

GUY

Réponse du capitaine Guy à M. Finck, sur la règle proposée par ce dernier, pour abrégier la division approximative. Preuve qu'elle est moins simple et moins complète que celle publiée dans le traité de la division abrégée

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 5 (1846), p. 460-470

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1846_1_5_460_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1846, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

RÉPONSE DU CAPITAINE GUY A M. FINCK,

Sur la règle proposée par ce dernier , pour abréger la division approximative. — Preuve qu'elle est moins simple et moins complète que celle publiée dans le traité de la division abrégée ().*

Monsieur le Rédacteur ,

J'avais lu en 1845 , dans le tome IV , page 328 et 658 des *Nouvelles Annales de mathématiques*, un théorème sur la division , dû aux travaux de l'honorable M. Finck , savant professeur de l'École d'artillerie de Strasbourg. Ce théorème est assurément intéressant , comme le sont d'ailleurs toutes les vérités mathématiques ; aussi , bien que je misse la règle d'opération qu'on serait tenté d'appuyer sur lui , pour effectuer la division approximative par abréviation , fort au-dessous de celle que j'ai publiée antérieurement moi-même , je m'abste-

(*) Chez Mathias (Augustin) , libraire , quai Malaquais , 15. Prix , 1 fr. 50 c.

nais néanmoins de mettre le public dans la confiance de mon sentiment.

Il en eût toujours été ainsi, monsieur, si vous n'aviez eu la malencontreuse idée de dire dans la livraison de mars 1846, page 131 : « Il serait à désirer qu'on eût une théorie » analytique de toutes les approximations usitées en arithmétique, surtout pour celles de Fourier et de M. Guÿ. » Mais ce vœu assurément bien légitime paraît avoir choqué la susceptibilité scientifique de l'honorable M. Finck, puisque je lis dans la livraison de mai 1846, page 250, qu'il vous le reproche comme étant au moins le produit d'un *lapsus memoriae*, attendu, prétend-il, qu'il vous a donné dans le tome IV précité une théorie analytique de la division abrégée, avec une règle plus simple et plus complète que celle de M. Guy.

Mis ainsi en scène d'une façon fort inattendue, et je puis ajouter, peu agréable, je ne me crois plus tenu à la réserve que je m'étais imposée jusqu'à ce moment. Je reprends donc mes justes droits de critique pour établir qu'il y a au moins autant d'erreurs et de prétentions non justifiées que de lignes dans le passage que j'ai souligné; et comme vous avez admis l'attaque, monsieur, j'ose compter sur votre obligeance pour donner aussi asile à la défense, sans que j'aie besoin pour cela de faire appel à votre loyauté. L'intérêt scientifique exige d'ailleurs qu'il en soit ainsi : il ne serait pas bien, en effet, monsieur, que l'opinion de vos jeunes lecteurs fût exposée à se fourvoyer par un excès de confiance dans l'affirmation du savant professeur de Strasbourg.

Pour entrer immédiatement en matière, je dis en premier lieu que M. Finck aurait dû se borner à vous rappeler qu'il avait donné une théorie analytique de sa division abrégée, et non de la division abrégée; cette observation, vous l'avez déjà faite vous-même, monsieur, dans cette livraison de mai

1846, à la page 252; aussi j'ajoute seulement qu'elle était parfaite en justesse et en justice.

En deuxième lieu, au contraire de M. Finck qui se borne à *affirmer*, lui, que sa règle est à la fois plus simple et plus complète que la mienne, et en considération de ce qu'une affirmation, de quelque haut qu'elle vienne, est une monnaie de peu d'aloi dans la région des sciences mathématiques, je vais *démontrer*, moi, n'en déplaise au savant professeur, que, dans les applications, sa règle est moins simple, que loin d'être plus complète, elle n'est pas même complète; et enfin, si l'on veut bien me permettre ici de m'écarter un peu du principe que la réaction doit être égale à l'action, je démontrerai de plus que la règle de M. Finck est illogique, venant après la mienne, et en raison du but que tout calculateur se propose d'atteindre. Remarquez bien, monsieur, que je parle de sa règle d'opérations et non de son théorème qui établit une vérité mathématique incontestable.

