$Pp:LH::Hi:GH.$$

(*) Voir *Nouvelles Annales de Mathématiques*, t. II, p. 281.

Or, LP = GH par construction ; donc $Pp = Hi$. Par un raisonnement semblable, on trouverait $Qq = Hi$; donc p et q sont bien les positions qu'occupe le point i sur LP, LQ. Remarquez maintenant que le triangle LPQ étant isocèle par construction, sa base PQ est partagée en deux parties égales par la perpendiculaire LK ; par conséquent, la même chose a lieu dans le triangle Lpq, et l'on a $K'p = K'q$, c'est-à-dire que la corde pq parallèle à Ox est divisée en deux parties égales par Oi, C. Q. F. D.

6. On peut même démontrer, sans sortir de cet ordre de considérations, que si Oi divise en deux parties égales toute corde menée dans l'ellipse parallèlement à Ox, réciproquement Ox divise en deux parties égales toute corde parallèle à Oi ; propriété fondamentale des diamètres conjugués, bien connue d'ailleurs par la théorie des sections coniques.

Suivez en effet la droite mobile, à partir de la position GH, jusqu'à ce qu'elle vienne se coucher sur Ox. A ce moment, G tombe en O, i en i', et H en H'. Pour savoir quelle est la position correspondante du cercle roulant, il suffit de remarquer que les extrémités de la droite mobile sont constamment les pieds des perpendiculaires abaissées de l'extrémité du diamètre qui passe en O sur les côtés de l'angle fixe. Donc en élevant sur les droites Ox, Oy des perpendiculaires aux points H', O, leur point d'intersection G' sera le point cherché, et $G'i'$ la normale à l'ellipse en i'. Or, il résulte de cette construction que $G'i'$ est perpendiculaire à Oi : donc la tangente en i' est parallèle à Oi.

Enfin le point H'', où la normale $G'i'$ rencontre Oi, étant sur la circonférence décrite par le diamètre OG', on peut regarder l'ellipse comme engendrée par le point i' de la droite G'H'', inscrite continuellement sans changer de longueur dans l'angle G'OH'' considéré comme fixe, auquel cas la démonstration du numéro qui précède s'applique mot pour mot.

7. La position particulière où la droite mobile est perpendiculaire à l'un des côtés de l'angle fixe, mérite encore d'être remarquée en ce qu'elle fournit une démonstration fort simple de la construction donnée par M. Chasles (*), pour déterminer, tant en direction qu'en grandeur, les axes d'une ellipse dont on connaît deux diamètres conjugués. Il ne s'agit, au fond, que de trouver un système de génération de l'ellipse composé d'une droite mobile dans un angle fixe. Or, d'après ce qui a été dit plus haut, si de l'extrémité du demi-diamètre Oi l'on abaisse une perpendiculaire iH sur Oi', et que l'on porte sur cette ligne, de part et d'autre du point i, $iG = ig = Oi'$, la droite GH et l'angle GOH formeront un système *additif* propre à la description de l'ellipse ; et comme d'autre part la droite gH et l'angle gOH formeront le système *soustractif* correspondant, on aura pour les directions cherchées des axes les bissectrices de l'angle GOg et de son supplément. De plus, l'angle en H des triangles GHO, gHO étant droit, les longueurs OG, Og seront les diamètres des cercles roulants de l'un et de l'autre système, d'où il suit que la première sera égale à la somme, et la seconde à la différence des demi-axes.

8. On pourrait faire beaucoup d'autres applications des propriétés qui appartiennent aux *systèmes simultanés* ; mais pour éviter d'être trop long, je me bornerai à signaler dans la construction précécente les moyens qu'elle offre de démontrer *à la fois*, et le plus brièvement possible, les deux relations fameuses qui existent entre les axes principaux et les diamètres conjugués.

1° On a vu que M, N, étant les extrémités du diamètre déterminé par le point décrivant i dans le cercle roulant du

---

(*) Voir *Nouvelles Annales de Mathématiques*, t. III, p. 349, la vérification analytique par M. Terquem.

système *additif* décrit sur OG, iN, iM, sont les longueurs des demi-axes. Or, par les propriétés des cordes qui se coupent dans le cercle, on a $iN \times iM = iG \times iH = Oi' \times iH$, mais Oi' est la base, et iH la hauteur du parallélogramme $OiDi'$ construit sur les deux demi-diamètres conjugués, et $Oi' \times iH$ en mesure la surface : donc *cette surface est constante et égale au rectangle des demi-axes.*

2° Oi étant, par construction, une *médiane* du triangle GOg, on a la relation :

$$\overline{OG}^2 + \overline{Og}^2 = 2(\overline{Oi}^2 + \overline{Gi}^2) = 2(\overline{Oi}^2 + \overline{Oi'}^2)\,;$$

mais

$$OG = iN + iM \text{ et } Og = iN - iM\,;$$

donc

$$\overline{OG}^2 + \overline{Og}^2 = 2(\overline{iN}^2 + \overline{iM}^2)\,;$$

donc aussi

$$\overline{Oi}^2 + \overline{Oi'}^2 = \overline{iM}^2 + \overline{iN}^2,$$

c'est-à-dire que *la somme des carrés de deux demi-diamètres conjugués est constante et égale à la somme des carrés des demi-axes.*

Nota. Ce n'est que pour fixer les idées qu'on s'est servi, pour cette démonstration, uniquement du système *additif*; rien n'empêche d'y substituer le système soustractif, et en général toutes les fois que l'on n'a besoin d'en considérer qu'un seul, on peut prendre l'un ou l'autre indifféremment.