NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Théorie générale des épicycles

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 5 (1846), p. 35-42

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1846_1_5__35_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1846, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

THÉORIE GÉNÉRALE DES ÉPICYCLES.

Traduit de l'allemand de L. Raabe (Journ. de Crelle, t. I, p. 283).

—

1. Soit un cercle fixe ; si le centre d'un cercle se meut sur la circonférence du centre fixe, le second cercle se nomme *épicycle*. Si, de plus, le centre d'un troisième cercle se meut sur la circonférence du premier épicycle, ce troisième cercle se nomme *second épicycle*, et ainsi de suite ; de sorte que le $(n+1)^{ème}$ cercle est le $n^{ème}$ épicycle.

Si l'on admet de plus que le $n^{ème}$ épicycle est parcouru par un point, il s'agit de trouver la ligne décrite par ce point.

2. Nous désignerons les divers cercles par (0), (1) .... (n) ; r_0, r_1 .... r_{n+1} sont les rayons de ces cercles.

De sorte que (0) est le cercle fixe ; (1) le premier épicycle, etc.

Prenons le centre du cercle (0) pour origine des coordonnées rectangulaires x, y, z.

Soient n_0, n_1, n_2, ... n_n, les inclinaisons respectives constantes des cercles (0) .... $(n+1)$ sur le plan des xy ;

k_0, k_1, k_2, ... k_n, les angles constants que forment les traces de ces plans sur le plan xy, avec l'axe des x ;

α_0, α_1, α_2, ... α_n, les angles variables de ces traces, à une époque donnée, avec les rayons allant aux centres mobiles r_0, r_1, ... r_n ;

Enfin, x_0, y_0, z_0 ; x_1, y_1, z_1, les coordonnées des centres, extrémités de ces rayons.

3. Les formules de la trigonométrie sphérique donnent :

$$x_0 = r_0[\cos\alpha_0 \cos k_0 + \sin\alpha_0 \sin k_0 \cos n_0],$$
$$y_0 = r_0[\cos\alpha_0 \sin k_0 - \sin\alpha_0 \cos k_0 \cos n_0],$$
$$z_0 = r_0 \sin\alpha_0 \sin n_0,$$
$$x_1 - x_0 = r_1[\cos\alpha_1 \cos k_1 + \sin\alpha_1 \sin k_1 \cos n_1],$$
$$y_1 - y_0 = r_1[\cos\alpha_1 \sin k_1 - \sin\alpha_1 \cos k_1 \cos n_1],$$
$$z_1 - z_0 = r_1 \sin\alpha_1 \sin n_1,$$
etc.

Faisons :

$$\operatorname{tang} A_s = \frac{\cot k_s}{\cot n_s}; \quad \sin a_s = \frac{\cos k_s}{\sin A_s};$$

s ayant les valeurs depuis $s = 1$ jusqu'à $s = n$,

$$\operatorname{tang} B_s = -\frac{\operatorname{tang} k_s}{\cos n_s}; \quad \sin b_s = \frac{\sin k_s}{\sin B_s};$$
$$\operatorname{tang} C_s = 0, \qquad \sin c_s = \sin n_s.$$

On déduit de ces équations

$$x_n = r_0 \sin a_0 \sin(A_0 + \alpha_0) + r_1 \sin a_1 \sin(A_1 + \alpha_1) \ldots$$
$$\ldots + r_n \sin a_n \sin(A_n + \alpha_n).$$

Changeant a en b et A en B, on a la valeur de y_n; changeant a en c et A en C, on obtient la valeur de z_n.

4. Soient V_0, V_1, V_2.... les vitesses de r_0, r_1, r_2...., et V_n la vitesse du point dans le dernier épicycle, on aura :

$$\frac{V_s}{V_0} = \frac{r_s \dfrac{d\alpha_s}{dt}}{r_0 \dfrac{d\alpha_0}{dt}};$$

faisant $g_s = \frac{r_0}{r_s} \frac{V_s}{V_0}$, il vient $\frac{d\alpha_s}{dt} = g_s \frac{d\alpha_0}{dt}$; si les mouvements sont uniformes, g_s est constant, et l'on a :

$$\alpha_s = g_s \alpha_0 + B_s;$$

B_s étant la valeur de α_s et simultanée à celle α_0.

