TERQUEM

Enveloppe d'une perpendiculaire menée à un diamètre de l'ellipse, par l'extrémité de ce diamètre. D'après M. l'abbé Tortolini

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 5 (1846), p. 365-368

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1846_1_5__365_1>

ENVELOPPE

d'une perpendiculaire menée à un diamètre de l'ellipse, par l'extrémité de ce diamètre.

d'après M. l'abbé Tortolini (*Raccolta scientifica.* Num. 6, an 11).

—

Problème. Une ellipse étant donnée, trouver l'enveloppe d'une perpendiculaire menée à un diamètre par son extrémité.

Solution. Soit $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (1); l'équation de l'ellipse rapportée à ses axes principaux, x et y désignant un point déterminé de cette ellipse, extrémité d'un diamètre, et on aura pour la perpendiculaire menée par ce point au diamètre correspondant l'équation $Xx+Yy=x^2+y^2$ (2) où X et Y sont les coordonnées courantes de la perpendiculaire. On a

$\frac{x}{a^2}+\frac{yy'}{b^2}=0$; $X+Yy'=2x+2yy'$ où y' est la dérivée de y par rapport à x; éliminant y', il vient

$$a^2yX-b^2xY=2(a^2-b^2)xy \qquad (3);$$

éliminant x et y entre les trois équations (1), (2), (3), l'équation finale en X, Y est, d'après la théorie connue, l'équation de l'enveloppe.

Les équations (2) et (3) donnent :

$$a^2b^2X=x[y^2(a^2-b^2)+a^2b^2]$$
$$a^2b^2Y=[a^2(y^2-x^2)+2b^2x^2)y$$

faisant $x=a\cos\varphi$; $y=a\sin\varphi$; on obtient :

$$aX=\cos\varphi\,[a^2+(a^2-b^2)\sin^2\varphi]$$
$$bY=\sin\varphi\,[b^2-(a^2-b^2)\cos^2\varphi].$$

Ces équations donnent en remplaçant $\cos^2\varphi$ par $1-\sin^2\varphi$ et mettant x, y pour X, Y,

$$\left.\begin{array}{l} a^2x^2=a^4-a^2(2b^2-a^2)u^2-(a^4-b^4)u^4-(a^2b^2)^2u^6 \ (4) \\ b^2y^2=(2b^2-a^2)^2u^2+2(a^2-b^2)(2b^2-a^2)u^4+(a^2-b^2)^2u^6 \ (5) \end{array}\right\}\text{ou } u=\sin\varphi$$

$$a^2x^2+b^2y^2=a^4-(a^2-b^2)\,[2(2b^2-a^2)u^2+3(a^2-b^2)u^4]$$

résolvant par rapport à u^2, et prenant la valeur de la quantité sous le radical il vient :

$$4(a^4+b^4-a^2b^2)-3(a^2x^2+b^2y^2)=[3(a^2-b^2)u^2+2b^2-a^2]^2 \quad (6)$$

on a :

$$2a^2-b^2-(2b^2-a^2)=3(a^2-b^2);$$

donc

$$9a\,(2a^2-b^2)\,(a^2-b^2)^2-9(2b^2-a^2)\,(a^2-b^2)^2=[3\,(a^2-b^2]^3;$$

multipliant donc les valeurs de a^2x^2 et de b^2y^2 respectivement par $9(2b^2-a^2)$ et $9(2a^2-b^2)$, il vient :

$$9a^2(2b^2-a^2)x^2+9b^2(2a^2-b^2)y^2=[3(a^2-b^2)u^2+(2b^2-a^2)]^3+$$
$$+4(a^2+b^2)\,(2a^2-b^2)\,(2b^2-a^2),$$

d'où l'on tire :

$$9a^2(2b^2-a^2)x^2+9b^2(2a^2-b^2)y^2-4(a^2+b^2)(2a^2-b^2)(2b^2-a^2)=$$
$$=[3(a^2-b^2)u^2+2b^2-a^2]^3 \qquad (7)$$

L'equation (6) et (7) donne :

$$[4(a^4+b^4-a^2b^2)-3(a^2x^2+b^2y^2)]^3=[9a^2(2b^2-a^2)x^2+$$
$$+9b^2(2a^2-b^2)y^2-4(a^2+b^2)(2a^2-b^2)(2b^2-a^2)]^2$$

équation du sixième degré, celle de l'enveloppe cherchée. Développant il vient :

$$Aa^6x^6+Bb^6y^6+Ca^4b^2x^4y^2+Db^4a^2x^2y^4+Ea^4x^4+Fb^4y^4+$$
$$Ga^2b^2x^2y^2+Ha^2x^2+Ib^2y^2=K$$
$$A=B=1\ ;\ C=D=3,\ E=8b^4-a^4-8a^2b^2\ ;$$
$$F=8a^4-b^4-8a^2b^2\ ;\ G=38a^2b^2-20(a^4+b^4)\ ;$$
$$H=8b^2[a^4(a^2+b^2)-2b^4(2a^2-b^2)].\ I=8a^2[b^4(a^2+b^2)-$$
$$2a^4(2b^2-a^2)]\ ;\ K=16a^4b^4(a^2-b^2)^2.$$

Remarque 1. Si $a^2=2b^2$, ou $b^2=2a^2$, on obtient l'equation de la courbe donnée par Legendre (*Fonctions elliptiques*, t. II, p. 591), dans ces ellipses, les extrémités des petits axes sont des centres de courbure.

Remarque 2. Si $a=b$, on trouve l'equation du cercle $x^2+y^2=a^2$; et le centre comme point conjugué.

Remarque 3. Par le centre O et un point M de l'ellipse faisons passer un cercle touchant l'ellipse en M ; menant par ce point une perpendiculaire à OM, son intersection avec le cercle est évidemment le point de l'enveloppe répondant à M ; l'enveloppe est donc aussi celle des cercles ainsi décrits ; elle se compose evidemment de quatre quadrants.

Remarque 4. Les arcs de cette enveloppe s'expriment en fonctions elliptiques incomplètes de première espèce, plus une fonction algébrique qui s'anéantit lorsque l'arc est un quadrant et la fonction elliptique devient complète. Cette propriété a perdu de son importance depuis que M. Serret nous a appris à former une infinité de courbes algébriques, possédant cette propriété.