NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

EUGÈNE JUBÉ

Note sur la détermination du rapport de la circonférence au diamètre, par la méthode des isopérimètres

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 5 (1846), p. 42-44

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1846_1_5__42_1>

NOTE

Sur la détermination du rapport de la circonférence au diamètre, par la méthode des isopérimètres.

PAR M. JUBÉ (EUGÈNE),
Professeur de mathématiques spéciales au collége royal de Saint-Omer.

—

Quand on cherche à déterminer le rapport de la circonférence au diamètre par la méthode des isopérimètres, il me semble qu'on arrive plus promptement à une approximation donnée que lorsqu'on emploie la méthode des périmètres ou celle des surfaces.

On reconnaît d'abord immédiatement que la circonférence qui est égale au périmètre d'un polygone régulier donné a son rayon compris entre ceux des cercles auxquels le polygone peut être inscrit et circonscrit.

Soient r,R les rayons des cercles inscrit et circonscrit à un polygone régulier de p côtés, et égaux chacun à A : ceux du polygone régulier de même périmètre, dont le nombre des côtés est double, seront, comme on sait,

$$r' = \frac{1}{2}(R + r), R' = \sqrt{R.r'},$$

et au moyen de ces formules on peut calculer les valeurs de ces rayons pour un polygone régulier isopérimètre, ayant $2^n.p$ côtés. Nommons les r_n, R_n.

A mesure que le nombre des côtés augmente, les rayons des cercles inscrits augmentent, et ceux des cercles circonscrits diminuent; on voit en outre que les polygones ayant des angles de plus en plus grands, et des côtés de plus en plus petits, s'approchent de la circonférence qui leur est isopérimètre.

En nommant ρ le rayon de celle-ci, on aura toujours quel que soit n, $R_n > \rho > r_n$. Mais on peut prendre n assez grand pour que $R_n - r_n$ soit plus petit que toute quantité donnée. Car si a représente le côté du polygone régulier,

$$R^2_n - r^2_n = \frac{a^2}{4},$$

d'où

$$R_n - r_n = \frac{a^2}{4(R_n + r_n)},$$

expression dont le numérateur a pour limite 0, et le dénominateur 8ρ.

Quand on prendra R_n ou r_n pour valeur de ρ, l'erreur commise sera moindre que $\frac{a^2}{4(R_n + r_n)}$, et comme $a = \frac{A}{2^n}$, pour avoir une approximation à moins de $\frac{1}{10^m}$, il faut que n satisfasse à la condition

$$\frac{A^2}{2^{2n}.4(R_n + r_n)} < \frac{1}{10^m}.$$

Comme $R_n > r_n > r$ on pourra poser :

$$\frac{A^2}{2^{2n}8r} \overset{=}{<} \frac{1}{10^m}.$$

Supposons maintenant que A soit le côté d'un hexagone régulier, et prenons ce côté pour unité ; nous aurons :

$$R = 1, r = \sqrt{\frac{3}{4}},$$

de sorte qu'on devra avoir :

$$\frac{1}{2^{2n}.8\sqrt{\frac{3}{4}}} \overset{=}{<} \frac{1}{10^m} \text{ et } n \overset{=}{>} \frac{m - L8\sqrt{\frac{3}{4}}}{2L.2}.$$

Mais comme $\sqrt{\frac{3}{4}} > \frac{1}{2}$, il suffira d'avoir $n \overset{=}{>} \frac{m - L.4}{L.4}$,

et puisque $L.4 > 0{,}6$, on pourra prendre :

$$n \overset{=}{>} \frac{m}{0{,}6} - 1 \quad \text{ou} \quad \frac{5}{3}m - 1.$$

En donnant à n cette valeur, on sera certain d'avoir dans l'évaluation de ρ les $m - 1$ premiers chiffres exacts, et le m^e fautif au plus d'une unité. Pour avoir le rapport de la circonférence au diamètre, il faudra diviser le demi-périmètre 3 par cette valeur de ρ, et on sait qu'alors le quotient a autant de chiffres exacts qu'il y en a dans ρ. Le rapport π sera donc calculé à moins de $\frac{1}{10^m}$.

Pour arriver à cette approximation il aura donc fallu considérer n polygones outre le premier. Ce nombre est inférieur à celui que donne la méthode des périmètres ou celle des surfaces (*Voir* page 160, tome IV), et en outre les formules auxquelles conduisent ces dernières méthodes sont moins commodes à calculer que celles dont nous avons fait usage.