

MENTION

Solution de la question 125

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 5 (1846), p. 533-534

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1846_1_5__533_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1846, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SOLUTION DE LA QUESTION 125 (p. 376).

PAR M. MENTION,

Élève en spéciales.

Soient les équations de deux ellipses rapportées aux mêmes axes :

$$(ax + by)^2 + (a'x + b'y)^2 = c^2; \quad (ax + a'y)^2 + (bx + b'y)^2 = c^2.$$

Les aires des ellipses sont égales, et si les axes sont rectangulaires, les ellipses sont égales. (Jacobi.)

Il faut prouver que les produits des axes sont égaux.

Les équations peuvent se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned} (b^2 + b'^2)y^2 + 2xy(ab + a'b') + (a^2 + a'^2)x^2 - c^2 &= 0, \\ (a^2 + b^2)y^2 + 2xy(aa' + bb') + (a^2 + b^2)x^2 - c^2 &= 0. \end{aligned}$$

D'après les relations d'identité (p. 489, t. I), on a pour le carré du premier produit :

$$-\frac{4L^2 \sin^2 \gamma}{m^3}, \text{ et pour le second, } -\frac{4L'^2 \sin^2 \gamma'}{m'^3}$$

(γ angle des axes,

$m = B^2 - 4AC$, $L = AE^2 - BDE + CD^2 + F$ ($B^2 - 4A\dot{C}$),
l'équation de la courbe étant

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0).$$

Or, $\gamma = \gamma'$: donc il faut faire voir que $L = L'$; $m = m'$.

m et L ne variant pas avec l'origine (observation t. I, p. 489), nous pouvons tirer leurs valeurs des équations actuelles, où $D = 0$; $E = 0$.

$$\begin{aligned} m &= 4(a^2 b^2 + 2aa'bb' + a'^2 b'^2) - 4(a^2 b^2 + a^2 b'^2 + a'^2 b^2 + a'^2 b'^2) \\ &= 4(2aa'bb' - a^2 b'^2 - a'^2 b^2) = -4(ab' - ba')^2; \\ m' &= 4(a^2 a'^2 + 2aa'bb' + b^2 b'^2) - 4(a^2 a'^2 + a^2 b'^2 + b^2 a'^2 + \\ &\quad + b^2 b'^2) \\ &= 4(2aa'bb' - a^2 b'^2 - b^2 a'^2) = -4(ab' - ba')^2. \end{aligned}$$

Ainsi $m = m'$.

Mais $L = -c^2 m$; $L' = -c^2 m'$; donc aussi $L = L'$

Si $\gamma = 90^\circ$, je dis que les ellipses sont égales.

Les conditions d'égalité de deux coniques sont (t. I, p. 493) si $m = m'$,

$$\begin{aligned} N^3 L' \sin^6 \gamma' &= N'^3 L \sin^6 \gamma, \text{ ou puisque } L=L', \sin \gamma = \sin \gamma', \\ N &= N', \text{ mais } N = A + C - B \cos \gamma \text{ (voir notation p. 489)} \\ &= A + C, \text{ puisque } \gamma = 90^\circ, N' = A' + C'. \end{aligned}$$

Vérifions donc si $A + C = A' + C'$; en effet,

$$A + C = b^2 + b'^2 + a^2 + a'^2 \dots A' + C' = a'^2 + b'^2 + a^2 + b^2$$

Donc... c q f. d