Nouvelles annales de mathématiques

Aynard

Sur l'enveloppe des perpendiculaires aux extrémités des diamètres des ellipses

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 5 (1846), p. 540-547

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1846_1_5__540_0>

SUR L'ENVELOPPE

des perpendiculaires aux extrémités des diamètres des ellipses
(*Voir* p. 365).

PAR M. AYNARD,
Professeur de mathématiques.

Parmi les courbes nombreuses que l'on peut déduire de l'ellipse par des constructions fort simples, il en est quelques-unes qui méritent une étude spéciale, soit pour les propriétés curieuses dont elles jouissent intrinsèquement, soit pour leur utilité pratique dans la solution de quelques questions importantes. Cette remarque s'applique également bien à toute autre courbe, pourvu qu'elle soit suffisamment connue ; et quoique la multiplicité des lieux géométriques que l'on peut tirer d'une même courbe primitive soit indéfinie, une critique judicieuse parvient facilement à discerner ceux qui peuvent être l'objet d'un travail utile.

Si l'on considère une ellipse, et que par tous les points de cette courbe l'on mène des perpendiculaires sur les diamètres correspondants, les intersections successives de ces perpendiculaires déterminent un lieu géométrique qui mérite d'être étudié. Les arcs de la courbe en question jouissent de la propriété remarquable de pouvoir représenter des fonctions elliptiques de première espèce, à module quelconque. Ce résultat, publié par Legendre dans son *Traité des fonctions elliptiques*, était connu antérieurement, et M. Talbot, membre de la Société philosophique de Cambridge, l'avait indiqué dès 1821 dans les anciennes *Annales de Mathématiques* de M. Gergonne, t. XIV, p. 380-381. L'étude des diverses formes dont cette courbe est susceptible est de nature à mériter quelque attention.

Soit $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

l'équation de l'ellipse. Si l'on observe qu'en vertu de la relation connue $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$, l'équation étant vérifiée d'elle-même, lorsqu'on remplace x par $a\cos\varphi$ et y par $b\sin\varphi$, on pourra dire que

$$x = a\cos\varphi, \qquad y = b\sin\varphi$$

sont les coordonnées d'un point quelconque M′ de l'ellipse (*fig.* 50). L'équation de la perpendiculaire M′N menée sur le rayon OM′ sera par conséquent :

$$y - b\sin\varphi = -\frac{a\cos\varphi}{b\sin\varphi}(x - a\cos\varphi),$$

ou, sous une forme plus symétrique,

$$by\sin\varphi + ax\cos\varphi - b^2\sin^2\varphi - a^2\cos^2\varphi = 0. \qquad (1)$$

D'après la théorie connue des enveloppées (*), la seconde équation du problème s'obtiendra en formant la dérivée de la première par rapport à φ. Ce sera donc :

$$by\cos\varphi - ax\sin\varphi - 2b^2\cos\varphi\sin\varphi + 2a^2\sin\varphi\cos\varphi = 0. \qquad (2)$$

L'élimination de l'angle φ qui figure dans les équations (1) et (2) comme paramètre variable, conduirait à l'équation du lieu. Mais comme cette opération serait laborieuse, et que l'équation finale en x et y serait du sixième degré (p. 367),

---

(*) Si l'on veut éviter cette considération et l'emploi du calcul différentiel, on changera φ en $\varphi + h$ dans l'équation (1), on retranchera l'équation (1) du résultat, et l'on passera à la limite après avoir préalablement divisé par h. C'est là un artifice que l'usage des coordonnées polaires rend très-familier, et qui est à l'abri de toute objection logique.

et par conséquent peu commode à discuter, il sera plus simple de dégager les valeurs des deux coordonnées en fonction de l'indéterminée auxiliaire φ prise pour variable indépendante. Appliquons donc aux équations dont il s'agit la méthode des multiplicateurs, et ajoutons à cet effet le produit de l'équation (1) par *sin* φ à l'équation (2) préalablement multipliée par *cos* φ ; il vient ·

$$by = b^2\sin^3\varphi + a^2\cos^2\varphi\sin\varphi + 2b^2\sin\varphi\cos^2\varphi - 2a^2\cos^2\varphi\sin\varphi$$

ou, toute réduction faite, en posant comme on le fait souvent $c = \sqrt{a^2 - b^2}$,

$$y = \frac{c^2\sin^3\varphi + (2b^2 - a^2)\sin\varphi}{b}. \qquad (\alpha)$$

Pour dégager x on multipliera l'équation (1) par $\cos\varphi$ et la seconde par $-\sin\varphi$, en sorte qu'il vient en ajoutant :

$$ax = b^2\sin^2\varphi\cos\varphi + a^2\cos^3\varphi - 2b^2\sin^2\varphi\cos\varphi + 2a^2\sin^2\varphi\cos\varphi,$$

d'où enfin,

$$x = \frac{-c^2\cos^3\varphi + (2a^2 - b^2)\cos\varphi}{a}, \qquad (\beta)$$

formule que des motifs de symétrie eussent suffisamment indiquée (*).

