

TURQUAN

**Question de mécanique proposée au
concours d'agrégation**

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 5
(1846), p. 525-533

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1846_1_5_525_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1846, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

QUESTION DE MÉCANIQUE

*proposée au concours d'agrégation (année 1845, tom. IV,
p. 461).*

PAR M. TURQUAN,

professeur au collège royal de Pontivy.

PROBLÈME. Un point matériel pesant est suspendu à un fil flexible, inextensible, et sans masse, dont l'autre extrémité est fixe; ce pendule est mis en mouvement dans un plan vertical, et le fil s'enroule sur une courbe fixe située dans ce plan et passant par le point de suspension où elle a pour tangente la verticale; quelle doit être cette courbe fixe, pour que la tension du fil soit constante pendant un certain temps; quelles seront les lois du mouvement, et pourra-t-il être oscillatoire? On donne la longueur du fil et la vitesse du pendule au point le plus bas.

Solution. Je prendrai pour axe des y la verticale passant par le point de suspension, et pour axe des x une

horizontale passant par le même point , qui dès lors devient l'origine.

Il est évident qu'à mesure que le fil s'enroule sur la courbe , l'extrémité du pendule décrit la développante de cette courbe ; et que cette développante a pour rayon de courbure à un instant quelconque $l-s$, l étant la longueur donnée du fil , et s la longueur de l'arc embrassé par le fil à cet instant , cet arc étant compté à partir du point de suspension. Il est évident encore que x , y étant les coordonnées de l'extrémité de l'arc s , les angles que le rayon de courbure $l-s$ fait avec les axes, auront pour cosinus $\frac{dx}{ds}$ et $\frac{dy}{ds}$.

On peut supprimer le fil auquel est suspendu le point matériel , pourvu qu'on remplace sa tension par une force égale et de même sens ; cette force sera la résistance de la trajectoire , résistance qu'on sait être égale et directement opposée à la pression qu'elle supporte. Cette pression devant être constante , je la désignerai par a , et j'aurai :

$$a = \frac{v^2}{l-s} + g \frac{dy}{ds}. \quad (1)$$

Au commencement du mouvement , $s=0$; $\frac{dy}{ds}=1$ et la vitesse v est donnée ; représentons-la par k , il viendra :

$$a = \frac{k^2}{l} + g.$$

On voit par là que a ne peut être plus petit que g , ni même égal à g ; car , dans le premier cas la vitesse k serait imaginaire , et dans le second cas elle serait nulle , et le pendule resterait au repos.

Comme le point matériel en mouvement est assujetti à se mouvoir sur une certaine courbe (la développante de

la courbe demandée), et n'éprouve aucun frottement, aucune résistance de milieu; le principe des forces vives a lieu, et l'on a :

$$v^2 = k^2 + 2g(\eta - l). \quad (2)$$

En désignant par ξ , η les coordonnées du point mobile à un instant quelconque.

Je mets cette valeur de v dans l'équation (1), qui deviendra :

$$a = \frac{k^2 + 2g\eta - 2gl}{l - s} + g \frac{dy}{ds},$$

ou bien en observant qu'on a $\eta - y = (l - s) \frac{dy}{ds}$, d'où

$$\eta = y + (l - s) \frac{dy}{ds},$$

$$a = \frac{k^2 + 2gy + (l - s) \frac{dy}{ds} - 2gl}{l - s} + g \frac{dy}{ds},$$

et après quelques réductions,

$$(2gy + as - 3gl) ds + 3g(l - s) dy = 0. \quad (3)$$

J'intégrerai d'abord cette équation; je la rendrai homogène en faisant $y = y' + m$; $s = s' + n$, et en posant :

$$2gm + an - 3gl = 0; \quad l - n = 0,$$

d'où $n = l$, $m = \frac{(3g - a)l}{2g}$. Elle se changera ainsi dans la suivante :

$$(2gy' + as') ds' - 3gs' dy' = 0,$$

qui pourra s'intégrer facilement, car elle est homogène et linéaire.

