

**Sur les méthodes métamorphiques
(de transformation), et théorie des
points correspondants**

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 5
(1846), p. 497-508

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1846_1_5__497_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1846, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR LES

MÉTHODES MÉTAMORPHIQUES (de transformation),
et théorie des points correspondants.

I. Soit $f(x, y, z) = 0$ l'équation d'une surface algébrique du degré m et rapportée à trois plans coordonnés; prenons arbitrairement trois fonctions F_1, F_2, F_3 , à six variables x, y, z, u, t, v , et égalons-les à zéro; et regardons u, t, v , comme des coordonnées rapportées à d'autres plans; éliminant x, y, z entre les quatre équations, on aura une équation entre les trois variables u, t, v qui représentera une nouvelle surface, dont les propriétés géométriques ont évidemment des relations avec celles de la première surface. Si une propriété de la première est exprimée analytiquement par une certaine fonction $\varphi(x, y, z) = 0$, on aura de suite, la propriété correspondante de la seconde en éliminant x, y, z entre cette équation et les trois équations arbitrairement choisies. Il en sera de même si l'équation $\varphi = 0$ renferme des coefficients différentiels: la nouvelle surface prend le nom de surface *transformée* relativement à la première, le mot étant pris dans son acception la plus générale.

II. On restreint ordinairement cette acception. On impose la condition que chaque point de la surface transformée ne corresponde qu'à un seul point de la surface donnée et *vice versa*; dès lors, les trois fonctions arbitraires ne peuvent avoir que cette forme

$$F_1 = x(a + bt + cu + dv) + y(e + ft + gu + hv) \\ + z(i + kt + lu + mv) + n + pt + qu + rv = 0,$$

Dans F , les constantes portent un accent et dans F , deux accents. Chaque fonction renfermant seize constantes arbitraires et en tout quarante-cinq rapports arbitraires. On en déduit $x = \frac{\rho}{Q}$, $y = \frac{\rho'}{Q}$, $z = \frac{\rho''}{Q}$; ρ , ρ' , ρ'' , Q sont, généralement parlant, des fonctions en u , t , ν , du troisième degré dont la surface transformée sera au plus du degré *trois* m . Si l'une des trois fonctions, soit F , ne renferme aucune des variables u , t , ν , alors les fonctions ρ , ρ' , ρ'' , Q ne sont que du second degré; et la surface transformée est du degré *deux* m . Si deux des trois fonctions, soient F_1 et F_2 , sont indépendantes des variables u , t , ν , la surface transformée n'est plus que du degré m . On pourrait appeler la première de ces méthodes *métamorphiques*, à raison du degré des formules, méthode *ternaire*; la *deuxième* méthode *binaire* et la *troisième* méthode *simple*. On n'a pas encore que je sache fait usage de la méthode *ternaire*. M. Magnus, comme nous verrons ci-dessous, a employé la méthode *binaire*. MM. Poncelet et Chasles ont doté la science de l'espace d'un grand nombre de beaux théorèmes, à l'aide de la troisième méthode et de la seconde que M. Chasles a si fructueusement étudiée, sous le nom de méthode *homographique*, dans *l'aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie* (1837); ouvrage devenu malheureusement trop rare.

Ainsi par la méthode *ternaire* le plan se transforme en surface du troisième degré, et l'intersection de deux plans où la droite se transforme dans l'intersection des deux surfaces du troisième degré; par la méthode *binaire*, le plan se transforme en surface du deuxième degré et la droite, dans l'intersection de deux de ces surfaces; par la méthode *simple* ou *homographique*, le plan reste un plan, et la droite une droite. Nous allons donner d'après M. Magnus quelques applications aux coniques de la méthode *binaire* comme exemple

de moyen heuristique, ou moyen pour découvrir des théorèmes de géométrie (Crelle, tome 8, p. 51; 1832, Mémoire en français).

Méthode binaire ou homographique.

