DORMOY

Solution du problème 113

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 5 (1846), p. 348-349

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1846_1_5__348_0>

SOLUTION DU PROBLÈME 113 (page 167).

PAR M. DORMOY,
élève en spéciales.

Problème.

Étant donnée une progression arithmétique de n termes, la moitié de n fois le dernier terme, est toujours comprise entre la somme de tous les termes, et cette somme diminuée du dernier terme; démontrer cette proposition par la géométrie.

Solution.

L'énoncé suppose évidemment la progression croissante.

Soit donc une pareille progression :

$$\div\, a.\ b.\ c.\ d.\ \ldots\ldots\ v.\ x.\ y.\ z.$$

Pour la représenter géométriquement, sur une droite indéfinie xy, je porte autant de longueurs égales (*fig.* 35), AB, BC. . . . VX, XY, YZ que la progression renferme de termes moins un; j'élève aux points A,B,C.....Y,Z, les perpendiculaires $AA'=a$, $BB'=b$, $CC'=c$ . . . . $YY'=y$, $ZZ'=z$, dont les sommets se trouveront évidemment tous sur la droite A'Z'; on peut ainsi représenter une progression arithmétique quelconque.

Cela posé, nous devons avoir :

$$a+b+c+d+\ \ldots\ldots +y+z > \frac{nz}{2} > a+b+c\ \ldots\ldots +x+y;$$

il suffira de faire voir que l'on a :

$$2\,(a+b+c+d+\ \ldots +y+z) > nz > 2\,(a+b+\ \ldots +x+y).$$

A cet effet, prolongeons ZZ' de $Z'Z''=a$, et AA' de $A'A''=z$, tirons la droite A″Z″, et prolongeons les perpendiculaires qui représentent les différents termes de la progression ; on voit de suite que $B'B''=y$; $C''C'=x$.....

Il suit de là que :

$$AA''+BB''+\ldots+YY''+ZZ''=2\,(a+b+c+d\ldots+y+z).$$

Mais

$$AA''+BB''+\ldots+YY''+ZZ''=n.ZZ''=n\,(a+z),$$

et par conséquent :

$$2\,(a+b+c+\ldots+y+z)=n\,(z+a)\,;$$

ce qui démontre la première partie de l'inégalité.

De l'expression précédcnte, nous tirons :

$$2\,(a+b+\ldots+y)=nz+na-2z\,;$$

pour que la seconde partie de l'inégalité

$$2\,(a+b+\ldots+x+y)<nz$$

soit satisfaite, il faudra donc que l'on ait :

$$na<2z,$$

et cette condition sera nécessaire et suffisante.