On aura en désignant par A une constante arbitraire

$$y' = \frac{a}{g} s' + A s'^2$$

ou
$$y - m = \frac{a}{g}(s - l) + \Lambda(s - l)^{\frac{3}{2}}.$$

Je détermine la constante Λ de manière qu'on ait $y = 0$ pour $s = 0$. J'aurai ainsi :

$$-m = -\frac{a}{g}l + \Lambda l^{\frac{3}{2}} \quad \text{ou} \quad -\frac{(3g - a)l}{2g} = -\frac{a}{g}l + \Lambda l^{\frac{3}{2}},$$

d'où
$$\Lambda = \frac{3(a - g)}{2g} l^{\frac{1}{2}}.$$

Ce qui donne enfin :

$$y - m = \frac{a}{g}(s - l) + \frac{3(a - g)}{2g} l^{\frac{1}{2}}(s - l)^{\frac{3}{2}}. \quad (4)$$

Je déterminerai ensuite la valeur de x en fonction de s ; mais pour cela il sera plus commode d'écrire l'équation (4)

ainsi :
$$y' = \frac{a}{g}s' + \frac{3(a - g)^{\frac{1}{2}}}{2g} l - s'^{\frac{3}{2}}.$$

On en tire d'abord :

$$dy' = \left\{ \frac{a}{g} + \frac{a - g}{g} \left(\frac{l}{s'} \right)^{\frac{1}{2}} \right\} ds',$$

et comme on a $dy = dy'$; $ds = ds'$ l'équation

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 \text{ deviendra } ds'^2 = dx'^2 + dy'^2,$$

d'où

$$dx = \sqrt{ds'^2 - dy'^2} = \sqrt{1 - \left\{ \frac{a}{g} + \frac{a - g}{g} \left(\frac{l}{s'} \right)^{\frac{1}{2}} \right\}^2} ds'.$$

Je poserai d'abord $\left(\frac{l}{s'} \right)^{\frac{1}{2}} = u$, d'où $s' = \frac{l}{u^2}$; $ds' = -\frac{3ldu}{u^4}$ et

$$dx = -\sqrt{1 - \left(\frac{a}{g} + \frac{a - g}{g} u \right)^2} \frac{3ldu}{u^4}.$$

Il est facile de voir que le second membre pourra s'intégrer sous forme finie.

Je fais d'abord

$$\frac{a}{g} + \frac{a-g}{g} u = \nu, \text{ d'où } \frac{g\nu - a}{a-g} = u, \quad du = \frac{g d\nu}{a-g},$$

et je transformerai par là la valeur de dx en

$$dx = -3lg (a-g)^3 \frac{\sqrt{1-\nu^2} d\nu}{(g\nu-a)^4}$$

ou
$$dx = -3lg (a-g)^3 \frac{(1-\nu^2) d\nu}{(g\nu-a)^4 \sqrt{1-\nu^2}}.$$

Ce second membre deviendra rationnel par une transformation connue. On posera

$$\sqrt{1-\nu^2} = (1-\nu)z,$$

et l'on aura :

$$dx = -3lg (a-g)^3 \frac{8z^2 (z^2+1) dz}{\{a+g+(a-g)z^2\}^4}.$$

Enfin j'aurai :

$$dx = -3lg \frac{(a-g)^3}{(a+g)^5} \frac{8z^2 (z^2+1) dz}{\left\{1 + \frac{a-g}{a+g} z^2\right\}^4},$$

et en faisant :

$$\sqrt{\frac{a-g}{a+g}} z = t,$$

$$dx = -3lg \frac{(a-g)^{\frac{5}{2}}}{(a+g)^{\frac{5}{2}}} \frac{8t^2 \{(a+g)t^2 + a-g\} dt}{(1+t^2)^4}.$$

