Nouvelles annales de mathématiques

Guilmin

Conséquences de la règle des signes de Descartes

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 5 (1846), p. 239-244

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1846_1_5__239_0>

CONSÉQUENCES

de la règle des signes de Descartes,

PAR M. GUILMIN,
Ancien élève de l'École normale.

—

Faisons d'abord quelques remarques sur les suites de signes :

1^{re} *Remarque. Le nombre des variations qu'offre une suite de signes est* PAIR *ou* IMPAIR, *suivant que les deux signes extrêmes sont* SEMBLABLES *ou* DIFFÉRENTS.

Supposons pour fixer les idées que le 1^{er} signe soit $+$; lorsqu'en lisant la suite, on compte *une* variation, le dernier signe qu'on a lu est $-$; quand on compte *deux* variations, on est parvenu à un signe $+$; quand on en compte *trois*, on vient de lire un signe $-$; et ainsi de suite, chaque fois que le nombre des variations comptées est pair, le dernier signe considéré est le signe primitif $+$; et chaque fois que ce nombre est impair, on en est au signe $-$; si donc la suite se termine à un signe $+$, le total des variations est un nombre pair; si le signe extrême est $-$, ce nombre est impair (*).

2^e *Remarque. Si entre deux signes d'une suite* DONNÉE *on intercale des signes arbitraires en nombre quelconque, le nombre des variations reste le même, ou augmente d'un nombre pair.*

Supposons qu'on intercale des signes entre deux signes

(*) V. t. II, p. 243. Lemme I. Tm.

semblables $+$ et $+$ par exemple; ou bien le nombre des variations n'augmente pas; c'est ce qui arrive quand on n'écrit que des signes $+$ entre les deux signes considérés; ou bien on introduit un nombre pair de variations; en effet à la place de deux signes $++$ qui offrent une permanence, dans la suite générale, on écrit une suite partielle qui commençant à $+$ pour finir à $+$ ne peut offrir qu'un nombre pair de variations (1re Remarque).

Supposons maintenant qu'on intercale des signes entre deux signes contraires $+$ et $-$, par exemple; à cet endroit de la suite donnée, il y a une variation que l'on conserve simplement si les signes *intercalés* sont tous des signes $+$, ou tous des signes $-$. S'il en est autrement, à la place de deux signes $+\ -$ offrant une variation, dans la suite générale, on écrit *une* suite partielle qui commençant à $+$ pour finir à $-$, ne peut offrir qu'un nombre impair $2n+1$ de variations (1re Remarque). En déduisant la variation qui existait, on voit que le nombre des variations introduites est un nombre pair $2n$.

1. En considérant une équation $f(x)=0$ de degré m, nous désignerons par v le nombre des variations de son 1er membre $f(x)$, par P le nombre de ses permanences; par v' le nombre des variations du polynôme $f(-x)$ obtenu en changeant x en $-x$ dans $f(x)$.

On sait que le nombre des racines imaginaires de $f(x)=0$ n'est pas moindre que $m-(v+v')$.

2. *Théorème. La somme* $v+v'$ *des nombres de variations de* $f(x)$ *et de* $f(-x)$, *n'est jamais plus grande que le degré* m *de* $f(x)$, *l'excès* $m-(v+v')$ *s'il existe, ne peut être qu'un nombre pair.*

Démonstration. Supposons d'abord que $f(x)$ soit un polynôme complet de ce degré m; le nombre v de ses variations, plus le nombre P de ses permanences de signes égale m:

mais dans un pareil polynôme, de deux exposants consécutifs, l'un étant pair, l'autre impair, le remplacement de x par $-x$, change les variations en permanences, et les permanences en variations ; de sorte que $v'=\text{P}$; or $v+\text{P}=m$, donc $v+v'=m$.

Supposons maintenant $f(x)$ incomplet ; imaginons qu'on le complète en mettant des termes quelconques de signes arbitraires à la place des termes manquants ; on obtient ainsi un polynôme $\text{F}(x)$ offrant un certain nombre de variations que nous désignerons par V; concevons qu'on change x en $-x$ dans $\text{F}(x)$. on obtient un polynôme $\text{F}(-x)$ qui peut-être regardé comme le polynôme $f(-x)$ complété d'une certaine manière, par les termes intercalés dans $f(x)$, dans chacun desquels on aurait remplacé x par $(-x)$; soit V' le nombre des variations de $\text{F}(-x)$. Puisque $\text{F}(x)$ et $\text{F}(-x)$ sont des polynômes complets du degré m, d'après la 1re partie de notre démonstration, $\text{V}+\text{V}'=m$. Mais V n'est pas moindre que v, V' n'est pas moindre que v' (2e Remarque). Donc $\text{V}+\text{V}'$ ou m, n'est pas moindre que $v+v'$. On voit donc que $v+v'$ n'est jamais plus grand que m; de plus l'excès $m-(v+v')=\text{V}+\text{V}'-v-v'=(\text{V}-v)+(\text{V}'-v')$, est toujours un nombre pair. En effet les nombres de variations intercalées $\text{V}-v$, $\text{V}'-v'$ ne peuvent être que des nombres pairs, d'après notre 2e Remarque (*).

