

MENTION

Distance du centre du cercle inscrit au point de rencontre des hauteurs dans un triangle rectiligne

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 5 (1846), p. 403-404

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1846_1_5__403_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1846, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

DISTANCE

du centre du cercle inscrit au point de rencontre des hauteurs dans un triangle rectiligne.

PAR M. MONTIGNON,
élève en spécialité.

Soit d cette distance, je dis qu'on a :

$$d^2 = 4R^2 + 2r^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2},$$

D , Δ désigneront les mêmes distances que dans l'article de la page 193 de ce volume, et δ sera la distance du centre du cercle inscrit au centre du cercle circonscrit.

Soient A , B , C , G (*fig. 42*) le centre du cercle inscrit, le centre du cercle circonscrit, le point de rencontre des hauteurs, le centre de gravité.

Le point G est, comme on le sait, au tiers de BC ; d'où la relation, remarquant que $BC = 3D$,

$$9\Delta^2 = 6\delta^2 + 3d^2 - 18D^2$$

ou $3\Delta^2 = 2\delta^2 + d^2 - 6D^2,$

ce qui donne

$$d^2 = 3\Delta^2 - 2\delta^2 + 6D^2.$$

Or $\Delta^2 = r^2 + \frac{(p-a)^2 + (p-b)^2 + (p-c)^2}{3},$

$$- \frac{a^2 + b^2 + c^2}{9} = r^2 + \frac{a^2 + b^2 + c^2 - p^2}{3} - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{9},$$

$$\delta^2 = R^2 - 2Rr, \quad D^2 = R^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{9}.$$

(Voyez page 196.)

Substituant dans la valeur de d^2 , il vient :

$$d^2 = 3r^2 - p^2 + 4R^2 + 4Rr = 4R^2 + 2r^2 + r^2 - p^2 + 4Rr.$$

$$r^2 = \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p},$$

$$\begin{aligned} \text{d'où} \quad r^2 - p^2 &= \frac{(p-a)(p-b)(p-c) - p^3}{p} \\ &= -\frac{2p^3 + ab + ac + bc - abc}{p}; \end{aligned}$$

remarquant que $4Rr = \frac{abc}{p}$ il viendra pour d^2 :

$$d^2 = 4R^2 + 2r^2 - 2p^2 + ab + ac + bc = 4R^2 + 2r^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2},$$

puisque

$$p^2 = \left(\frac{a+b+c}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4} + \frac{ab + ac + bc}{2}.$$

Comme corollaire, nous pouvons prouver que le cercle passant par les milieux des côtés d'un triangle est tangent au cercle inscrit et aux cercles ex-inscrits.

Le centre de ce cercle (considérations sur le triangle rectiligne, t. II, p. 197) est situé au milieu I de BC, et son rayon est $\frac{R}{2}$.

Dans le triangle BAC, on aura :

$$2\overline{AI}^2 = \delta^2 + d^2 - \frac{9D^2}{2}$$

ou remplaçant d^2 par sa valeur ainsi que δ^2 et D^2 ,

$$2\overline{AI}^2 = \frac{R^2}{2} - 2rR + 2r^2 = 2\left(\frac{R}{2} - r\right)^2.$$

On le prouverait de même pour les cercles ex-inscrits, seulement on aurait pour d'^2 (d' étant la distance analogue à d , et α le rayon du cercle ex-inscrit) :

$$d'^2 = 4R^2 + 2\alpha^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}, \quad \delta'^2 = R^2 + 2R\alpha.$$