Ce second membre est maintenant facile à intégrer, et l'on trouvera finalement

$$x = 3lg \frac{(a-g)^{\frac{5}{2}}}{(a+g)^{\frac{5}{2}}} \left\{ \frac{8(a+g)t^3}{3(1+t^2)^3} + \frac{8at}{3(1+t^2)^2} - \frac{2at}{3(1+t^2)} - \frac{t}{1+t^2} - \text{arc. } t g t + A \right\}.$$

Pour la valeur de t en s on a :

$$t = \sqrt{\frac{(a+g)(l-s)^{\frac{1}{2}} - (a-g)l^{\frac{1}{2}}}{(a+g)\left\{l^{\frac{1}{2}} - (l-s)^{\frac{1}{2}}\right\}}}.$$

On déterminera la constante A par la condition que l'abscisse x soit nulle pour $s=0$ ou pour $t=\infty$, car $s=0$ rend $t=\infty$; or les quatre premiers termes de la valeur de a s'évanouissent pour $t=\infty$, le suivant se réduit à $\frac{\pi}{2}$; ce qui donne pour la valeur de la constante :

$$A = \frac{3\pi l g}{2} \cdot \frac{(a-g)^{\frac{2}{3}}}{(a+g)^{\frac{5}{3}}}.$$

s augmentant, t diminue, et la valeur de x augmente. ainsi que le cosinus $\frac{dx}{ds}$ jusqu'à ce qu'on ait

$$s = l \left(1 - \left(\frac{a-g}{a} \right)^3 \right).$$

Alors la tangente à la courbe est parallèle à l'axe des x , et la valeur de x a atteint son maximum. En même temps la valeur de y décroît constamment ainsi que celle du cosinus $\frac{dy}{ds}$ qui devient alors égal à zéro.

s continuant à croître y continue à décroître, ainsi que le cosinus $\frac{dy}{ds}$, jusqu'à ce que s soit égal à $l \left(1 - \left(\frac{a-g}{a+g} \right)^3 \right)$, alors $\frac{dy}{ds} = -1$, mais s ne peut croître au delà de cette valeur. car alors $\frac{dy}{ds}$ deviendrait numériquement plus grand que 1, ce qui serait absurde. Quant à la valeur de x , elle décroîtra, et $\frac{dx}{ds}$ repassera par les mêmes valeurs absolues que précédemment, mais il faudra prendre ces valeurs négativement, sans quoi y ne pourrait pas décroître.

Ainsi la courbe s'arrête brusquement au point où sa longueur est $l \left(1 - \left(\frac{a-g}{a+g} \right)^3 \right)$, et alors son dernier élément

est vertical. Elle a aussi un point d'arrêt à l'origine, car si on prend s négativement, $\frac{dy}{ds}$ devient numériquement plus grand que 1, et celle de $\frac{dx}{ds}$ devient imaginaire.

Pour la trajectoire du mobile, ou la développante de la courbe que nous venons de déterminer, elle a pour équations en désignant par ξ, η , ses coordonnées :

$$\xi = x + (l-s) \frac{dx}{ds}; \quad \eta = y + (l-s) \frac{dy}{ds}$$

Comme les valeurs de x et de y , de $\frac{dx}{ds}$ et de $\frac{dy}{ds}$, sont connues en fonction de s , on voit qu'elles font connaître ξ et η au moyen du paramètre auxiliaire s , et qu'ainsi on pourra la construire par points de même qu'on a construit sa développée.

Elle a aussi deux points d'arrêt qui répondent aux valeurs $s=0$, $s=l \left(1 - \left(\frac{a-g}{a+g} \right)^3 \right)$. Au point d'arrêt qui répond à $s=0$ son élément est horizontal, à l'autre point d'arrêt son élément est vertical.

