GUILMIN

Conséquences de la règle des signes de Descartes

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 5 (1846), p. 334-340

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1846_1_5__334_1>

CONSÉQUENCES

De la règle des signes de Descartes (suite, v. p. 239).

PAR M. GUILMIN,
Ancien élève de l'École normale.

---

7. *Le nombre des racines imaginaires d'une équation* $f(x)=0$, *dont le premier membre est incomplet, n'est jamais moindre que le plus grand nombre de variations que l'on peut introduire, en remplaçant les termes manquants par des termes ayant des signes arbitraires.*

Soit V le nombre des variations du polynôme $F(x)$ obtenu en complétant $f(x)$ de manière à introduire le plus de variations possible; soit k le nombre des variations nouvelles;

alors $V = v + k$. Soit V' le nombre des variations de $F(-x)$, on sait que $V + V' = m$. Mais de quelque manière qu'on complète $f(x)$, la somme $V + V'$ relative aux polynômes complets obtenus, $F(x)$ et $F(-x)$, est toujours égale à m; lors donc que V a sa plus grande valeur, ce qui est notre hypothèse, V' a sa plus petite valeur, laquelle est v' (2e Remarque). Puisque $V' = v'$, on a $V + v' = m$; remplaçant V par $v + k$, il vient $v + v' + k = m$, ou $k = m - (v + v')$. Or, on sait que $m - (v + v')$ est le minimum du nombre des racines imaginaires de l'équation $f(x) = 0$. On peut donc dire aussi que le nombre des racines imaginaires d'une équation $f(x) = 0$ n'est jamais moindre que le plus grand nombre de variations qu'il est possible d'introduire en complétant arbitrairement son premier membre.

Conséquences.

8. *Dans toute équation à coefficients réels, s'il manque un terme entre deux termes de mêmes signes, l'équation a au moins deux racines imaginaires*

En effet, entre ces deux termes de mêmes signes $+$ et $+$, par exemple, on pourra intercaler un terme ayant le signe contraire $-$, ce qui donnera $+ - +$; on comptera alors 2 variations là où il n'y en avait aucune. Puisqu'il est possible d'augmenter au moins de deux le nombre des variations, le nombre k du théorème précédent est au moins égal à 2; donc, etc.

S'il manque deux termes entre deux termes de signes quelconques semblables, ou dissemblables, l'équation a au moins deux racines imaginaires.

En effet, commençons par introduire un terme de même signe que le deuxième de ceux que nous considérons; le nombre des variations ne sera pas altéré; car ce nouveau terme formera nécessairement 2 permanences avec les 2 existants s'ils étaient de mêmes signes, ou une variation et une permanence s'ils offraient une variation. Nous sommes maintenant retombés dans le cas précédent : il manque un terme entre deux termes de mêmes signes, les deux derniers des trois signes dont nous venons de parler. Il nous sera possible d'introduire deux variations en écrivant un deuxième terme de signe contraire à ceux entre lesquels nous le placerons. Le nombre des variations en $f(x)$ peut donc, dans ce cas, être augmenté au moins de deux ; donc, etc.

Plus généralement, *s'il manque* $2n+1$ *ou* $2n+2$ *termes entre deux termes* t *et* t' *de mêmes signes, l'équation* $f(x)=0$ *a au moins* $2n+2$ *racines imaginaires.*

En effet, supposons qu'entre deux termes positifs,

$$\begin{array}{ccc} t, & \qquad\qquad & t', \\ + & & + \end{array}$$

il manque $2n+1$ termes, par exemple ; j'introduis d'abord un signe $+$, puis un signe $-$, puis un signe $+$, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on ait intercalé $2n+1$ termes ou $2n+1$ signes, nous aurons une suite comme celle-ci :

$$\begin{array}{ccc} t, & \qquad\qquad & t', \\ + - + - + & \ldots\ldots & - + \end{array}$$

A chaque signe introduit, on compte évidemment une variation en comparant ce signe au précédent ; j'en introduis $2n+1$, j'ai donc compté ainsi $2n+1$ variations. Mais le premier signe introduit étant $-$, le deuxième $+$, le troisième $-$, etc., le $(2n+1)^e$ sera $-$; or, pour compter $2n+1$ variations, nous n'avons comparé le dernier signe introduit qu'à celui qui le précède, il restera encore à le comparer au signe $+$ de t' *existant* avant l'intercalation ; cela nous donnera une dernière variation, en tout $2n+2$. Ainsi, à la place de deux termes qui formaient permanence, nous avons une suite partielle offrant $2n+2$ variations ; donc, puisqu'on peut augmenter le nombre des variations de $f(x)$, au moins de $2n+2$, cette équation a au moins $2n+2$ racines imaginaires.

S'il manquait $2n+2$ termes entre t et t', en les intercalant comme dans le cas précédent, on créerait $2n+2$ variations nouvelles, comptées en comparant chaque nouveau signe à son précédent :

$$\begin{array}{lcr} t, & & t', \\ (+\,-\,+\,- & \ldots\ldots\ldots\ldots & +\,+); \end{array}$$

mais le $(2n+2)^{ième}$ signe introduit étant $+$, d'après ce qu'on a dit, ne ferait pas variation avec le signe $+$ de t' ; on aura une suite partielle offrant $2n+2$ variations à la place de deux termes qui n'en offraient aucune ; donc, etc.

