TERQUEM

Lieu géométrique relatif aux cordes des coniques

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 5 (1846), p. 31-34

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1846_1_5__31_1>

LIEU GÉOMÉTRIQUE

relatif aux cordes des coniques.

I. *Théorème*. Si par un point situé dans le plan d'une conique on mène une corde sécante, et qu'à partir du point on porte sur la sécante une longueur égale à la corde interceptée, le lieu du point ainsi déterminé est une courbe du quatrième degré ayant le point fixe pour centre.

Démonstration. Soit l'équation de la conique à six termes; axes rectangulaires et le point fixe pour origine; soit $y + rx = 0$ l'équation de la sécante; p étant la longueur de la corde interceptée, on a :

$$p^2 (Ar^2 - Br + C)^2 = (1 + r^2)(l' - 2rx + lr^2) \text{ (t. IV, p. 592)},$$

ou $p^2 = x^2 + y^2$; $r = -\frac{y}{x}$; substituant ces valeurs, il vient pour le lieu cherché, après avoir ôté le facteur commun x^2+y^2;

$$(Ay^2 + Bxy + Cx^2)^2 = l'x^2 + 2rxy + ly^2 \ (2);$$

ligne du quatrième degré ayant l'origine pour centre, qui est sur la courbe ou conjugué à la courbe.

Discussion.

1° Si le point est hors de la conique, la corde peut devenir nulle, et par conséquent la courbe passe par l'origine; si le point est dans l'intérieur, la corde ne peut s'anéantir, et l'origine est un point conjugué à la courbe;

2° Si le point est sur la conique, alors $F = 0$; $l = D^2$; $n = DE$; $l' = E^2$; et la courbe se réduit au système des deux coniques

$$(Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex)$$
$$(Ay^2 + Bxy + Cx^2 - Dy - Ex) = 0;$$

ce qui est évident à priori;

3° Si l'origine est au centre, alors

$$D = E = 0; \text{ et } l = -4AF; \ r = -2BF; \ l'^2 = 4CF,$$

et l'équation se réduit à

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + \frac{F}{4} = 0,$$

conique semblable et semblablement située, et de dimensions doubles, ce qui doit être ;...

Lorsque la conique est une ellipe, $Ay^2 + Bxy + Cx^2$ ne peut jamais devenir nul ; donc, dans ce cas, la ligne du quatrième degré est fermée ; pour l'hyperbole, la courbe est infinie et a les mêmes asymptotes ; et elle est encore infinie pour la parabole, et les asymptotes sont à l'infini ;

5° pour que la courbe devienne une lemniscate, il faut que l'on ait :

$A = C$; $B = 0$; $n = 0$; $l = -b^2$; $l' = a^2$ (voy. t. IV, p. 429) ;

la conique donnée doit donc être un cercle ; on peut faire passer l'axe des x par le centre du cercle, alors $D = 0$, et par conséquent $n = 0$, et l'équation du cercle est en faisant $A = 1$,

$$y^2 + x^2 + Ex + F = 0;$$
$$l = -4F = -b^2;\ l' = E^2 - 4F = a^2;$$

d'où

$$E^2 = a^2 + b^2;\ F = \frac{b^2}{4},\ \text{et le rayon du cercle} = \frac{1}{2}a;$$

ainsi, selon une observation de M. Chasles, on peut se servir du cercle pour construire la lemniscate par points ; et si on fait $a = b$, alors

$$\frac{1}{2}E = \frac{1}{2}a\sqrt{2};$$

ainsi, la distance du point fixe au centre du cercle qui sert à décrire la lemniscate de Bernoulli est égale à la corde du quadrant.

6° Passant aux coordonnées polaires, on a :

$$z^2 (A \sin^2\varphi + B \sin\varphi \cos\varphi + C \cos^2\varphi)^2 =$$
$$= l' \cos^2\varphi + 2n \sin\varphi \cos\varphi + l \sin^2\varphi;$$

égalant le second membre à zéro, on a :

$$\text{tang}\,\varphi = \frac{-n \pm \sqrt{n^2 - ll'}}{l} = \frac{-n \pm 2\sqrt{FL}}{l};$$

or, lorsque le point fixe est hors de la conique, FL est positif; les deux valeurs de tang φ répondent aux rayons vecteurs passant par le centre tangentiellement à la courbe;

7° En comparant l'équation (2) avec l'équation (2) de la page 427 (t. IV), on voit que le lieu géométrique ne peut devenir une aplanétique que lorsque $A = C$ et $B = 0$; toute ligne du quatrième degré dont le terme du quatrième degré est divisible par $y^2 + x^2$, le quotient renfermant encore y^2 et x^2 avec les mêmes coefficients, est une aplanétique.

II. *Théorème.* Par un point situé dans le plan d'une conique, on ne peut mener plus de quatre cordes égales.

Démonstration. Prenons le point pour origine et les axes rectangulaires; $y = rx$ étant l'équation de la corde et p sa longueur, on aura, en ordonnant l'équation (1) par rapport à r :

$$r^4 (A^2p^2 - l) + 2r^3 (ABp^2 + n) + r^2 (B^2p^2 + 2ACp^2 - l' - l) - \\ - 2r (BCp^2 + n) + C^2p^2 - l' = 0,$$

équation du quatrième degré.

On peut prendre les axes conjugués; alors $B = 0$, et l'équation devient :

$$r^4 (A^2p^2 - l) - 2nr^3 + r^2 (2ACp^2 - l' - l) - \\ - 2rn + C^2p^2 - l' = 0;$$

ou bien :

$$r^4 - A_1 r^3 + A^2 r^2 - A_1 r + A_3 = 0.$$

1° $A^2p^2 - l = 0$, l'équation se réduit au troisième degré, de même si $C^2p^2 - l' = 0$;

2° Si $n = 0$, l'équation est ramenée au second degré;

3° Si $A^2p^2 - l = C^2p^2 - l'$, l'équation devient réciproque.

Tm.