NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

EUGÈNE JUBÉ

Théorème sur les surfaces et les courbes algébriques

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 5 (1846), p. 340-344

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1846_1_5__340_2>

THÉORÈME

sur les Surfaces et les Courbes algébriques.

PAR M. EUGÈNE JUBÉ,
licencié ès sciences mathématiques et physiques.

Si par deux points de l'espace on mène, parallèles entre elles deux sécantes à une surface dont l'équation est algébrique, de manière qu'elles la rencontrent suivant le plus de points possible, et qu'on fasse pour chaque sécante le produit des segments compris entre le point d'où elle émane, et ceux où elle rencontre la surface, le rapport entre ces deux produits est indépendant de la direction commune des deux droites.

Soient α, β, γ les coordonnées d'un point par lequel on mène une droite qui coupe suivant le plus de points possible une surface dont l'équation $F(x, y, z) = 0$ est algébrique. Transportons l'origine en ce point; l'équation de la surface deviendra $F(x + \alpha, y + \beta, z + \gamma) = 0$; ou en nommant r, θ, ψ les trois coordonnées polaires du point (x, y, z), elle sera $F(r \cos \theta + \alpha, r \sin \theta \cos \psi + \beta, r \sin \theta \sin (\psi + \gamma)) = 0$. En supposant que θ et ψ se rapportent à la sécante menée par la nouvelle origine, les valeurs de r données par l'équation seront celles des segments faits sur la droite, et toutes ces valeurs seront réelles, puisque par hypothèse la sécante coupe la surface suivant le plus de points possible. Le produit de tous ces segments sera donc égal au terme indépendant de r, divisé par le coefficient de sa plus haute puissance. Soit $\varphi(\theta, \psi)$ ce coefficient. Le terme sans r sera $F(\alpha, \beta, \gamma)$, et le produit des segments aura pour valeur $\frac{F(\alpha, \beta, \gamma)}{\varphi(\theta, \psi)}$. Pour une autre sécante parallèle partant d'un point $(\alpha'\beta'\gamma')$, on trouvera pour le produit semblable $\frac{F(\alpha', \beta', \gamma')}{\varphi(\theta, \psi)}$, où le dénominateur sera le même que précédemment.

Le rapport des deux produits sera donc indépendant de la direction commune des sécantes.

Ce théorème, comme on le voit aisément, a lieu aussi pour une courbe algébrique.

Si une des droites est tangente à la surface ou à la courbe, il faut considérer dans le produit correspondant le carré du segment compris entre le point de départ et le point de contact : ce sont alors deux ou plusieurs segments devenus égaux.

Si l'une des sécantes, ou toutes les deux, ne rencontraient pas la surface ou la courbe suivant le plus de points possible, il y aurait des segments imaginaires, et cependant le produit de tous les segments réels ou imaginaires de l'une serait toujours, quelle que fût la direction commune, dans un même rapport avec le produit de tous les segments réels ou imaginaires de l'autre. Mais dans ce cas, les valeurs des segments ne pourraient être considérées que comme des symboles analytiques. (V. t. III, p. 512.)

Ce théorème général appliqué aux surfaces ou aux courbes du second degré conduit naturellement à ces théorèmes de Newton :

Si à une courbe ou surface du second degré douée d'un centre on mène par un même point deux sécantes, les produits des segments faits sur chacune d'elles sont proportionnels aux carrés des diamètres qui leur sont parallèles ;

Deux tangentes partant d'un même point sont proportionnelles aux diamètres qui leur sont parallèles.

Que par deux points O, O′ de l'espace on mène deux sécantes à une surface du second degré, parallèles entre elles ; comme le rapport des produits des segments de chacune d'elles est indépendant de leur direction, si la première tourne autour du point O, de telle sorte que le second point d'intersection avec la surface s'éloigne de plus en plus, il en sera de même pour sa parallèle ; et enfin, quand le second point d'intersection de la première sécante avec la surface sera à l'infini, auquel cas cette droite serait un diamètre de la surface (celle-ci étant alors un paraboloïde), sa parallèle menée par O′ sera aussi un diamètre. On conclut aisément de ce qui précède que les sections faites sur une surface du second degré par deux plans parallèles sont semblables de forme et de position.