III. Soient x, y les coordonnées d'un point dans un plan XY; et u, t les coordonnées correspondantes dans le plan UT, et posons :

$$(ay + bx + c)u + (a'y + b'x + c')t + a''y + b''x + c'' = 0, \quad (1)$$

$$(a\gamma + \beta x + \gamma)u + (a'\gamma + \beta'x + \gamma')t + a''\gamma + \beta''x + \gamma'' = 0; \quad (2)$$

on en déduit :

$$y (au + a't + a'') + x (bu + b't + b'') + cu + c't + c'' = 0, \quad (3)$$

$$y (a\gamma + a'\gamma + a'') + x (\beta u + \beta't + \beta'') + \gamma u + \gamma't + \gamma'' = 0; \quad (4)$$

formules métamorphiques.

Mettons les équations (1) et (2) sous la forme :

$$Au + A't + A'' = 0, \quad (5)$$

$$Bu + B't + B'' = 0; \quad (6)$$

d'où

$$u = \frac{A'B' - A''B'}{AB' - A'B}; \quad t = \frac{A''B - AB''}{AB' - A'B}.$$

IV. Soit une droite située dans le plan UT et donnée par l'équation $u = gt + h$ (7).

La conique correspondante dans le plan XY a pour équation :

$$A'B'' - A''B' - g(A''B - AB'') - h(AB' - A'B) = 0; \quad (8)$$

pour que cette équation soit satisfaite par des valeurs de x et de y , indépendamment d'aucune valeur de g et de h , il faut que les trois binômes soient nuls; or deux de ces binômes peuvent être annulés au moyen de quatre couples de valeurs de x et de y , parmi lesquelles il y en a au moins deux de

réelles; en effet, posons par exemple $A''B - AB'' = 0$; $AB' - A'B = 0$; on y satisfait par l'équation $A = B = 0$; or A et B étant du premier degré donnent un couple de valeurs réelles; il existe donc encore au moins un second couple de valeurs réelles et ce second couple annule aussi le troisième binôme; car on a :

$$\frac{A}{B} = \frac{A''}{B''} = \frac{A'}{B'}; \text{ donc } A''B' - A'B'' = 0;$$

il existe donc dans le plan XY trois points ou au moins un point par lesquels ou lequel passent toutes les coniques correspondantes aux droites tracées dans le plan UT , points dont les coordonnées sont fonction des dix-huit constantes. Nous désignerons ces points par X', X'', X''' et nous les nommerons *points principaux*. Il est évident que réciproquement à une droite tracée dans le plan XY correspond une conique dans le plan UV , passant, généralement parlant, par trois points principaux que nous désignons par U', U'', U''' .

Observation. Lorsqu'un des binômes $AB' - A'B$ s'abaisse au premier degré, un point principal ou même deux tombent à l'infini.

V. A une conique tracée dans l'un des plans, correspond dans l'autre une ligne du quatrième degré; mais si la conique passe par les trois points principaux, la ligne correspondante sera une droite, comme il est facile de s'en convaincre.

VI. A un faisceau de droites convergeant vers un même point correspondent dans l'autre plan, autant de coniques passant par les trois points principaux et par un même quatrième point; lorsque les droites sont parallèles, ce quatrième point varie avec la direction des droites, et a pour lieu géométrique une conique. En effet, considérons g comme constant et h comme variable, alors on a un système de

droites parallèles ; et l'équation (8) est satisfaite par les valeurs de x et de y qui satisfont aux équations

$$g(A'B - AB'') - (A'B'' - A''B') = 0,$$

$$AB' - A'B = 0;$$

toutes ces coniques passent par les trois points principaux, et par le même quatrième point dont les coordonnées satisfont à ces deux équations qui sont indépendantes de h ; ce quatrième point correspond au point de convergence situé à l'infini des droites parallèles ; la dernière équation est indépendante de g ; donc les points situés à l'infini dans un des plans, ont pour correspondante une conique dans l'autre plan et représentée par l'équation $AB' - A'B = 0$ dans le plan XY.

