NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

DROT

Note sur la résolution d'une classe particulière d'équations à plusieurs inconnues

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 5 (1846), p. 389-394

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1846_1_5__389_0>

NOTE

sur la résolution d'une classe particulière d'équations à plusieurs inconnues.

PAR M. DROT,
Admissible à l'Ecole normale.

Cette note est relative à la résolution des équations à plusieurs inconnues, dans chacune desquelles les inconnues ont les mêmes exposants et les mêmes coefficients; c'est-à-dire que ces équations peuvent être toujours ramenées à la forme

$$x^m + y^m + z^m + u^m + \ldots . = a.$$

1° Je supposerai d'abord qu'il s'agisse de deux équations à deux inconnues, de la forme

$$x^m + y^m = a$$
$$x^n + y^n = b.$$

Je prendrai pour inconnues auxiliaires la somme $x+y=u$ des racines, et leur produit $xy=v$. Il est clair que u et v étant connus, x et y seront les deux racines de l'équation du second degré $X^2 - uX + v = 0$. Or il est facile d'obtenir deux relations entre u et v qui les feront connaître. En effet, élevons les deux membres de l'équation $x+y=u$ à la puissance m, il viendra

$$x^m + y^m + mxy(x^{m-2} + y^{m-2}) +$$
$$+ \frac{m(m-1)}{1.2} x^2y^2 (x^{m-4} + y^{m-4}) + \ldots\ldots = u^m.$$

Si m est pair, le premier nombre se terminera par

$$+ \frac{m(m-1) \ldots\ldots \left(\frac{m}{2}+1\right)}{1.2.3.\ldots \frac{m}{2}} x^{\frac{m}{2}} y^{\frac{m}{2}};$$

S'il est impair, ce sera par

$$+\frac{m(m-1)\ldots\ldots\left(m-\frac{m-1}{2}+1\right)}{1.2.3.\ldots\ldots\frac{m-1}{2}}\,x^{\frac{m-1}{2}}\,y^{\frac{m-1}{2}}\,(x^2+y^2).$$

L'équation $(x+y)^m=u^m$ devient donc ainsi :

$$a+mv\,(x^{m-2}+y^{m-2})+\frac{m(m-1)}{1.2}v^2(x^{m-4}+y^{m-4})+\ldots.=u^m.$$

Or $x^{m-2}+y^{m-2}$, $x^{m-4}+y^{m-4}$, ... pourront toujours être exprimés en fonction d'une somme de puissances de x et de y plus petites; car, élevant les deux membres de $x+y=u$ successivement aux puissances $m-2$, $m-4$, ... on pourra en tirer $x^{m-2}+y^{m-2}$, $x^{m-4}+y^{m-4}$, ... en fonction de u, de v, et de binômes plus simples que les précédents. En continuant ainsi, ces binômes pourront être exprimés en fonction de $x+y$ ou de u, ou de v; de sorte que l'équation $(x+y)^m=u^m$ deviendra :

$$a+mvf\,(u,v)+\frac{m(m-1)}{1.2}v^2f_2\,(u,v)+\ldots\ldots\ldots\ldots=u^m,$$

c'est-à-dire en général $F_1\,(u,v)=0$.

En élevant ensuite les deux membres de $x+y=u$ à la puissance n, il viendra une autre équation $F_2\,(u,v)=0$, entre u et v. Les deux équations F_1 et F_2 détermineront souvent d'une manière facile u et v, du moins dans les cas peu compliqués.

Faisons quelques applications.

Soit à résoudre les équations

$$x+y=a$$
$$x^4+y^4=b.$$

Ici la somme des racines étant connue, il n'y a qu'à prendre pour inconnue auxiliaire le produit $xy=v$. Élevons les deux membres de $x+y=a$ à la quatrième puissance, il viendra :

$$x^4+y^4+4xy\,(x^2+y^2)+6x^2y^2=a^4,$$

ou $$b+4v\,(x^2+y^2)+bv^2=a^4,$$

en élevant les deux membres de la même équation au carré, il vient : $x^2+y^2=a^2-2v$; donc on a :

$$b+4v\,(a^2-2v)+bv^2=a^4$$

ou $$2v^2-4a^2v+a^4-b=0.$$

On tire de là : $v=a^2\pm\sqrt{a^4-\frac{a^4+b}{2}}=a^2\pm\sqrt{\frac{a^4+b}{2}}.$

Par suite $$x=\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{3a^2}{4}\pm\sqrt{\frac{a^4+b}{2}}}$$

$$y=\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{3a^2}{4}\mp\sqrt{\frac{a^4+b}{2}}}.$$