Il sera facile, à l'aide des expressions (α) et (β), de discuter la courbe en suivant les variations de l'abscisse et de l'ordonnée qui répondent aux divers états de grandeur que l'on peut assigner à l'angle φ. La valeur de y est nulle pour $\varphi = 0$,

(*) Les formules que Legendre considère sont les suivantes :

$$x = \frac{\sin\varphi}{b^2}(1 - 2c^2 + c^2\sin^2\varphi); \qquad y = \frac{\cos\varphi}{b}(1 + c^2\sin^2\varphi).$$

On voit qu'elles rentrent dans les expressions des coordonnées du problème actuel. Le demi-grand axe est dirigé sur l'axe des y, et a pour valeur $\frac{1}{b}$, tandis que le demi-petit axe compté sur l'axe des abscisses est égal à l'unité. (*Traité des fonctions elliptiques*, ch. VII.)

et en même temps l'on a $x = a$, en sorte que la courbe passe par l'extrémité du grand axe de l'ellipse sur laquelles les constructions s'opèrent. On pouvait prévoir cette conclusion, puisque la rencontre de la tangente au sommet avec la perpendiculaire menée sur un rayon fort rapproché de OA (*fig.* 50) doit nécessairement déterminer un point du lieu très-voisin du sommet ; l'équation, par une raison de continuité, devra donc fournir le sommet lui-même.

On ne peut, lorsque l'on assigne à l'angle φ des valeurs croissantes comprises entre zéro et $\frac{\pi}{2}$, préciser le sens dans lequel varient les expressions des deux coordonnées, qu'en tant que l'on spécifiera le signe de la quantité $(2b^2 - a^2)$, coefficient de $\sin\varphi$ dans la valeur de l'ordonnée. Cette distinction nécessaire donnera évidemment lieu à trois hypothèses différentes, suivant que l'on aura $2b^2 - a^2 \gtreqless 0$. Écartons d'abord les deux dernières suppositions : nous verrons plus tard les modifications qui en résultent dans la configuration générale de la courbe.

En supposant donc que φ augmente depuis zéro jusqu'à $\frac{\pi}{2}$, la valeur de y composée de deux quantités qui croissent et s'ajoutent va sans cesse en augmentant, en sorte que le point décrivant s'élève constamment au-dessus de l'axe des abscisses. Mais la valeur de x est douteuse : les deux quantités qui la composent sont de signe contraire, et chacune d'elles diminue ; on ne peut donc décider si la courbe s'éloigne ou se rapproche de l'axe des ordonnées. Pour obtenir un renseignement précis, je cherche quelle est la valeur de φ à laquelle répond le maximum ou le minimum de la quantité $\cos\varphi\,[(2a^2 - b^2) - c^2\cos^2\varphi]$. On peut multiplier par le facteur constant c et mettre l'expression sous la forme équivalente

$(c^2\cos^2\varphi)^{\frac{1}{2}}[2a^2 - b^2 - c^2\cos^2\varphi]$. Grâce à cette préparation, la somme des deux facteurs est constante dans ce produit, et d'après un théorème connu (*), le maximum, s'il existe, sera déterminé par l'équation

$$2c^2\cos^2\varphi = 2a^2 - b^2 - c^2\cos^2\varphi\ ;$$

d'où, en résolvant,

$$\cos\varphi = \sqrt{\frac{2a^2 - b^2}{3c^2}}.$$

Outre la condition de réalité qui est toujours remplie, puisque l'on a dans tous les cas $2a^2 - b^2 > 0$, on doit encore avoir $\frac{2a^2 - b^2}{3c^2} < 1$, condition qui revient à $2a^2 - b^2 < 3a^2 - 3b^2$, ou enfin $2b^2 - a^2 < 0$. Comme nous avons supposé le contraire, il n'y a pas de maximum, en sorte que le point décrivant, s'élevant au-dessus de l'axe des abscisses, se rapproche incessamment de l'axe des ordonnées. Enfin, lorsque l'on suppose $\varphi = \frac{\pi}{2}$, l'on a $x = 0$ et $y = b$, et la courbe passe à l'extrémité du petit axe.

Pour des valeurs de l'angle φ comprises entre $\frac{\pi}{2}$ et π, l'ordonnée repasse par les mêmes valeurs, et l'abscisse ne fait que changer de signe ; d'où il suit que la branche de courbe qui s'étend à gauche de l'axe des y n'est que la répétition exacte de celle qui s'étend de A en B. De plus, comme le changement de φ en $2\pi - \varphi$ dans les équations (α) et (β)

(*) En voici l'énoncé : « Un produit $x^m y^n z^p$.... dans lequel m, n, p.... sont des » nombres entiers ou fractionnaires, et dans lequel la somme des facteurs est » constante, atteint son maximum lorsque l'on a $\frac{x}{m} = \frac{y}{n} = \frac{z}{p}$.... » L'application de ce théorème fort simple, est souvent plus courte que la methode générale qui exige la formation et l'annulation de la dérivée première, sans que l'on puisse quelquefois se dispenser de consulter les dérivees des ordres supérieurs. (*Voir* t. III, p. 165.)