Premièrement. La règle de M. Finck n'est ni simple ni maniable dans la pratique. Sans doute elle se formule, comme la mienne, en termes extrêmement simples; mais ceci ne prouve qu'une chose, c'est qu'il ne faut pas toujours se fier aux apparences.

Je pose un principe avoué de tous, que pour qu'une règle d'opération soit véritablement simple et maniable, il faut qu'elle puisse fonctionner avec facilité dans tous les cas de division qui peuvent se présenter; non les cas qui ne seraient jamais que de pure speculation et ne valent guère la peine d'être recherchés quand il ne s'agit que d'approximation. Cela dit, et pour prendre un exemple, je suppose, pour fixer les idées, un diviseur décimal de 100 chiffres, et un dividende également décimal, mais tel qu'il ne puisse y avoir qu'un seul chiffre à la partie entière du quotient; on demande les *millièmes*, partant quatre chiffres.

En suivant la règle de M. Finck, il faudrait donc faire la somme des chiffres du diviseur, en commençant par la droite et s'avancant vers la gauche, jusqu'à ce que les chiffres de gauche non encore entrés dans la somme expriment un nombre, le plus petit possible, mais plus grand toutefois que la somme à laquelle on serait parvenu; ce nombre de gauche serait le dernier diviseur obligé. M. Finck, dans l'exemple que je suppose, aurait-il par hasard la patience de faire une telle somme qui pourrait embrasser, selon les circonstances, 99, 98, 97 ou 96 chiffres? ce serait là assurément un dévouement bien admirable, mais aussi ce serait un acte peu raisonnable, puisque, d'une part, la chose n'est pas nécessaire, et que d'autre part, il ne faut jamais perdre de vue que la probabilité d'opérer juste est en raison inverse de la contention d'esprit du calculateur.

Si la formule si simple du *double du nombre de chiffres à trouver* que j'ai publiée dans ma division abrégée, n'était pas encore connue du public, et qu'il n'y eût que la règle de M. Finck à la disposition du calculateur (*), j'opérerais, moi, non d'après cette règle, mais d'après un corollaire qui ressort ouvertement du théorème qu'il a démontré; c'est-à-dire que je remplacerais la *somme* des chiffres par le *nombre* de chiffres, nombre que j'aurais soin d'ailleurs de multiplier par 10; ainsi, je compterais au diviseur, en allant de droite à gauche par 10, 20, 30, jusqu'à ce que j'arrive à lire sur la gauche de ce diviseur un nombre le plus petit possible, mais plus grand néanmoins que le dernier nombre que j'aurais énoncé en comptant de cette façon. Je sais bien qu'en agissant ainsi, je serais souvent exposé à prendre un dernier diviseur un peu plus élevé; que, par voie de conséquence, mon diviseur d'entrée et les diviseurs successifs pourraient

(*) La règle de M. Crosson serait encore préférable à la sienne (p. 244).

être eux-mêmes plus élevés que les circonstances ne l'exigeraient; mais vous conviendrez, monsieur, que cet inconvénient est bien minime, lorsqu'on vient à le comparer à cette obligation effrayante que nous impose M. Finck, de faire la somme des chiffres du diviseur.

Voyons maintenant comment on s'y prendrait dans le même exemple choisi pour opérer, d'après ma méthode, jugée par M. Finck si inférieure à la sienne.

Puisqu'on ne veut ici que quatre chiffres au quotient, on dirait 2 fois 4 font 8; et si le premier chiffre à gauche du diviseur était 9, ce serait lui qui serait le dernier diviseur obligé; s'il était plus petit que 9, ce seraient alors les deux chiffres de gauche qui devraient former le dernier diviseur obligé; on compterait ensuite trois chiffres à partir de ce dernier diviseur, puisqu'on n'en veut déterminer que quatre au quotient, et on bifferait tous les autres en une seule fois, fussent-ils un million ou plus; les quatre ou cinq qui resteraient formeraient le diviseur d'entrée.