3. Le Théorème de Descartes est fondé sur ce lemme.

Si on multiplie un polynôme entier $f(x)$, par un binôme $x-a$, (a étant positif), le produit $f(x)(x-a)$ offre, au moins, une variation de plus que le multiplicande $f(x)$.

On peut ajouter que l'*excès du nombre des variations de* f(x) (x — a) *sur le nombre des variations de* f(x), *est*

(*) V. l'equation (8), t. II, p 250. Tm.

toujours un nombre impair 2k + 1 , *quand il est supérieur à* 1.

Il suffit d'observer que le dernier terme de $f(x)$, et le dernier terme du produit $f(x)(x-a)$ ont des signes contraires.

Si donc, par exemple, le 1er terme de $f(x)$ est positif, et son dernier négatif, le 1er terme du produit sera positif, et le dernier positif.

De + à —, le nombre des variations de $f(x)$ est impair ; de + à +, le nombre des variations du produit est pair ; l'excès du deuxième nombre sur le premier est un nombre impair[*].

4. *Si la multiplication de* f(x) *par* (x—a) *introduit plus d'une variation*, 2k+1, *par exemple*, *l'équation* f(x) = 0 *a au moins* 2k *racines imaginaires.*

Pour le démontrer, considérons à la fois les équations :

$$(1) \quad f(x)=0, \quad (2) \quad f(x)(x-a)=0.$$

L'équation (2) a les mêmes racines que l'équation (1), plus la racine positive a.

Nommons w le nombre des variations de $f(x)(x-a)$; $w=v+2k+1$.

Appelons w' le nombre des variations du polynôme $f(-x)(-x-a)$, que l'on obtient en changeant x en $-x$ dans $f(x)(x-a)$.

Le nombre des racines positives de l'équation (1) ne pouvant dépasser v, le nombre des racines positives de l'équation (2) ne peut dépasser $v+1$; le nombre des racines négatives, de cette même équation (2), ne peut dépasser w' ; le maximum du nombre des racines réelles de l'équation (2) est donc $v+1+w'$. Et le minimum du nombre de ses racines ima-

(*) Voir *Corollaire*, t. II, p. 249. Tm.

ginaires est $m-(v+1+w')$. Mais, d'après une démonstration précédente la somme $w+w'$ ne peut dépasser le degré $m+1$ de $f(x)(x-a)$; on a au moins $m+1$ égal à $w+w'$ ou à $v+2k+1+w'$; le nombre des racines imaginaires de l'équation (2), qui n'est pas moindre que $m-(v+1+w')$ est donc au moins égal à $2k$.

Mais ce nombres des racines imaginaires de $f(x)(x-a)=0$ est le même que celui des racines imaginaires de l'équation $f(x)=0$. La proposition est donc démontrée (*).

5. *L'excès du nombre des variations du 1^er^ membre d'une équation* $f(x)=0$, *sur le nombre de ses racines positives*, *est* 0 *ou un nombre pair.*

Nous considérerons deux cas : 1° Le premier terme de $f(x)$ étant positif, le dernier terme peut être *positif* ou *négatif.*

1^er^ *Cas.* Le nombre des racines positives de l'équation est alors pair ; de + à +, le nombre des variations de $f(x)$ est aussi pair ; la différence de ces deux nombres est 0 ou un nombre pair.

2^e^ *Cas.* Le nombre des racines positives est alors impair ; de + à —, le nombre des variations de $f(x)$ est impair ; la différence entre ces deux nombres impairs est 0 ou un nombre pair. Voir Lemme 3, t. II, page 249.

6. *Lorsque toutes les racines d'une équation* $f(x)=0$ *sont réelles, le nombre* p *de ses racines positives est égal au nombre* v *des variations de* $f(x)$, *et le nombre* n *de ses racines négatives est égal au nombre* v' *des variations de* $f(-x)$.

Nous avons $p+n=m$, et $v+v'$ pas plus grand que m. (m étant le degré de $f(x)$). Mais v n'est pas moindre que p, v' n'est pas moindre que n ; par suite $v+v'$ n'est pas moindre que $p+n$ ou m; donc $v+v'=m$, d'où $v+v'=p+n$. Il résulte de là

(*) La demonstration de ce theoreme de M. Sturm, donnee p. 116, est plus complete et me semble plus courte. Tm.

que p qui n'est jamais plus grand que v, ne peut dans ce cas particulier être moindre que v, sans quoi n serait plus grand que v', ce qui est impossible. Donc $p=v$, et par suite $n=v'$.

Si l'équation $f(x)=0$ est complète et a toutes les racines réelles, le nombre de ses racines négatives est égal au nombre P des permanences de son premier membre; car ce nombre P est alors égal au nombre v' des variations de $f(x)$.

Corollaire du théorème 4. En faisant $a=1$, on arrive facilement à cette conséquence : Retranchez chaque coefficient de $f(x)$ du coefficient de la puissance de x immédiatement inférieure, écrivez seulement le signe du reste, en tête de cette suite de signes, mettez le signe $+$ du 1er terme de $f(x)$; si la suite de signes ainsi obtenue, offre $2k+1$ variations de plus que $f(x)$, l'équation $f(x)=0$ a au moins $2k$ racines imaginaires.

(*La suite prochainement.*)