Substituant ces valeurs dans celles de x_n, y_n, z_n, il vient :

$$\left.\begin{aligned}
x_n &= r_0 \sin a_0 \sin(A_0 + \alpha_0) \\
&\quad + r_1 \sin a_1 \sin(A_1 + \beta_1 + g_1\alpha_0) \\
&\quad \vdots \\
&\quad + r_n \sin a_n \sin(A_n + \beta_n + g_n\alpha_0) \\
y_n &= r_0 \sin b_0 \sin(B_0 + \alpha_0) \\
&\quad + r_1 \sin b_1 \sin(B_1 + \beta_1 + g_1\alpha_0) \\
&\quad \vdots \\
&\quad + r_n \sin b \sin(B_n + \beta_n + g_n\alpha_0) \\
z_n &= r_0 \sin c_0 \sin(C_n + \alpha_0) \\
&\quad r_1 \sin c_1 \sin(C_1 + \beta_1 + g_1\alpha_0) \\
&\quad \vdots \\
&\quad + r_n \sin c_n \sin(C_n + \beta_n + g_n\alpha_0)
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Par l'élimination de α_0 on obtient les équations des projections de la courbe décrite sur les plans coordonnés.

Observation. Les quantités C_0, C_1, C_2 .... sont nulles, et ne sont introduites que pour la symétrie des formules.

5. 1[er] *cas particulier* (*). Soit $g_s = 1$; s quelconque.

Faisons :

$$A = r_0 \sin a_0 \sin A_0 + r_1 \sin a_1 \sin(A_1 + \beta_1) + \ldots . r_n \sin a_n \sin(A_n + \beta_n),$$
$$A' = r_0 \sin a_0 \cos A_0 + r_1 \sin a_1 \cos(A_1 + \beta_1) + \ldots . r_n \sin a_n \cos(A_n + \beta_n).$$

Changeant a, A successivement en b et B et ensuite en c et C, on obtient B, B′; C, C′. Ainsi l'on a :

$$x_n = A \cos\alpha_0 + A' \sin\alpha_0,$$
$$y_n = B \cos\alpha_0 + B' \sin\alpha_0,$$
$$z_n = C \cos\alpha_0 + C' \sin\alpha_0.$$

Eliminant α_0 et faisant $A^2 + A'^2 = D^2$; $BA + A'B' = D^2E$; $CA + A'C' = F'D^2$; $A'B + AB' = FD^2$; $A'C + AC' = E'D^2$, il vient, en supprimant l'indice n :

---

*) Cette supposition revient à dire que les vitesses des centres sont proportionnelles aux rayons des epicycles. Tm.

$$y = \text{E}x \pm \text{F}\sqrt{\text{D}^2 - x^2}\,;\quad z = \text{E}'x \pm \text{F}'\sqrt{\text{D}^2 - x^2}.$$

Faisant tourner le plan xy autour de l'axe des x d'une quantité φ, et prenant ce plan pour celui des x', y', et les nouvelles coordonnées étant toujours rectangulaires, on a :

$$x = x'\,;\ y = y'\cos\varphi + z'\sin\varphi\,;\ z = z'\cos\varphi - y'\sin\varphi.$$

Les équations de la courbe deviennent :

$$y' = x'\,[\text{E}\cos\varphi - \text{E}'\sin\varphi] \pm (\text{F}\cos\varphi - \text{F}'\sin\varphi)\sqrt{\text{D}^2 - x'^2},$$

$$z' = x'\,[\text{E}\sin\varphi + \text{E}'\cos\varphi] \pm (\text{F}\sin\varphi + \text{F}'\cos\varphi)\sqrt{\text{D}^2 - x'^2}.$$

Faisons $\text{F}\sin\varphi + \text{F}'\cos\varphi = 0$, φ est réel ; posant $\text{F}^2 + \text{F}'^2 = \text{G}$, $\text{EF} + \text{E}'\text{F}' = \text{GI}$, $\text{E}'\text{F} - \text{F}'\text{E} = \text{G}'\text{I}$, il vient :

$$y' = \text{I}x' \pm \text{G}\sqrt{\text{D}^2 - x'^2}\,;\quad z' = \text{I}'x'\,;$$

ainsi la courbe est plane.

