TERQUEM

# Théorème de M. L. Raabe sur trois cercles tangents à une droite

*Nouvelles annales de mathématiques 1re série*, tome 5 (1846), p. 28-31

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1846_1_5__28_1>

## THÉORÈME DE M. L. RAABE,

### *sur trois cercles tangents à une droite.*

(Journal de Crelle, tome II.)

---

THÉORÈME 1. Trois cercles C, D, E, situés dans le même plan, touchent une même droite ; X et Y sont deux autres droites, dans le même plan et formant un angle droit ; supposons que les trois cercles se meuvent parallèlement à la droite Y, jusqu'à ce qu'ils touchent la droite X, et alors soient C′, D′, E′ les positions respectives qu'ont prises les centres C, D, E ; que les trois cercles C, D, E, se meuvent aussi parallèlement à la droite X, jusqu'à ce qu'ils touchent la droite Y, et soient C″, D″, E″ les positions des centres ; en désignant par D, D′, D″ les aires des triangles CDE, C′D′E′, C″D″E″, on a

$$D^2 = D'^2 + D''^2.$$

*Démonstration.* Prenons les droites X et Y pour axes des $x$ et des $y$ ; soient $x', y'$ ; $x'', y''$ ; $x''', y'''$ les coordonnées du centre C, D, E et R, R′, R″ les rayons des cercles respectifs, les coordonnées de C′, D′, E′ sont

$$x', R\ ;\ x'', R'\ ;\ x''', R''\ ;$$

et les coordonnées des points C″, D″, E″ sont

$$R, y'\ ;\ R', y''\ ;\ R'', y'''\ ;$$

soit $y = ax + b$ (1) l'équation de la droite qui touche les trois cercles C, D, E ; on a donc :

$$R = (y' - b)\cos\alpha - x'\sin\alpha\ ;\quad R' = (y'' - b)\cos\alpha - x''\sin\alpha\ ;$$
$$R'' = (y''' - b)\cos\alpha - x'''\sin\alpha.$$

$\alpha$ est l'angle que fait la droite (1) avec l'axe des $x$.

On a :

$$2D = x'y'' - x''y' + x''y''' - x'''y'' + x'''y' - y'''x'$$
$$2D' = x'R' - x''R + x''R'' - x'''R' + x'''R - R''x'$$
$$2D'' = y''R - y'R' + y'''R' - y''R'' + y'R'' - y'''R.$$

Remplaçant R, R′, R″ par leurs valeurs, on trouve :

$$D' = D\cos\alpha$$
$$D'' = -D\sin\alpha$$

d'où

$$D^2 = D'^2 + D''^2. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

*Remarque.* Tel est le théorème énoncé sans démonstration, et qu'on peut ainsi généraliser.

II. Théorème. Soient quatre sphères C,D,E,F qui touchent le même plan; et trois plans XY, XZ, YZ rectangulaires, se coupant suivant les droites X, Y, Z ; que les quatre sphères se meuvent parallèlement à l'axe des Z jusqu'à ce qu'elles touchent le plan XY et soient alors $C', D', E', F'$ les positions des quatre centres ; ensuite parallèlement à l'axe des Y, jusqu'à ce qu'elles touchent le plan XZ et soient alors $C'', D'', E'', F''$, les positions des quatre centres; et finalement que les sphères se meuvent parallèlement à l'axe des X jusqu'à ce qu'elles deviennent tangentes au plan YZ et soient $C''', D''', E''', F'''$ les positions des quatre centres; représentons par $V, V', V'', V'''$ les volumes des quatre pyramides

$$CDEF,\ C'D'E'F',\ C''D''E''F'',\ C'''D'''E'''F'''$$

on aura

$$V^2 = V'^2 + V''^2 + V'''^2.$$

*Démonstration.* Il est évident qu'on ne change pas les volumes des pyramides, en faisant mouvoir les plans XY, YZ, XZ, parallèlement à eux-mêmes; on peut donc supposer qu'ils passent tous les trois par le centre C d'une des sphères; et prenons-les pour plans des coordonnées. On peut de même admettre que les rayons des sphères soient diminués d'une longueur égale au plus petit de ces rayons; de sorte que l'une de ces sphères que nous supposons être C, se réduit à un point, l'origine. Les quatre pyramides sont

$$CDEF\ ;\ CD'E'F'\ ;\ CD''E''F''\ ;\ CD'''E'''F''';$$

soient

$$x', y', z'\ ;\ x'', y'', z''\ ;\ x''', y''', z''',$$

les coordonnées de D,E,F,

et

$$R, R', R'',$$

les rayons des sphères ; on aura pour coordonnées de

$$\begin{array}{ll} D' \text{ coord.} & x', y', R \\ E' \ldots\ldots & x'', y'', R' \\ F' \ldots\ldots & x''', y''', R'' \end{array}$$

De plus :

$$\left.\begin{array}{l} R = x' \cos\alpha + y' \cos\beta + z' \cos\gamma \\ R' = x'' \cos\alpha + y'' \cos\beta + z'' \cos\gamma \\ R'' = x'' \cos\alpha + y''' \cos\beta + z''' \cos\gamma \end{array}\right\} \begin{array}{l}\alpha, \beta, \gamma \text{ angles du plan avec} \\ \quad \text{les axes des } x, y, z\, ; \end{array}$$

on a :

$$6V = x'y''z''' + y'z''x''' + z'x''y''' - x'z''y''' - y'x''z''' - z'y''x'''$$
$$6V' = x'y''R'' + y'x'''R' + x''y'''R - x'y'''R' - y'x''R'' - y''x'''R$$

(Voy. t. I, p. 388).

Remplaçant $R, R', R''$ par leurs valeurs, on trouve :

$$V = V' \cos\alpha\, ;$$

et de même

$$V = V'' \cos\beta\, ;\; V = V''' \cos\gamma\, ;$$

donc

$$V^2 = V'^2 + V''^2 + V'''^2.$$

Tm.