Quelle est la règle la plus simple des deux, monsieur, dans l'hypothèse surtout où le diviseur donné aurait un million de chiffres? Vous avez sous les yeux les deux termes de comparaison, vous pouvez prononcer. Mais comment M. Finck, que la science compte parmi ses plus habiles interprètes, n'a-t-il pas fait lui-même un rapprochement aussi simple, alors qu'il avoue avoir pris connaissance de ma règle? Comment? c'est qu'il était aveuglé par un amour trop excessif pour son œuvre.

Secondement. La règle de M. Finck n'est pas complète, au lieu que la mienne l'est. Un exemple va vous prouver ceci immédiatement.

On demande le quotient de $\frac{\sqrt{2}}{\pi} = \frac{1,4\dots}{3,1\dots}$, avec quatorze décimales.

Comment M. Finck s'y prendra-t-il pour faire la somme des chiffres que le diviseur a sur sa droite, puisque le nombre de décimales de ce diviseur est ici indéfini? Comment s'y prendra-t-il pour supprimer en une fois sur la droite du dividende autant de chiffres qu'il doit y en avoir de biffés au diviseur dans tout le cours de l'opération, puisqu'il ne connaît pas ce nombre, et que son théorème ne s'applique pas à ce cas, qui peut cependant se présenter à tout instant?

Par ma méthode au contraire, monsieur, il n'y a rien de plus simple : on dit 2 fois 14 font 28, dès lors 31 est le dernier diviseur obligé; on compte encore 13 chiffres à partir de ce dernier diviseur, puisqu'on n'en veut trouver que 14 au quotient, et on biffe tous les autres. Passant au dividende, on prend sur sa gauche un nombre capable de contenir le diviseur d'entrée et on biffe tous les autres.

Quelle est la règle la plus complète des deux, monsieur? Mais, en vérité, cela ne fait pas même question.

Troisièmement. La règle de M. Finck, ai-je dit, est illogique. Voilà assurément une expression hardie, et au premier abord un peu vague; mais je vais la déterminer en même temps que la justifier :

N'est-il pas vrai, monsieur, que le but du calculateur, lorsqu'il opère par abréviations, est d'arriver le plus promptement possible, c'est-à-dire de diminuer le travail, la contention d'esprit, source si dangereuse d'erreurs, au moyen de l'unique sacrifice de cette partie de la vérité qui n'importe pas aux besoins de la vie sociale, ni même à ceux de la spéculation scientifique? Or, je vous le demande, où M. Finck place-t-il son *criterium*, ou si vous aimez mieux, sa *condition*, pour satisfaire à cet énoncé? Dans un dernier diviseur qui doit être le plus petit possible, tout en étant plus grand que la somme des chiffres qu'il y aura encore sur sa droite. Mais lorsque le diviseur donné est un nombre dé-

cimal indéfini, M. Finck l'arrêtera-t-il de son autorité privée? Je le veux bien. Mais où? Et pourquoi ici plutôt que là, alors qu'il n'en a pas justifié?

Remarquez d'ailleurs, monsieur, même à l'égard d'un diviseur donné limité, que soit que l'on veuille trouver au quotient... 4000, 400, 40, 4 chiffres, le dernier diviseur de M. Finck reste toujours le même; son diviseur d'entrée et ses diviseurs successifs sont par conséquent les mêmes aussi, car M. Finck, vous le savez, n'a aucun égard au nombre de chiffres à trouver; or vous devez juger théoriquement et abstractivement qu'en agissant ainsi on s'astreindrait parfois à opérer avec des diviseurs monstrueux, alors que de très-petits seraient cependant suffisants.