VII. A une droite passant par un point principal d'un plan correspond le système de deux droites, passant par les points principaux de l'autre.

Coniques homothétiques.

VIII. Prenons pour formules métamorphiques :

$$ayu + bxt + 1 = 0,$$

$$xu - yt = 0;$$

on a :
$$u = -\frac{y}{ay^2 + bx^2}; \quad t = -\frac{x}{ay^2 + bx^2};$$

ainsi la droite $u = gt + h$, située dans le plan UT, a pour correspondante dans le plan XY la conique

$$ay^2 + bx^2 + \frac{1}{h}y - \frac{g}{h}x = 0;$$

a et b étant indépendants de g et h , il s'ensuit que toutes ces coniques sont semblables et semblablement placées, ou autrement sont *homothétiques*, expression qu'on doit à

M. Chasles (1); l'origine est un centre d'homologie et un point *principal*; les deux autres points sont à l'infini (Voir *Observation IV*); l'équation de la tangente à l'origine est $y - gx = 0$; donc pour toutes les droites parallèles, les coniques correspondantes se touchent au *point principal*; donc aussi l'angle sous lequel se coupent deux droites dans le plan UT, est égal à l'angle sous lequel se coupent les coniques homothétiques correspondantes dans le plan XY au point principal X'. On peut supposer que les axes x, y font le même angle que les axes t, u .

IX. Soit abc un triangle tracé dans le plan UT; aa', bb', cc' les perpendiculaires abaissées de a, b, c sur les côtés opposés et p leur point de rencontre.

Prenons la transformation homothétique; aux côtés ab, bc, ac répondent dans le plan XY, trois coniques homothétiques passant par le point principal X' et se coupant deux à deux, aux points α, β, γ correspondant aux sommets a, b, c , aux trois hauteurs aa', bb', cc' correspondent respectivement trois autres coniques homothétiques, passant respectivement par les points, α, β, γ et coupant respectivement les trois précédentes coniques sous des angles droits et se rencontrant au même point p' correspondant au point p ; on a donc cette proposition :

Théorème. *Dans un plan on donne sept points*

$$X', \alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma';$$

on fait passer six coniques homothétiques par les points

$$X'\alpha\beta, X'\alpha\gamma, X'\beta\gamma; X'\gamma\gamma', X'\beta\beta', X'\alpha\alpha';$$

si les trois dernières coniques coupent respectivement les trois

(*) Il serait peut-être plus exact de dire lignes homothètes.

premières orthogonalement, savoir $X'\gamma\gamma'$ et $X'\alpha\beta$, etc., ces trois dernières se coupent en un même point p' .

Cercles.

X. Si dans les précédentes formules métamorphiques, on suppose les axes rectangulaires et $a=b$, les coniques deviennent des cercles.

Soit dans le plan UT, un cercle c passant par le point principal X; et deux sécantes d, d' , se rencontrant en p et coupant le cercle aux points $a, b; a', b'$, et soit p' l'intersection des cordes $ab', a'b$ que nous désignons par e et e' ; p' est sur la polaire de p ; et soit t le pôle d'une troisième droite r passant par p et sur laquelle p se meut, et s les diverses polaires des points de r ;

au point p	correspond un point π dans le plan xy ,
au cercle c	une droite γ ,
à la droite d	un cercle δ passant par π et X' et coupant γ en α et β ,
à la droite d'	δ' passant par π et X' et coupant γ en α' et β' ,
à la droite e	ε passant par X', α, β, π' ,
à la droite e'	ε' X', α', β', π' ,

π' est le point correspondant à p' ;

à la polaire s de p correspond le cercle σ passant par X',

à la droite r décrit par p correspond un cercle ρ passant par X'.