S'il manque 2n *ou* 2n + 1 *termes entre deux termes*, t *et* t', *de signes contraires*, *l'équation* f(x) = 0 *admet au moins* 2n *racines imaginaires.*

Intercalons des termes comme précédemment entre les deux termes considérés, que nous supposerons avoir les signes $+$ et $-$, nous aurons une suite

$$\begin{array}{lcr} t, & & t', \\ +\,-\,+\,-\,+ & \ldots\ldots\ldots\ldots & -. \end{array}$$

S'il manque $2n$ termes, on comptera $2n$ variations en comparant chaque *nouveau* signe au précédent; le $2n^{ième}$ signe introduit étant $+$, formera variation avec le signe $-$ du deuxième terme t' comprenant la lacune ; à la place de deux termes offrant une variation, on aura donc une suite partielle offrant $2n+1$ variations ; on en aura introduit $2n$; donc, etc.

S'il manque $2n+1$ termes, outre t et t', l'introduction de $2n+1$ termes arbitraires produira $2n+1$ variations, que l'on comptera en comparant chaque signe introduit à celui qui le précède; le $(2n+1)^{ième}$ signe introduit sera —, et formera une permanence avec le signe de t', de sorte que le nombre des variations de t à t' sera en tout $2n+1$; de t à t' il y avait une seule variation auparavant; on en a donc introduit $2n$, donc le nombre des racines imaginaires n'est pas moindre que $2n$.

Ainsi, le seul cas où l'on ne peut affirmer qu'une équation incomplète $f(x) = 0$ *a des racines imaginaires est celui où il manque seulement un terme entre deux termes de signes contraires.*

9. *Si une équation* $f(x) = 0$ *a au moins trois coefficients consécutifs en progression géométrique, elle a des racines imaginaires.*

Soit

$$f(x) = \ldots\, Ax^n + Aqx^{n-1} + Aq^2x^{n-2} + \ldots$$

Multiplions le premier membre $f(x)$ par $x - q$, nous aurons ·

$$f(x)\,(x-q) = \begin{cases} \ldots Ax^{n+1} + Aqx^n + Aq^2x^{n-1} + \ldots \\ \ldots -Aqx^n - Aq^2x^{n-1} - Aq^3x^{n-2} \ldots \end{cases}$$
$$= \ldots\, Bx^{n+1} + Cx^{n-2} \ldots$$

B étant la somme algébrique des coefficients de x^{n+1} dans les deux lignes; C étant la somme algébrique des coefficients de x^{n-2} dans les mêmes. Dans le premier membre de l'équation $f(x)\,(x-q) = 0$, il manquera deux termes entre deux signes consécutifs; cette équation a au moins deux racines imaginaires, lesquelles appartiennent aussi à l'équation $f(x) = 0$, puisque, à l'exception de la racine réelle q, toutes les racines sont les mêmes dans les deux équations

$$f(x) = 0, \quad f(x)\,(x-q) = 0.$$

L'équation $f(x) = 0$ a donc au moins deux racines imaginaires.

10. *Si une équation* f(x) = 0 *a au moins quatre coefficients consécutifs en progression arithmétique, cette équation a des racines imaginaires.*

Soit

$$f(x) = \ldots\, Ax^n + (A+d)x^{n-1} + (A+2d)x^{n-2} + (A+3d)x^{n-3} \ldots$$

Multiplions $f(x)$ par $x-1$.

$$\begin{array}{l|l|l|l}
\multicolumn{4}{l}{\ldots\, Ax^n + (A+d)x^{n-1} + (A+2d)x^{n-2} + (A+3d)x^{n-3} + \ldots} \\
\multicolumn{4}{l}{x - 1} \\
\hline
\ldots\, Ax^{n+1} + (A+d) & x^n + (A+2d) & x^{n-1} + (A+3d) & x^{n-2} + \ldots\ldots \\
\ldots\ldots -A & -A-d & -A-2d & (-A-3d)x^{n-3}\ldots \\
\hline
\end{array}$$

$$f(x)\,(x-1) = \ldots\, Bx^{n+1} + dx^n + dx^{n-1} + dx^{n-2} + Cx^{n-3} + \ldots$$

Nous savons ce que représentent B et C.

Le premier membre de l'équation, $f(x)\,(x-1) = 0$, ayant trois termes consécutifs en progression géométrique, cette équation a des racines imaginaires (théorème précédent). Mais ces racines appartiennent aussi à l'équation $f(x) = 0$, puisque toutes les racines de $f(x)=0$ et de $f(x)\,(x-1) = 0$ sont les mêmes, à l'exception de la racine $x = 1$, qui est en plus dans $f(x)\,(x-1) = 0$.

$f(x) = 0$ a donc au moins deux racines imaginaires.

Note. Lorsqu'un symptôme annonce n couples de racines imaginaires et un autre symptôme n' couples ; on ne peut en conclure l'existence de $n+n'$ couples, puisqu'il peut y avoir coïncidence de racines ; or, dans le théorème de M. Sturm, annoncé page 115, si $fx(x-a)$ renferme $2k+1$ variations de plus que dans fx, il y a au moins k couples de racines imaginaires dans fx ; mais s'il y a n lacunes impaires entre permanences dans $fx(x-a)$, il y a aussi n couples de racines imaginaires. La démonstration que j'ai donnée de ce théorème (page 115) apprend qu'il existe au moins $k+n$ couples de racines imaginaires ; et c'est ce qu'on ne voit pas d'après la démonstration de la page 242 (voir aussi t. II, p. 250). Tm.