Je dis, moi, que la logique place évidemment le véritable criterium de l'opération dans une certaine fonction du nombre de chiffres à trouver, et je le prouve : quel est en effet, le rôle que doit jouer le dernier diviseur, tant dans le procédé de M. Finck que dans le mien (*)? N'est-ce pas de contenir dans des limites déterminées l'influence fâcheuse que pourraient exercer sur le quotient les accroissements successifs qu'auraient reçus les dividendes partiels, par défaut de soustraction? Or n'est-il pas manifeste que ces accroissements seront plus grands ou plus petits, pour une même division, selon que l'on effectuera plus ou moins de divisions partielles? Ce nombre de divisions partielles n'est-il pas d'ailleurs le même que le nombre de chiffres que l'on se propose de trouver au quotient? Je dis donc avec la logique que c'est sur une fonction de ce dernier nombre qu'il faut faire reposer le criterium de l'opération et non point sur la somme

(*) Le procédé de M. Finck diffère du mien en ce qu'il ne conserve pas même la retenue qui proviendrait du produit du chiffre barré au diviseur, ce qui augmente gratuitement les dividendes partiels; il en diffère aussi surtout par la formule de direction, ou ce que j'appelle ici le criterium.

des chiffres ni même sur un multiple du nombre de chiffres du diviseur, car cela pourrait exposer parfois, comme vous l'avez vu, à de véritables travaux d'Hercule. La fonction dont je parle se calcule d'ailleurs sur l'exemple de division qui donnerait lieu à l'accroissement maximum, et vous savez que c'est le double du nombre de chiffres à trouver, alors qu'on a soin de conserver la retenue.

Je crois avoir suffisamment prouvé, M. le rédacteur, tout ce que j'avais avancé, en commençant cette fâcheuse polémique. Si j'y ai mis quelque chaleur, c'est que j'avais ma méthode à défendre; et je devais d'autant moins y faillir que, sur le rapport de deux de ses membres, l'Académie des sciences m'avait fait l'honneur de la déclarer un perfectionnement utile apporté à une règle usuelle. Sans doute, cet illustre suffrage n'empêche pas d'essayer de faire mieux; plusieurs l'ont déjà tenté (*), car chacun peut espérer qu'il lui sera donné d'apporter un perfectionnement nouveau à un perfectionnement déjà reconnu; peut-être M. Finck y parviendra-t-il une autre fois, bien que la chose doive paraître peu probable, après les explications que j'ai données sur le criterium logique. Dans tous les cas, s'il est permis de se dire à soi-même qu'on a mieux fait, puisque nous sommes hommes et que nous avons chacun nos faiblesses, il faut du moins en être dix fois sûr, avant de le proclamer publiquement. Si le savant professeur avait suivi cette règle de conduite, il ne m'aurait pas mis dans la nécessité toujours pénible de discuter son œuvre, et d'établir ici, aux yeux de tous qu'elle est loin de posséder les mérites dont il l'a paternellement gratifiée.

(*) Avant la publication de la *Division abrégée*, ce point de la science si important pour les calculateurs était négligé; on s'en tenait aux règles défectueuses enseignées par quelques auteurs classiques. Aujourd'hui que de nouveaux efforts ne paraissent pas nécessaires, chacun apporte sa formule. Serait-on fâché qu'une règle pratique fût sortie d'ailleurs que du professorat?

Puisque j'en suis sur ce chapitre, M. le rédacteur, j'aurai l'honneur de vous prier, au cas où vous le jugeriez agréable à vos nombreux lecteurs, de me laisser consigner, dans vos savantes annales, la règle à suivre pour abrégier l'opération de la division, d'après ma méthode. Sans doute, cette règle se trouve rapportée dans mon petit ouvrage; mais comme, en le publiant, j'avais aussi pour but de démolir les procédés défectueux qu'on avait enseignés jusqu'alors, cet ordre d'idées, qui avait ses embarras, m'a entraîné à ne l'exposer que par parties détachées. La voici ramassée en un seul faisceau, et je me sers du langage algébrique que j'ai tenu à éviter ailleurs, dans l'intention d'être plus accessible à tous.

Division abrégée (par la méthode d'accroissements).