Les divers cercles σ correspondant aux diverses polaires s de p se transportant sur r , passent par X' et encore par un point T correspondant à t ; de là ce théorème :

Si par deux points donnés π, π_1 , on fait passer deux cercles quelconques δ, δ' coupant une droite donnée en quatre points

$\alpha, \beta; \alpha', \beta'$; les deux cercles $\pi, \alpha\beta, \pi, \alpha'\beta'$ se coupent en un second point π' , dont le lieu est un cercle σ , passant par π ; si le point π varie et se meut sur un cercle passant par π , le cercle σ variera, mais passera constamment par un même point τ .

XI. En invoquant la théorie des polaires réciproques, on obtient le théorème suivant :

Soient deux coniques δ, δ' ayant un même foyer fixe et dont chacune touche deux droites fixes π, π_1 ; si, d'un point donné γ , on mène à chacune de ces coniques deux tangentes α, β et α', β' ; de plus, si dans les deux triangles formés respectivement par les droites $\pi, \alpha, \alpha'; \pi_1, \beta, \beta'$; on inscrit deux nouvelles coniques ϵ, ϵ' de même foyer que les premières; ces coniques ϵ, ϵ' auront une seconde tangente commune π' qui touchera une seule et même conique σ ayant le même foyer et la même tangente π . Si la droite π change de situation, mais de manière à rester tangente à une même conique confocale ρ qui touche la droite π ; les diverses coniques σ qui en naissent, toucheront une seule et même droite τ .

XII. Trois coniques, passant par les points principaux X', X'', X''' du plan XY , deviennent des droites et une droite devient une conique dans le plan UT ; de là et de la théorie des polaires réciproques, on déduit le moyen de sextupler, le théorème de Pascal.

1. Théorème de Pascal sur l'hexagone inscrit.

2. Théorème de Brianchon sur l'hexagone circonscrit (par les polaires réciproques).

3. Soient six points $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ sur une même droite et X', X'', X''' , trois points quelconques, tous dans le même plan; soient décrites les six coniques: $X'X''X'''a_1a_2, X'X''X'''a_2a_3, X'X''X'''a_3a_4, X'X''X'''a_4a_5, X'X''X'''a_5a_6, X'X''X'''a_6a_1$; le quatrième point d'intersection de la première conique et de la quatrième; de la deuxième et de la cinquième; de la troisième et de la sixième; sont tous situés sur

une même conique passant par les trois points X', X'', X''' : déduit du théorème 1 par la méthode métamorphique.

4. Soient décrites six coniques passant par trois points fixes X', X'', X''' et touchant une même droite, et soient désignés les quatrièmes points d'intersection de ces coniques par $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$; si l'on décrit les trois coniques $X'X''X'''a_1a_4, X'X''X'''a_2a_5, X'X''X'''a_3a_6$, elles se coupent en un même quatrième point : déduit du théorème 2 par le procédé métamorphique.

5. Soient tirées arbitrairement d'un même point, six droites $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$, et soient encore dans le même plan trois droites fixes X', X'', X''' ; si dans les six pentagones formés par ces trois droites et deux droites consécutives, $a_1a_2, a_2a_3, \dots, a_6a_1$, on inscrit six coniques, les quatrièmes tangentes communes à la première et à la quatrième conique, à la deuxième et à la cinquième conique, à la troisième et à la sixième conique, formeront, avec les trois droites X', X'', X''' , un hexagone dans lequel on peut inscrire une conique : déduit par les polaires réciproques du théorème 3.

6. Soient décrites six coniques touchant trois droites fixes X', X'', X''' et passant par un même point, et soient désignées les quatrièmes tangentes communes à deux coniques consécutives par a_1, a_2, \dots, a_6 , si dans les trois pentagones formés respectivement par les droites X', X'', X''' et les systèmes de droites a_1a_4, a_2a_5, a_3a_6 , on inscrit trois coniques, elles auront une même quatrième tangente commune : déduit du théorème 4 par les polaires réciproques.

Il est bon d'observer que les constructions contenues dans les énoncés de ces six théorèmes peuvent être variées de soixante manières.