En remplaçant $\frac{dy}{ds}$ par sa valeur dans l'équation (1), et τ par sa valeur en fonction de s dans l'équation (2), on aura la valeur de la vitesse en fonction de s , savoir :

$$v^2 = (a-g) l^{\frac{1}{3}} (l-s)^{\frac{2}{3}} \quad \text{ou} \quad v = \sqrt{(a-g) l^{\frac{1}{3}} (l-s)^{\frac{1}{3}}}.$$

Ainsi la vitesse est constamment proportionnelle à la racine cubique du rayon de courbure de la trajectoire. Comme au point d'arrêt de cette trajectoire, le paramètre s n'est pas encore égal à l , le rayon de courbure, ni la vitesse du mobile ne seront nuls; comme aussi quand le mobile sera arrivé en ce

point, le fil auquel il est attaché ne pouvant plus s'enrouler sur la courbe fixe, les lois du mouvement changeront; il ne pourra donc pas être oscillatoire. On voit aussi qu'à partir de cette époque, la tension du fil cessera d'être constante.

On pourra calculer le temps que le fil emploiera à s'enrouler sur un arc donné de la courbe fixe, et par suite le temps que le point mobile emploiera à parcourir l'arc correspondant de sa trajectoire. En effet si on différentie les équations de la trajectoire, on aura :

$$d\xi = (l-s) d\frac{dx}{ds}, \quad dy = (l-s) d\frac{dy}{ds},$$

d'où

$$d\xi^2 + d\eta^2 = (l-s)^2 \left\{ \left(d\frac{dx}{ds} \right)^2 + \left(d\frac{dy}{ds} \right)^2 \right\}.$$

Et si on remarque que

$$\frac{dx}{ds} = \sqrt{1 - \frac{dy^2}{ds^2}}, \quad \text{d'où} \quad d\frac{dx}{ds} = \frac{-\frac{dy}{ds} d\frac{dy}{ds}}{\sqrt{1 - \frac{dy^2}{ds^2}}},$$

que

$$\frac{dy}{ds} = \frac{a}{g} - \frac{ag}{g} \left(\frac{l}{l-s} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad d\frac{dy}{ds} = -\frac{a-g}{3g} \frac{l^{\frac{1}{2}}}{(l-s)^{\frac{3}{2}}} ds,$$

on aura facilement :

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{d\xi^2}{dt^2} + \frac{d\eta^2}{dt^2}} = \\ &= \frac{-(a-g)l^{\frac{1}{2}}}{3g(l-s)^{\frac{3}{2}} \sqrt{1 - \left\{ \frac{a}{g} - \frac{a-g}{g} \left(\frac{l}{l-s} \right)^{\frac{1}{2}} \right\}^2}} \frac{ds}{dt} = v = \\ &= \sqrt{(a-g)l^{\frac{1}{2}} (l-s)^{\frac{1}{2}}}; \end{aligned}$$

et enfin

$$dt = \frac{\sqrt{(a-g)l^{\frac{2}{3}} ds}}{3g(l-s)^{\frac{2}{3}} \sqrt{-\left\{\frac{a}{g} - \frac{a-g}{g} \left(\frac{l}{l-s}\right)^{\frac{2}{3}}\right\}}}$$

Et en répétant les mêmes transformations qui ont déjà été employées dans le calcul de la valeur de x , on arrivera à une valeur de dt , qui sera intégrable, et l'intégration faite, on aura :

$$t = \frac{2g\sqrt{l}}{(a+g)^{\frac{3}{2}}} \frac{\zeta}{1+\zeta^2} - \frac{2a\sqrt{l}}{(a+g)^{\frac{3}{2}}} \arctan \zeta + B.$$

Note. L'Hôpital qui a le premier traité cette question, parvient à cette équation :

$$5ax = (2y - 2\sqrt{ay} - 2a) \sqrt{2a\sqrt{ay} - a^2};$$

x est horizontal, y vertical et a est le poids du point matériel. (*M. de l'Acad.*, 1700, p. 15.)