Faisant tourner l'axe des x' d'une quantité ψ, dans le plan des $x'z'$, on aura :

$$x' = x''\cos\psi + z''\sin\psi\,;\ y' = y''\,;\ z' = z''\cos\psi - x''\sin\psi\,;$$

d'où

$$x'' = \frac{(1 - \text{I}'\text{tang}\,\psi)\,[\text{I}y'' \pm \text{G}\sqrt{\text{D}^2(\text{I}^2 + \text{G}^2) - y''^2}}{[\cos\psi\,(1 - \text{I}'\text{tang}\,\psi) + \sin\psi\,(\text{I} + \text{tang}\,\psi)]\,(\text{I}^2 + \text{G}^2)}\,;$$

$$z'' = \frac{x''(\text{I}' + \text{tang}\,\psi)}{1 - \text{I}'\text{tang}\,\psi}.$$

Faisons $\text{tang}\,\psi + \text{I}' = 0$, et $\text{D}^2(\text{I}^2 + \text{G}^2) = \text{K}^2$,

$$\text{I}\sqrt{1 + \text{I}'^2} = \text{L}\,(\text{I}^2 + \text{G}^2)\,;\ \text{G}\sqrt{(1 + \text{I}'^2)} = \text{M}\,(\text{I}^2 + \text{G}^2)\,;$$

on a pour équation de la courbe :

$$x'' = \text{L}y'' \pm \text{M}\sqrt{\text{K}^2 - y''^2}.$$

Faisant tourner l'axe des x'' d'une quantité θ, dans le plan de $x''y''$, on a :

$$x''' = x''\cos\theta + y''\sin\theta\,,$$

$$y''' = x''\cos\theta - y''\sin\theta.$$

Prenant $\operatorname{tang}\theta = \dfrac{1 - L^2 - M^2 \pm \sqrt{(1 - L^2 - M^2)^2 + 4L^2}}{2L}$,

et faisant

$$a = \frac{KM}{\sqrt{(\cos\theta - L\sin\theta)^2 + M^2\sin^2\theta}}\,;\quad b = \frac{KM}{\sqrt{(\sin\theta + L\cos\theta)^2 + M^2\cos^2\theta}}\,;$$

on a finalement :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

ellipse ayant a et b pour demi-axes principaux.

Note du traducteur. Prenant les valeurs de $\sin\alpha$ et $\cos\alpha$ dans les valeurs de x et y, et les substituant dans celle de z, on a une équation linéaire entre les coordonnées x, y, z ; donc la courbe est plane. Or la projection sur un plan des coordonnées est une ellipse (*voir* lemme, p. 191) ; donc la courbe dans l'espace est une ellipse.

2$^{\text{me}}$ *cas.* Si, conservant les données précédentes, on suppose que tous les cercles sont dans le même plan, alors

$$n_s = 0\,;\ k_s = 0,$$

et on trouve pour l'équation du dernier point mobile :

$$\begin{array}{ll} x = N\cos\alpha_0 + N'\sin\alpha_0\,; & N = r_0 + r_1\cos\beta_1 + \ldots r_n\cos\beta_n \\ y = -N\sin\alpha_0 + N'\cos\alpha_0 & N' = \phantom{r_0 +{}} r_1\sin\beta_1 + \ldots r_n\sin\beta_n \end{array}$$

d'où l'on déduit :

$$y^2 + x^2 = N^2 + N'^2\,;$$

équation d'un cercle.

3$^{\text{me}}$ *cas.* Si, conservant $g_s = 0$; on a soit $A = B = C = 0$; ou bien

$$A' = B' = C' = 0\,;$$

ou encore

$$A = A'\,;\ B = B'\,;\ C = C'\,;$$

la ligne décrite, par mouvement de va-et-vient, est une droite.