Règle générale. Soit n le nombre de chiffres du diviseur donné, au cas où il soit limité; n' le nombre de chiffres qu'on veut trouver au quotient. On prendra le double de n' , et on marquera, sur la gauche du diviseur, le nombre le plus petit possible, mais plus grand que $2 n'$. Ce nombre ainsi marqué est le dernier diviseur obligé, si la division par abréviations peut avoir lieu immédiatement. A partir de ce dernier diviseur, on comptera encore $n' - 1$ chiffres, et s'il y en a davantage, ce qui est le signe certain que l'opération peut s'effectuer immédiatement, on biffera tous les autres, en quelque nombre qu'ils se trouvent d'ailleurs; l'ensemble des chiffres qui resteront formera le diviseur d'entrée.

Passant alors au dividende, on prendra un nombre capable de contenir le diviseur d'entrée, et on biffera également tous les autres (*). En formant le premier produit partiel à re-

(*) S'il n'y avait pas assez de chiffres, ce qui serait le signe que le quotient ne

trancher ; on aura soin , s'il y a lieu , de conserver la retenue qu'aurait donnée le premier chiffre biffé qui suit le diviseur d'entrée.

Pour effectuer la division partielle suivante , on biffera le chiffre de droite du diviseur d'entrée , et en formant le nouveau produit partiel à retrancher , on conservera également , s'il y a lieu , la retenue qui serait provenue du chiffre biffé. On continuera ainsi jusqu'à la fin de l'opération ; l'erreur commise sur le quotient sera en + ou en — et $<$ que deux unités de l'ordre sur lequel on se sera arrêté (*).

S'il ne se trouvait que $n'-1$ chiffres sur la droite du dernier diviseur marqué , il n'y aurait alors rien à biffer ; dans ce cas , le premier chiffre du quotient ne pourrait s'obtenir que par la division ordinaire parfaite ; mais les suivants pourraient l'être , eux , par abréviation , en biffant successivement un chiffre sur la droite du diviseur donné.

Enfin , s'il y avait moins de $n'-1$ chiffres sur la droite du dernier diviseur marqué , on pourrait chercher par la division ordinaire les quelques chiffres qui seraient nécessaires pour que le nombre de ceux restant à trouver encore au quotient , permit de se retrouver dans la situation normale ; mais , s'il y avait plus de *trois* ou *quatre* chiffres à déterminer ainsi , il serait bien plus avantageux de renoncer à la division vulgaire , et de procéder par périodes de divisions abrégées , au moyen du rétablissement de la vérité dans l'avant-dernier reste-dividende de chacune d'elles , ainsi

doit pas avoir de partie entière , on y suppléerait par des zéros , et l'on écrirait aussi les zéros nécessaires à la gauche des chiffres significatifs trouvés au quotient. Dans ce cas , l'erreur serait en + ou en — , mais $<$ une unité de l'ordre sur lequel on se serait arrêté , puisqu'on n'aurait supprimé aucune figure dans le dividende.

(*) Ai je besoin de dire que si l'on veut l'erreur plus petite qu'une unité d'un ordre déterminé , celui des millièmes par exemple , il n'y a qu'à disposer le dividende et le diviseur pour trouver un chiffre de plus , c'est-à-dire pour s'arrêter sur les dix-millièmes ; l'erreur alors étant $<$ 0,0002 sera *d* fortiori $<$ 0,001.

que je l'ai expliqué dans mon petit traité de la division abrégée (*).

Note. Le théorème de M. Finck est très-beau, indépendamment des applications qu'on pourrait en faire. On peut s'en servir commodément pour abrégé la division, dans certains cas particuliers, dans des exemples de choix. Mais généralement la méthode de M. Guy est préférable, est plus *complète*, ne laisse rien à désirer. J'accueillerais avec plaisir une exposition analytique de cette méthode remarquable, qui a rectifié des erreurs et comblé une lacune; l'exposition que j'ai trouvée trop longue, diffuse, ne me satisfait pas. Du reste, on trouvera peut-être que le capitaine a critiqué avec une susceptibilité trop paternelle, la trop paternelle susceptibilité du professeur. Libre à chacun de penser de ses œuvres ce qu'il veut. N'est-ce pas le public qui juge en dernier ressort?

Tm.