

A. CROSSON

Division abrégée

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 5
(1846), p. 244-249

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1846_1_5__244_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1846, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

DIVISION ABRÉGÉE ,

PAR M. A. CROSSON,

Professeur au collège de Bourges.

1° *Théorème.* Lorsque le nombre des chiffres du diviseur est égal au nombre des chiffres du quotient plus un , si on prend le dividende et le diviseur à moins d'une demi-unité près , l'erreur commise au quotient est moindre que $\frac{1}{2c} + \frac{1}{2c \cdot 10^p c}$, désignant le premier chiffre à gauche du diviseur et p le nombre des chiffres du quotient.

Démonstration. Soit a le dividende , et b le diviseur donnés : le dividende que l'on prendra sera le nombre entier

compris entre les limites $a + \frac{1}{2}$ et $a - \frac{1}{2}$; on prendra de même pour diviseur le nombre entier compris entre $b + \frac{1}{2}$ et $b - \frac{1}{2}$, de sorte que le quotient que l'on calculera

pourra se représenter par $\frac{a \pm \frac{1}{2}}{b \mp \frac{1}{2}}$, en se réservant de choisir

les signes de manière à rendre l'erreur aussi grande

que possible: $\frac{a}{b} - \frac{a \pm \frac{1}{2}}{b \mp \frac{1}{2}}$ sera la limite de l'erreur commise

sur le quotient demandé. Cette quantité peut se mettre sous

la forme $\pm \frac{1}{2} \frac{a+b}{b \left(b \mp \frac{1}{2} \right)}$, ou bien en désignant le quotient

exact par q , $\pm \frac{1}{2} \frac{q+1}{b \mp \frac{1}{2}}$ (Cirodde, *Arithm.*). — Cela posé,

soit p le nombre des chiffres de la partie entière du quotient, n le nombre des chiffres de la partie entière du diviseur, et c le premier chiffre à gauche de ce diviseur ; q sera toujours moindre que 10^p , mais d'une fraction qui pourra être très-voisine de l'unité ; donc $q + 1$ sera moindre que $10^p + 1$;

$b \mp \frac{1}{2}$ renferme la partie entière de b , ou, si la partie frac-

tionnaire est plus grande que $\frac{1}{2}$, cette partie entière aug-

mentée d'une unité ; donc $b \mp \frac{1}{2}$ ne sera pas moindre que

$c \times 10^{n-1}$, de sorte que l'erreur sera plus petite que

$$\frac{1}{2} \frac{10^p + 1}{c \times 10^{n-1}} = \frac{1}{2} \left[\frac{10^p}{c \cdot 10^{n-1}} + \frac{1}{c \cdot 10^{n-1}} \right].$$

Si $p = n - 1$, cette limite devient $\frac{1}{2c} + \frac{1}{2c \cdot 10^p}$, C. Q. F. D.

2° Prenons maintenant deux nombres quelconques, que je supposerai d'abord entiers ; — on propose de diviser 5834573981213485341 par 9345841293789 ; on voit aisément que le quotient a 6 chiffres ; le nombre des chiffres du diviseur *surpasse* le nombre des chiffres du quotient plus un ; nous ramènerons facilement la question à ce dernier cas, en séparant au dividende et au diviseur 6 chiffres décimaux ; et nous aurons le quotient demandé en divisant

$$5834573981213,485341 \text{ par } 9345841,293789.$$

Prenons le dividende et le diviseur à moins d'une demi-unité près, et d'après le théorème précédent, en divisant

$$5834573981213 \text{ par } 9345841,$$

l'erreur commise sur le quotient demandé sera moindre que $\frac{1}{2.9} + \frac{1}{2.9 \cdot 10^6}$. En effectuant, on trouve 6 pour premier chiffre du quotient, et pour reste, 227069381213. Pour continuer l'opération, il faudrait diviser ce reste par le diviseur 9345841 ; mais ici le quotient n'a plus que 5 chiffres ; donc, d'après le même principe que précédemment, nous pourrions, à ce quotient, ou ce qui est la même chose, au quotient de 22706938121,3 par 934584,1, substituer le quotient de 22706938121 par 934584, et l'erreur commise sur ce quotient sera moindre que $\frac{1}{2.9} + \frac{1}{2.9 \cdot 10^5}$. Admettant que les erreurs soient dans le même sens, l'erreur totale commise sur le quotient demandé sera donc moindre que

$$2 \cdot \frac{1}{2.9} + \frac{1}{2.9} \left(\frac{1}{10^6} + \frac{1}{10^5} \right).$$

Je trouverai donc encore un chiffre de ce nouveau quotient,

et je serai ramené à diviser 3015258121 par 934584. — En raisonnant comme précédemment, on supprimera ce dernier chiffre du diviseur et le dernier chiffre du dividende; en substituant à ce dernier quotient celui de 301525812 par 93458, nous ne commettrons sur ce quotient qu'une erreur moindre que $\frac{1}{2.9} + \frac{1}{2.9 \cdot 10^4}$, et admettant que cette erreur soit encore dans le même sens que les premières, l'erreur totale commise sur le quotient demandé sera donc moindre que

$$3 \cdot \frac{1}{2.9} + \frac{1}{2.9} \left(\frac{1}{10^0} + \frac{1}{10^5} + \frac{1}{10^4} \right).$$