En effet, si l'une d'elles est une parabole, on pourra lui mener un diamètre; puis, par un point pris sur le plan de l'autre section une parallèle à ce diamètre, de manière à rencontrer la seconde courbe, et d'après ce qui vient d'être démontré, cette nouvelle sécante devra aussi avoir son dernier point d'intersection situé à l'infini. La seconde courbe d'intersection sera donc aussi une parabole semblable à la première de forme et de position.

Si la première courbe d'intersection a un centre, on peut par ce point mener deux diamètres quelconques, puis par le centre de la seconde courbe deux diamètres parallèles aux premiers; d'après le théorème général, les diamètres de l'une des sections seront proportionnels à ceux de l'autre; donc ce seront deux courbes semblables de forme et de position.

Enfin le théorème général appliqué à une section conique peut servir à démontrer la proposition de l'hexagramme de Pascal, savoir : quand un hexagone a ses sommets sur une même section conique, les points de concours des côtés opposés sont en ligne droite.

Soit en effet $aa'bb'cc'$ cet hexagone. Prolongeons les côtés alternatifs jusqu'à leur rencontre en A, B, C, et par un point quelconque O pris dans l'intérieur de la courbe, menons trois sécantes parallèles à AB, AC, BC. Nommons S, S′, S″ les trois produits des segments faits sur chacune d'elles à partir du point O, et, pour abréger l'écriture, posons :

$$\mathrm{B}a = a_1 \quad \mathrm{C}b = b_1 \quad \mathrm{A}c = c_1 \quad \mathrm{C}a = a_2 \quad \mathrm{A}b = b_2 \quad \mathrm{B}c = c_2$$
$$\mathrm{B}a' = a'_1 \quad \mathrm{C}b' = b'_1 \quad \mathrm{A}c' = c'_1 \quad \mathrm{C}a' = a'_2 \quad \mathrm{A}b' = b'_2 \quad \mathrm{B}c' = c'_2.$$

On aura donc :

$$\frac{a_1a'_1}{\mathrm{S}''} = \frac{c_2c'_2}{\mathrm{S}}, \quad \frac{b_1b'_1}{\mathrm{S}'} = \frac{a_2a'_2}{\mathrm{S}''}, \quad \frac{c_1c'_1}{\mathrm{S}} = \frac{b_2b'_2}{\mathrm{S}'},$$

et en multipliant membres à membres

$$a_1a'_1b_1b'_1c_1c'_1 = a_2a'_2b_2b'_2c_2c'_2. \qquad (1)$$

Soient α, β, γ les points d'intersection des côtés du triangle ABC avec les droites $b'c$, ac', $a'b$, et posons :

$$B\alpha = \alpha_1 \qquad C\beta = \beta_1 \qquad A\gamma = \gamma_1$$
$$C\alpha = \alpha_2 \qquad A\beta = \beta_2 \qquad B\gamma = \gamma_2.$$

Les transversales $b'c$, ac', $a'b$ donnent :

$$\alpha_1 b'_1 c_1 = \alpha_2 b'_2 c_2, \quad \beta_1 c'_1 a_1 = \beta_2 c'_2 a_2, \quad \gamma_1 a'_1 b_1 = \gamma_2 a'_2 b_2,$$

d'où en multipliant membres à membres, et en vertu de l'équation (1), il vient :

$$\alpha_1 \beta_1 \gamma_1 = \alpha_2 \beta_2 \gamma_2.$$

Cette dernière relation exprime, comme on sait, que les trois points α, β, γ sont en ligne droite, et ce sont les points de concours des côtés opposés de l'hexagone.

Si on suppose que les points a et a', b et b', c et c' viennent à coïncider, le triangle ABC est circonscrit à la section conique, et la relation (1) devient :

$$a_1 b_1 c_1 = a_2 b_2 c_2;$$

d'où on conclut que les droites Aa, Bb, Cc se coupent au même point. De là ce théorème connu :

Les droites qui joignent aux points de contact, les sommets d'un triangle circonscrit à une section conique, concourent en un même point (*).