Nouvelles annales de mathématiques

Finck

Sur la division, les extractions des racines carrées et cubiques, abrégées

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 5 (1846), p. 250-253

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1846_1_5__250_0>

SUR LA DIVISION,

les extractions des racines carrées et cubiques, abrégées,

PAR M. FINCK,

docteur ès sciences, professeur à l'École d'artillerie et au college royal de Strasbourg.

—

« Il serait à désirer qu'on eût une théorie analytique de toutes les approximations (abréviations?) usitées en arithmétique, surtout pour celles de Fourier et de M. Guy. »

Cette note, que je copie, page 131, des *Annales*, est au moins, quant à la dernière partie, le produit d'un *lapsus memoriæ*; car je vous ai donné une théorie analytique de la division abrégée, avec une règle plus simple et plus complète que celle de M. Guy (t. IV, p. 348 et 658), et je l'ai démontrée analytiquement. Quant à la méthode de Fourier, je l'ai discutée dans mon Arithmétique, page 106 (2ᵉ édit.). Or il n'est même pas besoin d'une seconde démonstration, car avec un peu d'attention on reconnaît que la méthode de Fourier et la méthode ancienne ne diffèrent que par l'ordre dans lequel on y retranche les produits partiels, de sorte que la même règle leur est applicable, et cette règle, la voici :

Décomposez le diviseur en deux branches, de façon que celle de gauche soit la plus petite possible, tout en ne surpassant pas la somme des chiffres de celle de droite; tous ces chiffres de droite pourront être successivement négligés dans les deux méthodes : la partie de gauche formera le *diviseur désigné* de Fourier, et le dernier diviseur de l'autre méthode; le quotient obtenu sera exact à une unité près; mais on ne sait s'il est approché en plus ou en moins. En cherchant un chiffre de plus (avec les précautions convenables prises dès le commencement), on lèvera presque toujours le doute.

Puisque nous en sommes sur ce chapitre, je vais aussi compléter la méthode abrégée pour la recherche des racines carrées et cubiques. Pour la racine carrée, si la première tranche est au moins 25, on peut déterminer par la division *autant* de chiffres qu'on en a déjà obtenus (*), sinon un de moins. Donc, on cherchera, selon le cas, les deux ou les trois premiers chiffres par le procédé ordinaire; puis on en déterminera deux nouveaux par la division. Du reste de la division on retranche le carré du quotient, et on détermine quatre nouveaux chiffres par la division, puis huit nouveaux chiffres.

Racine cubique. Aussitôt qu'on a trouvé $n+1$ chiffres, on peut en trouver n par la division. Cet énoncé contrarie la règle ordinaire, mais il est vrai.

Soit a la partie trouvée à la racine, x la partie inconnue, x étant $< 10^n$, mais ayant n chiffres, la racine est $10^n.a+x$, son cube $10^{3n}a^3 +$, etc., et le reste, après que a est trouvé,

$$R = 3.10^{2n}a^{2n}x + 3\,10^n.a^n a^n x^2 + x^3,$$

d'où

$$x = \frac{R}{3.10^{2n}.a^{2n}} - \text{etc.},$$

soit q le quotient, r le reste de la division de R par $3\,10^{2n}a^{2n}$, il vient :

$$x = q + \frac{r - 3.10^n.a^n.x^2 - x^3}{3.10^{2n}.a^{2n}},$$

et pour que q soit la valeur de x à une unité près, il suffit que

$$3.10^{2n}.a^{2n} > 3.10^n.a^n x^2 + x^3,$$

(*) Ceci est assez facile à prouver pour que je ne m'y arrête pas.

ou que
$$a^{2n} - a^n . \frac{x^2}{10^n} - \frac{x^3}{3.10^{2n}} > 0,$$

et comme dans ce trinôme relatif à a les racines sont réelles, il suffit que a soit $>$ la plus grande racine, laquelle est

$$\frac{1}{2}\frac{x^2}{10^n} + \frac{1}{10^n}\sqrt{\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3}};$$

le radical est

$$< \sqrt{\frac{x^4 + x^3}{4 \quad 3} + \frac{x^2}{9}} = \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{3}\right);$$

donc il suffit que

$$a \geqq \frac{1}{10^n}\left[\frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{3}\right] = \frac{1}{10^n}\left[x^2 + \frac{x}{3}\right],$$

et comme $x < 10^n$, il suffit que

$$a \geqq \frac{1}{10^n}\left[10^{2n} + \frac{10^n}{3}\right] = 10^n + \frac{1}{3}.$$

Si donc on obtient à la racine 100....., on continuera jusqu'à ce qu'on trouve un chiffre significatif; il n'y a aucun motif pour abréger cette partie de l'opération; sinon, après avoir trouvé 3 chiffres, on détermine les 2 suivants par la division; on retranche ce qu'il faut, et on détermine les 6 suivants par la division, etc.

Quant au sens du quotient q, il est clair que

$$\begin{array}{llll} q \text{ sera} & > x, \text{ si } & 3.10^{2n}a^{2n}q + 3.10^n a^n q^2 + q^3 & > r, \\ q & < x, \text{ si } & \text{id.} & < r, \\ q & = x, \text{ si } & \text{id} & = r. \end{array}$$

Note. J'attache trop d'importance aux travaux de mon savant collègue pour avoir oublié qu'en 1845 il a enrichi les *Nouvelles Annales* d'une méthode abrégée de division, fondée sur des considérations analytiques; mais je n'ai pas oublié non plus que cette méthode *n'est pas* celle de M. Guys :

il est donc toujours à désirer qu'on donne une base analytique à cette dernière méthode ainsi qu'aux extractions de racines abrégées en général. (*V.* t. IV, p. 561.) Tm.