6. La théorie des épicycles était indispensable aux anciens. Nous allons d'abord exposer leurs hypothèses sur le système planétaire, et ensuite nous chercherons, d'après la théorie que nous venons d'exposer, si ces hypothèses peuvent tenir lieu de la réalité.

L'opinion des anciens était : la terre est en repos au centre du monde ; toutes les planètes tournent, le soleil compris, décrivent des cercles, autour de la terre comme centre. Même avec l'état des instruments d'alors, les hypothèses ne s'accordaient pas avec les observations, mais partie par prévention pour les mouvements circulaires, partie aussi pour donner une application plus claire des rétrogradations des planètes, ils imaginèrent un second cercle, dont le centre se mouvait sur le premier cercle, et tandis que la planète elle même se mouvait dans ce second cercle, qu'ils nommaient épicycle.

Cette hypothèse ne satisfaisant pas encore aux observations, ils donnèrent à la terre une position excentrique dans le premier cercle ; ce qui revient, comme on sait, à laisser la terre au centre, et à faire mouvoir la planète sur un second épicycle, il y en a même qui adaptèrent un troisième épicycle, et on pouvait multiplier ces cercles indéfiniment ; mais tous ces cercles étaient toujours supposés dans le même plan.

Pour comparer ces hypothèses avec la réalité, nous devons d'abord rapporter les formules relatives aux mouvements géocentriques des planètes.

Fixons l'origine des coordonnées rectangulaires au centre du soleil, et prenons l'orbite terrestre ou l'écliptique pour plan xy ; et pour axe des x la ligne des nœuds de la planète que l'on considère comme ayant pour coordonnées x, y, z, et soient X.Y. les coordonnées de la terre, r et R les rayons vecteurs de la planète et de la terre ; u et U les angles de r avec l'axe des x et de R avec la ligne équinoxiale ; n inclinaison de l'orbite ; K la longitude du nœud ascendant ou l'angle de l'axe des x avec la ligne équinoxiale ; on a donc :

$$\begin{array}{ll} x = r\cos u & X = R\cos(U-K) \\ y = r\sin u\cos n & Y = R\sin(U-K) \\ z = r\sin u\sin n & \end{array}$$

transportant l'origine au centre de la terre, et appelant x', y', z' les nouvelles coordonnées de la planète, on aura :

$$\left.\begin{array}{l} x' = r\cos u - R\cos(U-K) \\ y' = r\sin u\cos n - R\sin(U-K) \\ z' = r\sin u\sin n. \end{array}\right\} \quad (2).$$

Mais la planète et la terre décrivant des ellipses, l'on a :

$$r = \frac{f}{1-\cos e(u-h)};\ R = \frac{F}{1-E\cos(U-H)};$$

f, e, h, F, E, H sont des quantités connues ; éliminant entre ces cinq équations, r, R, u, U, on obtient une équation entre les trois inconnues x', y', z' ;

Nous concluons de là que les lieux géocentriques des planètes se trouvent sur une certaine surface courbe. Si on voulait donc substituer les équations (1) des § 4 aux équations (2), pour déterminer les lieux géocentriques des planètes, c'est-à-dire, si on voulait se servir d'un mouvement épicyclique au lieu de celui qui a réellement lieu autour du soleil, mais vu de la terre, alors les considérations précédentes, montrent qu'une telle hypothèse ne peut subsister.

Le mouvement apparent du soleil pourrait se remplacer par un mouvement épicyclique ; car, le soleil, vu de la terre, se meut suivant une ellipse ; mais l'hypothèse adoptée par les anciens, que tous les cercles sont dans un même plan, ne peut produire que le cercle et exclut l'ellipse ; ainsi les hypothèses épicycliques ne peuvent même servir à expliquer le mouvement apparent du soleil.

Note du traducteur. Cette dernière raison est applicable aussi aux autres planètes , et suffit pour exclure l'hypothèse épicyclique ; car la première raison que donne l'auteur ne me paraît pas concluante ; de ce que la trajectoire géocentrique se trouve sur une surface de degré quelconque , il ne s'ensuit pas qu'elle ne puisse être une ellipse.