COURTOIS

Calcul de l'aire asymptotique dans l'hyperbole ordinaire

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 5 (1846), p. 385-387

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1846_1_5__385_1>

CALCUL DE L'AIRE ASYMPTOTIQUE

dans l'hyperbole ordinaire.

PAR M. COURTOIS,
Professeur de mathématiques spéciales au Collége royal de Grenoble.

On sait que pour calculer l'aire asymptotique AMNB, (*fig.* 41), on insère entre l'abscisse $OA = a$ et $OB = b$ un nombre n de moyennes proportionnelles, et la difficulté consiste à trouver la limite de l'expression

$$n\left\{\sqrt[n]{\frac{b}{a}}-1\right\}m^2 \sin\theta,$$

à mesure que n grandit (m^2 est la puissance de l'hyperbole). Je considère a et b comme faisant partie de la progression géométrique de Néper

$$\ldots\ldots 1 : (1+\alpha)^1 : (1+\alpha)^2 : (1+\alpha)^3 \ldots\ldots a \ldots\ldots b \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots 0 \,.\quad \alpha \quad .\quad 2\alpha \quad .\quad 3\alpha \quad \ldots\ldots m\alpha \,.\,.\, (n+m)\alpha \ldots$$

Ainsi :

$a=(1+\alpha)^m, \qquad b=(1+\alpha)^{m+n} \;\ldots\ldots$

puisque b est placé n rangs plus loin que a.

Comme il y a n termes entre a et b, la raison de la progression par quotient peut être désignée par

$$\sqrt[n]{\frac{b}{a}} = 1+\alpha \;\ldots\ldots$$

Donc :

$$n\left\{\sqrt[n]{\frac{b}{a}}-1\right\} = n\alpha = \text{L. } b - \text{L. } a = \text{L. } \frac{b}{a}.$$

En désignant par la simple lettre L un logarithme népérien. Donc l'aire hyperbolique est égale à

$$m^2 \sin\theta \times \text{L. } \frac{b}{a}. \qquad (1)$$

Une des abscisses a et b, ou toutes les deux pourraient être à gauche du terme 1, et en ayant égard au signe des logarithmes, on aurait toujours un résultat *analogue.* Mais on pourra toujours éviter l'emploi des logarithmes négatifs, en séparant l'aire hyperbolique en deux, limitées par l'ordonnée qui correspond à l'abscisse 1. Et, si cette aire est en entier antérieure à cette ordonnée, sans la morceler, on la comptera au rebours depuis cette ordonnée.

(*) Dire ce que c'est que la base de Néper serait ici superflu, puisque cette base est étudiée dans la théorie des logarithmes.

Le produit entier peut être regardé comme Log. $\frac{b}{a}$ pris dans la base, dont le module est $m^2 \sin \theta$.

Si l'on veut avoir des aires hyperboliques qui soient les logarithmes népériens des abscisses terminales; il faut prendre une hyperbole, pour laquelle $m^2 \sin \theta = 1$, et compter les aires asymptotiques depuis l'abscisse $a = 1$. Par exemple une hyperbole dont l'angle asymptotique est $\theta = 30°$, et dont la puissance $m^2 = 2$. Ainsi :

Le logarithme népérien d'un *nombre* a pour équivalent géométrique l'aire asymptotique d'une hyperbole, pour laquelle $m^2 \sin \theta = 1$, cette aire étant comptée depuis l'abscisse 1 jusqu'à l'abscisse égale au *nombre*.

L'hyperbole équilatère n'est donc pas la seule dont les aires asymptotiques puissent représenter les logarithmes de Néper.