Méthode simple ou perspective.

XII. Prenez pour formule métamorphique :

$$\begin{aligned}(ay + bx + c)u + a'y + b''x + c'' &= 0, \\ (ay + bx + c)u + \alpha'y + \beta''x + \gamma'' &= 0.\end{aligned}$$

Alors à une droite du plan UT, $u = gt + h$, correspond dans le plan XY la droite

$$a''y + b''x + e'' - g(\alpha'y + \beta''x + \alpha'') + h(ay + bx + c) = 0.$$

Par un changement de coordonnées, les deux formules métamorphiques peuvent être ramenées à celles-ci :

$$\begin{aligned}(ay + bx + c)u &= y, \\ (ay + bx + c)t &= x.\end{aligned}$$

Et supposant que les axes x, y , et les axes u, t forment le même angle; soit M un point du plan XY et M' son correspondant sur UT; si l'on applique le plan XY sur le plan UT, de manière que l'axe x concorde avec l'axe T et l'axe Y avec l'axe U; alors la droite MM' passe par l'origine; car $\frac{u}{t} = \frac{y}{x}$. Pour avoir les points M qui tombent sur leur correspondant M', il suffit de faire $y = u; x = t$; d'où

$$\begin{aligned}(ay + bx + c - 1)y &= 0, \\ (ay + bx + c - 1)x &= 0,\end{aligned}$$

deux équations qui sont satisfaites par $x = y = 0$; ce qui donne l'origine, et ensuite par $ay + bx + c - 1 = 0$. Donc, cette droite coïncide avec sa correspondante; on peut l'appeler *axe de collinéation*. Il est évident que le point de concours des deux droites correspondantes est sur l'axe de collinéation.

Par le moyen de ces dernières formules métamorphiques,

on peut donc démontrer une foule de théorèmes de la géométrie de situation.

Méthode métamorphique indéterminée.

XIII. Ne prenons qu'une seule équation métamorphique,

$$(ay + bx + c)u + (a'y + b'x + c')t + a''y + b''x + c'' = 0.$$

Alors, à un point M (x', y') du plan XY, correspond, dans le plan UT, une droite exprimée par l'équation

$$(ay' + bx' + c)u + (a'y' + b'x' + c')t + a''y' + b''x' + c'' = 0.$$

Par un changement de coordonnées, on peut donner à cette équation la forme $(ay + bx + d)u + (by + cx + e)t + dy + ex + f = 0$ (1), et faire que les angles des nouveaux axes soient égaux.

Si on pose le plan XY sur le plan UT de manière que les axes coïncident, le point M tombera quelque part en M' sur le plan UT; si on cherche la droite qui sur le plan répond à M' en appliquant le plan XY sur le plan UT, cette droite est la même qui correspond à M; car, l'équation de cette droite a cette forme symétrique :

$$ayu + b(xu + yt) + cxt + d(u + y) + e(x + t) + f = 0.$$

Pour trouver les points qui, dans les plans ainsi superposés, tombent sur leurs droites correspondantes, il suffit de faire, dans cette dernière équation, $u = y$ et $t = x$, et l'on trouve l'équation d'une conique :

$$ay^2 + 2by + cx^2 + 2dy + 2ex + f = 0.$$

On voit que la polaire du point M (x', y'), par rapport à cette conique, est précisément l'équation de la droite correspondante.

XIV. Ce qui précède suffit pour faire connaître l'origine

de cet océan de théorèmes que nous devons aux doctrines métamorphiques; source intarissable; il est extrêmement utile d'en propager le principe. Nous avons déjà eu occasion de dire, et il n'est pas superflu de le redire, que le procédé métamorphique a été indiqué par Newton et généralisé quant à la méthode perspective par Waring (*V. t. III, p. 417*).

Observation. Nous reviendrons sur cette matière en rendant compte d'un mémoire de M. Lalanne (Léon), sur la géométrie *anamorphique (déformative)*.