n'influe pas sur la valeur de x et fait changer le signe de y sans en modifier la valeur, le lieu est symétrique par rapport à l'axe des abscisses. Cette double symétrie fait prévoir que si l'on avait éliminé φ entre les équations (α) et (β), l'équation finale $f(x, y) = 0$ n'aurait contenu que des puissances paires des deux variables. D'après l'ensemble de cette discussion sommaire, si l'on attribue à la courbe la forme la plus simple compatible avec les renseignements obtenus, elle aura, comme dans la fig. 51, beaucoup de ressemblance avec l'ellipse ; mais ce tracé grossier a besoin d'être justifié. Consultons à cet effet le coefficient angulaire de la tangente, dont la formation ne saurait offrir aucune difficulte. En différentiant les expressions (α) et (β), il vient :

$$dy = \frac{3c^2\sin^2\varphi\cos\varphi + (2b^2 - a^2)\cos\varphi}{b}\,d\varphi,$$

$$dx = \frac{3c^2\cos^2\varphi\sin\varphi - (2a^2 - b^2)\sin\varphi}{a}\,d\varphi;$$

et par suite,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a\,(3c^2\sin^2\varphi + 2b^2 - a^2)\cos\varphi}{b\,(3c^2\cos^2\varphi + b^2 - 2a^2)\sin\varphi}.$$

Il est aise de constater que les points A et A', B et B' sont des sommets, puisque les hypothèses $\varphi = 0$ et $\varphi = \pi$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ et $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ rendent en ces points l'expression ci-dessus designée infinie ou nulle.

Il ne reste plus, pour réduire la discussion à ce qu'elle a vraiment d'essentiel, que de préciser si la courbe est intérieure ou extérieure à l'ellipse, ou tantôt l'un tantôt l'autre. Or, on sait qu'une courbe de l'ordre m ne peut avoir, avec une courbe de l'ordre n, plus de mn points communs ; et comme dans l'énumération de ces points les points de tangence comptent naturellement pour deux, la courbe, si elle coupe l'ellipse, ne peut depuis A jusqu'en B la rencontrer qu'une seule fois ; deux points d'intersection dans cet intervalle exigeraient, d'après la double symétrie des courbes, seize points communs, ce qui est incompatible avec leurs degrés respectifs. Il suffira donc de décider quelle est, en des points fort rapprochés des deux sommets, la position relative des deux courbes. Considérons à cet effet un point fort voisin de A : il correspondra à une valeur de φ que l'on pourra supposer assez petite pour négliger les puissances de φ supérieures à la seconde. D'après cette restriction, les séries qui servent à développer le sinus et le cosinus suivant les puissances de l'arc fourniront immédiatement :

$$\sin\varphi = \varphi, \qquad \cos\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2},$$

et les valeurs des coordonnées de la courbe qui répondent à ce point sont, toute réduction faite :

$$y = \frac{(2b^2 - a^2)\varphi}{b} \ldots\ldots(\gamma), \qquad x = \frac{a^2 + \frac{\varphi^2}{2}(a^2 - 2b^2)}{a} \ldots\ldots(\delta).$$

Mais les points extérieurs ou intérieurs à l'ellipse sont, d'après la théorie spéciale de cette courbe, caractérisés par la condition

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \gtrless 1,$$

qui revient dans le cas actuel, après avoir formé, d'après les valeurs (γ) et (δ) de x et de y, les quantités $\frac{x^2}{a^2}$ et $\frac{y^2}{b^2}$, à l'inégalité suivante :

$$\varphi^2\left(\frac{(2b^2 - a^2)^2}{b^4} + \frac{\varphi^2(a^2 - 2b^2)^2}{a^4} + \frac{a^2 - b^2}{a^2}\right) \gtrless 0,$$

ou, en négligeant le terme en φ^4 et divisant par φ^2 :

$$(a^2 - 2b^2)\,(a^2 - 2b^2)^2 \gtrless 0.$$

Comme on a supposé en commençant que la quantité $2b^2 - a^2$ était positive, le premier membre de l'inégalité précédente est toujours négatif, ce qui montre que, dans le voisinage du point A, la courbe est intérieure à l'ellipse ; on vérifierait facilement qu'il en est de même dans le voisinage de l'autre sommet B. L'étude du rayon de courbure eût fourni les mêmes résultats ; en différentiant une fois de plus les valeurs de x et de y, on l'aurait obtenu sans peine d'après la formule connue $r = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dxdy^2 - dyd^2x}$; mais la longueur des calculs rendait préférable ici l'emploi d'un artifice peu détourné. Enfin, comme de A jusqu'en B, c'est-à-dire depuis $\varphi = 0$ jusqu'à $\varphi = \frac{\pi}{2}$, le coefficient angulaire de la tangente va sans cesse en décroissant, la courbe est exempte de sinuosités, ce qui confirme la forme du quart de courbe AKB (*fig* 51).

(*La fin prochainement.*)