AYNARD

Note sur le sinus de la moitié d'un arc

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 5 (1846), p. 399-401

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1846_1_5__399_1>

NOTE

Sur le sinus de la moitié d'un arc,

PAR M. AYNARD,
Professeur de mathématiques.

Lorsque l'on donne le sinus d'un arc, et que l'on cherche à exprimer en fonction de cette unique donnée le sinus et le cosinus de sa moitié, on obtient, en combinant les deux équations,

$$2\sin\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\alpha=\sin\alpha,$$

$$\cos^2\frac{1}{2}\alpha+\sin^2\frac{1}{2}\alpha=1;$$

les deux relations suivantes :

$$\left.\begin{aligned}\sin\frac{1}{2}\alpha+\cos\frac{1}{2}\alpha&=\sqrt{1+\sin\alpha},\\ \sin\frac{1}{2}\alpha-\cos\frac{1}{2}\alpha&=\sqrt{1-\sin\alpha};\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

d'où l'on déduit facilement les valeurs cherchées :

$$\sin\frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{1+\sin\alpha} + \frac{1}{2}\sqrt{1-\sin\alpha},$$

$$\cos\frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{1+\sin\alpha} - \frac{1}{2}\sqrt{1-\sin\alpha}.$$

Aucune difficulté ne se présente lorsque l'on suppose, ainsi que l'énoncé du problème le comporte, que l'arc α est donné par son sinus ; chacune des expressions a quatre valeurs à cause de la duplicité des signes dont chacun des radicaux peut être affecté, et l'on vérifie trigonométriquement qu'il en doit être ainsi. Mais, si l'arc α est donné par lui-même conjointement avec son sinus, il est clair qu'une seule détermination doit être acceptée pour le sinus de sa moitié et il reste à trouver le signe qui, dans ce cas, affecte chaque radical, ou, en d'autres termes, à préciser, dans l'équation (2), le signe des sommes

$$\sin\frac{1}{2}\alpha + \cos\frac{1}{2}\alpha, \quad \text{et} \quad \sin\frac{1}{2}\alpha - \cos\frac{1}{2}\alpha.$$

On peut y parvenir plus simplement qu'on ne le fait ordinairement par les considérations suivantes. On a :

$$\sin\frac{1}{2}\alpha + \operatorname{Cos}\frac{1}{2}\alpha = \sin\frac{1}{2}\alpha + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\alpha\right),$$

$$\sin\frac{1}{2}\alpha - \cos\frac{1}{2}\alpha = \sin\frac{1}{2}\alpha - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\alpha\right),$$

ou, en développant les seconds membres de ces égalités d'après les formules qui servent à transformer en un produit, soit la somme, soit la différence de deux sinus :

$$\sin\frac{1}{2}\alpha + \cos\frac{1}{2}\alpha = 2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right),$$

$$\sin\frac{1}{2}\alpha - \cos\frac{1}{2}\alpha = 2\cos\frac{\pi}{4}\sin\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right).$$

On voit par là que les signes des radicaux sont ceux de

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4}\right) \quad \text{et de} \quad \sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4}\right);$$

mais, puisque l'arc α est connu, l'arc $\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4}$ pourra être calculé ; l'on saura dans quel quadrant tombe son extrémité, et par suite le signe de son sinus et de son cosinus. Toute ambiguïté relative aux signes des radicaux disparaîtra par là même (*V*. p. 49).