NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

C. DROUETS

Complément de la solution du n°118

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 5 (1846), p. 479-482

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1846_1_5__479_1>

COMPLÉMENT DE LA SOLUTION DU N°118 (*V.* p. 413).

PAR M. C. DROUETS,
élève du collége royal militaire de La Flèche.

Il restait à démontrer le théorème pour un exposant fractionnaire.

Soit donc $a^{\frac{m}{n}} \dots\dots b^{\frac{m}{n}} + c^{\frac{m}{n}}$; au lieu de ces nombres, je prends $a^m \dots\dots (b^{\frac{m}{n}} + c^{\frac{m}{n}})^n$; mais $a^2 = b^2 + c^2$, donc on aura encore :

$$a^{2m} \dots\dots (b^{\frac{m}{n}} + c^{\frac{m}{n}})^{2n},$$

$$(b^2 + c^2)^m \dots\dots (b^{\frac{m}{n}} + c^{\frac{m}{n}})^{2n}.$$

Ces deux développements sont connus, puisque les exposants sont entiers et positifs, mais ils n'ont pas le même nombre de termes ; le premier en a $m+1$, le second $2n+1$.

En réunissant les termes à égales distances des extrêmes, on a pour termes généraux d'une part :

$$T = \frac{m(m-1)(m-2)\dots\dots(m-p+1)}{1.\ 2.\ 3.\ \dots\dots\ p}\left[b^{2m-2p}c^{2p} + c^{2m-2p}b^{2p}\right],$$

de l'autre :

$$T' = \frac{2n(2n-1)(2n-2)\dots(2n-p+1)}{1.\ 2.\ 3.\ \dots\dots\ p}\left[b^{2m-\frac{m}{n}p}c^{\frac{m}{n}p} + c^{2m-\frac{m}{n}p}b^{\frac{m}{n}p}\right].$$

1° Soit $\frac{m}{n} > 2$ ou $\frac{m}{n} = 2 + x$, on voit facilement que le coefficient de T est $>$ que celui de T'.

Les parenthèses deviennent :

$$b^{2m-2p}c^{2p} + c^{2m-2p}b^{2p} = A + B,$$

$$b^{2m-2p}c^{2p}\left(\frac{c}{b}\right)^{px} + c^{2m-2p}b^{2p}\left(\frac{b}{c}\right)^{px} = A\left(\frac{c}{b}\right)^{px} + B\left(\frac{b}{c}\right)^{px}.$$

La différence est $\frac{(A-B)(b^{2px}-c^{2px})}{(bc)^{px}}$.

Si b est $> c$ $b^{2px} > c^{2px} \dots \frac{A}{B}$ sera $= \frac{b^{2m-4p}}{c^{2m-4p}} = \left(\frac{b}{c}\right)^{2m-4p} > 1$,

donc la première parenthèse sera plus grande que la seconde.

Si b est $< c$, $b^{2px} < c^{2px}$, $\dfrac{A}{B} = \left(\dfrac{b}{c}\right)^{2m-4p} < 1$, donc la première parenthèse sera plus grande que la seconde, car la différence de la première à la seconde est positive.

On voit donc que la première série a plus de termes que la seconde, que chaque terme de la première est plus grand que son correspondant de la seconde, donc :

$$a^{\frac{m}{n}} > b^{\frac{m}{n}} + c^{\frac{m}{n}}, \quad \frac{m}{n} > 2.$$

On voit que le coefficient numérique de P est moindre que celui de T'.

2° $\dfrac{m}{n} < 2$, $\dfrac{m}{n} = 2 - x$; les parenthèses deviennent :

$$A + B,$$

$$A\left(\frac{b}{c}\right)^{px} + B\left(\frac{c}{b}\right)^{px}.$$

Leur différence est $\dfrac{(A-B)(c^{2px}-b^{2px})}{(bc)^{px}}$.

Si $c > b$, $c^{2px} - b^{2px} > 0$; $\dfrac{A}{B} = \left(\dfrac{b}{c}\right)^{2m-4p} < 1$, $A-B < 0$, donc la différence sera négative, c'est-à-dire que la première parenthèse sera moindre que la seconde.

Si $c < b$, $c^{2px} - b^{2px} < 0$; $\dfrac{A}{B} \cdot \ldots\ldots > 1$, $A-B > 0$, la différence sera encore négative ; donc $T < T'$.

Or $m < 2n$; la seconde série a plus de termes que la première ; chacun de ses termes surpasse celui de la série qui lui correspond, donc $a^{\frac{m}{n}} < b^{\frac{m}{n}} + c^{\frac{m}{n}}$ quand $\dfrac{m}{n} < 2$.

Cas de l'exposant négatif.

$$a^{-\frac{m}{n}} < b^{-\frac{m}{n}} + c^{-\frac{m}{n}} \text{ quel que soit } \frac{m}{n}.$$

On a $$\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} \;\ldots\; \frac{1}{b^{\frac{m}{n}}} + \frac{1}{c^{\frac{m}{n}}},$$

ou $$b^{\frac{m}{n}}\, c^{\frac{m}{n}} \;\ldots\ldots\; a^{\frac{m}{n}}\, b^{\frac{m}{n}} + a^{\frac{m}{n}}\, c^{\frac{m}{n}},$$

or $a^2 = b^2 + c^2$, donc a est $> b$, a est $> c$;

donc $$a^{\frac{m}{n}}\, b^{\frac{m}{n}} > b^{\frac{m}{n}}\, c^{\frac{m}{n}},\quad a^{\frac{m}{n}}\, c^{\frac{m}{n}} > b^{\frac{m}{n}}\, c^{\frac{m}{n}};$$

donc $$2b^{\frac{m}{n}}\, c^{\frac{m}{n}} < a^{\frac{m}{n}}\, b^{\frac{m}{n}} + a^{\frac{m}{n}}\, c^{\frac{m}{n}};$$

donc à fortiori

$$b^{\frac{m}{n}}\, c^{\frac{m}{n}} < a^{\frac{m}{n}}\, b^{\frac{m}{n}} + a^{\frac{m}{n}}\, c^{\frac{m}{n}}.$$