Continuons de la même manière jusqu'au dernier chiffre, et l'erreur totale ne s'élèvera pas à

$$6 \cdot \frac{1}{2.9} + \frac{1}{2.9} \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \dots + \frac{1}{10^6} \right) + \frac{1}{2},$$

car le dernier quotient ne pouvant être pris qu'à une demi-unité près, cette erreur peut encore s'accumuler avec les erreurs précédentes. — Si on observe que

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \dots + \frac{1}{10^6}$$

sera dans tous les cas moindre que la somme des termes de la progression géométrique décroissante à l'infini $\frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \dots$;

cette valeur sera toujours moindre que $\frac{1}{9}$, de sorte que la

limite de l'erreur sera $6 \cdot \frac{1}{2.9} + \frac{1}{2.9} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$. Remarquons

de plus que barrer successivement 5 chiffres dans les restes-dividendes, revient à les barrer immédiatement au dividende donné. De la marche précédente, nous déduirons cette règle :

Quand on a un dividende et un diviseur entiers, présentant un très-grand nombre de chiffres, si on ne prend au diviseur qu'un chiffre de plus qu'il n'y a au quotient, et au dividende que ce qu'il en faut pour contenir cette portion du diviseur; qu'on divise ensuite par ce dernier nombre, puis le reste par ce dernier nombre, dont on a barré le dernier chiffre à droite, puis encore le nouveau reste par le diviseur, dont on a encore barré le dernier chiffre à droite, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on n'ait plus que deux chiffres au diviseur. L'erreur totale commise sur le quotient sera moindre que l'unité divisée par le double du premier chiffre à gauche du diviseur, prise autant de fois qu'il y a de chiffres au quotient, plus le neuvième de cette même fraction, plus une demi-unité, en ayant soin toutefois de prendre le dernier quotient à moins d'une demi-unité près. Il est bien entendu qu'il faudra toujours prendre soit le dividende, soit chacun des diviseurs partiels, à moins d'une demi-unité près de l'ordre auquel on s'arrête.

Les divisions de nombres décimaux se ramenant toujours à des divisions de nombres entiers, on pourra toujours appliquer ce dernier théorème. Voici donc ce qu'il faudra faire dans la pratique: on cherchera d'abord le nombre des chiffres du quotient, ce qui se fera en reculant la virgule vers la droite au diviseur, jusqu'à ce qu'on arrive à le rendre plus grand que le dividende, et comptant le nombre de rangs qu'on a fait parcourir à la virgule; on calculera la limite de l'erreur que donnera la division abrégée au moyen de la formule précédente; si cette erreur est moindre que 1, on peut opérer immédiatement; si elle surpasse une unité, alors on calculera un chiffre de plus au quotient, en rendant le dividende 10 fois plus grand et appliquant la même méthode; si elle surpasse 10 unités, on calculera encore un chiffre de plus, et ainsi de suite.

3° Veut-on, par exemple, trouver, à moins de 0^m,001, le diamètre d'une circonférence dont la longueur est 85^m,45382913; on sait qu'il faut diviser 85,45382913 par le nombre $\pi = 3,1415926535\dots$ Il y a deux chiffres à la partie entière du quotient, et comme on demande des millimètres, il y a donc 5 chiffres au quotient. La limite est donc $5 \times \frac{1}{6} + \frac{1}{54} + \frac{1}{2}$, ce qui est moindre que $\frac{3}{2}$. Ainsi, en divisant, d'après notre méthode, 8545382,913 par 314159,26... on aurait le quotient demandé à moins de $\frac{3}{2}$ millimètres près en plus ou en moins. Il faudra donc calculer un chiffre de plus pour avoir l'approximation exigée, c'est-à-dire qu'il faudra diviser ici 85453829,13 par 3141592,6... Et l'erreur n'atteindra pas deux unités du dernier ordre; on supprimera alors le dernier chiffre, et on aura l'approximation demandée. Voici le tableau des calculs :

$$\begin{array}{r|l}
 85,45383 & \overset{263}{3,1415926535} \\
 22\ 62197 & \hline
 63084 & 272008 \\
 252 & \\
 4 &
 \end{array}$$

Le quotient est donc compris entre 27^m,2006 et 27^m,2010, sans pouvoir atteindre ni l'une ni l'autre limite; donc il sera 27^m,201. L'erreur est en plus et moindre qu'un demi-millimètre.

Si le diviseur contenait moins de chiffres que le quotient, on ferait la division régulière jusqu'à ce qu'il ne restât plus à trouver au quotient qu'un nombre de chiffres égal au nombre des chiffres du diviseur moins un ou moins deux, selon les cas, et ce serait à cette dernière portion du quotient que l'on appliquerait notre méthode d'approximation.