Soit encore à résoudre les équations

$$x^3+y^3=a$$
$$x^4+y^4=b.$$

Posons $x+y=u$, $xy=v$. Élevant les deux membres de $x+y=u$ successivement aux puissances 3 et 4, il vient :

$$x^3+y^3+3xy\,(x+y)=u^3,$$

ou $$a+3uv=u^3,$$

et

$x^4+y^4+4xy(x^2+y^2)+6x^2y^2=u^4$, ou $b+4v(u^2-2v)+6v^2=u^4$,

ou enfin $$2v^2-4vu^2+u^4-b=0.$$

Tirant v de la première, et remplaçant dans la seconde, l'élimination sera faite.

2° Soient maintenant les trois équations

$$x^m+y^m+z^m=a$$
$$x^n+y^n+z^n=b$$
$$x^p+y^p+z^p=c.$$

Je prendrai pour inconnues auxiliaires les expressions

$$x+y+z=u,\ xy+xz+yz=v,\ xyz=t;$$

alors x, y, z seront les trois racines de l'équation du troisième degré $X^3-uX^2+vX-t=0$, et une fois u, v, t connus, la question sera résolue. Or, en élevant les deux membres de l'équation $x+y+z=u$ à la puissance m, à la puissance n et à la puissance p, on comprend que, par des transformations semblables à celles que l'on a faites dans la première partie, on puisse arriver à des équations de la forme

$$F_1(u,v,t)=0,\ F_2(u,v,t)=0,\ F_3(u,v,t)=0,$$

qui feront connaître u, v, t.

Prenons pour application les trois équations

$$x+y+z=a$$
$$x^2+y^2+z^2=b$$
$$x^3+y^3+z^3=c.$$

Ici je dois prendre pour inconnues auxiliaires

$$xy+yz+xz=u,\ xyz=v.$$

Élevant les deux membres de $x+y+z=a$ au carré, il vient :

$$x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+xz)=a^2,$$

ou

$$b+2u=a^2.$$

Élevant ensuite les deux membres de la même équation au cube, il vient :

$$x^3+y^3+z^3+3(xy+yz+xz)(x+y+z)-3xyz=a^3,$$

ou

$$c+3au-3v=a^3.$$

La première équation donne $u=\dfrac{a^2-b}{2}$, et la deuxième,

$$v=\frac{c+\dfrac{3a(a^2-b)}{2}-a^3}{3},$$ et le problème est résolu.

Il faut bien remarquer que cette méthode ne doit être employée que dans les cas les plus généraux. Dans certains cas simples, il y aura souvent autant d'avantage à opérer autrement.

Ainsi dans le cas des équations :

$$x+y+z=a,$$
$$x^2+y^2+z^2=b,$$
$$x^3+y^3+z^3=c,$$

il y a autant d'avantage à prendre pour inconnue auxiliaire $xy=u$, et à élever successivement l'équation $x+y=a-z$ au carré et au cube, ce qui donnera finalement deux équations en u et z ; mais une des équations sera du troisième degré en z, et par conséquent ne pourra être résolue algébriquement.

Si l'on avait les équations :

$$x+y+z=a,$$
$$x^2+y^2+z^2=b,$$
$$x^4+y^4+z^4=c,$$

on pourrait trouver les valeurs des racines en employant cette dernière méthode, et en posant de plus $a-z=t$.

Si l'on avait quatre équations de la forme :

$$x^m+y^m+z^m+u^m=a,$$
$$x^n+y^n+z^n+u^n=b,$$
$$x^p+y^p+z^p+u^p=c,$$
$$x^q+y^q+z^q+u^q=d,$$

la méthode générale serait la même, et on prendrait pour inconnues auxiliaires :

$$x+y+z+u=v,$$
$$xy+yz+zu+xz+xu+yu=t,$$
$$xyz+yzu+xyu+xzu=s,$$
$$xyzu=w;$$

et x, y, z, u, seraient les quatre racines de l'équation

$$X^4 - vX^3 + tX^2 - sX + w = 0.$$

On comprend la loi de résolution pour plus de quatre équations.

Note. Cette méthode revient à trouver les coefficients d'une équation de degré n, lorsqu'on connaît les valeurs de n fonctions symétriques des racines de cette équation ; fonctions symétriques qui sont toujours exprimables en fonctions rationnelles des coefficients de l'équation, et ces nouvelles n équations sont le plus souvent plus compliquées que les équations données. Tm.