TERQUEM

Note sur les aires et les volumes

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 5 (1846), p. 232-235

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1846_1_5__232_0>

NOTE SUR LES AIRES ET LES VOLUMES.

A. *Aires planes.*

I. Un espace *fermé* a une *aire*; c'est-à-dire, contient un certain nombre de fois *l'unité d'aire* Par exemple le mètre carré; l'aire d'un espace *ouvert* ne présente aucun sens, est un non-sens. Lors donc qu'une figure est ouverte, on conçoit une ligne droite qni joint ses deux points extrêmes, alors la figure est fermée, et l'on peut évaluer l'aire du segment.

II. Les espaces infinis ont les uns des aires *infinies*, et les autres des aires *finies*. Lorsqu'on peut fermer un espace infini; de manière à obtenir un segment dont l'aire soit plus grande qu'aucune aire donnée, alors on dit que cet espace infini a une aire infinie. Lorsque cette opération est impos sible, on dit que l'espace infini a une *aire finie*, en prenant pour cette aire la dernière limite que le segment ne peut dépasser. Ainsi l'aire de la parabole indéfinie et celle de l'hyperbole indéfinie, *sont infinies*. Mais l'espace infini compris dans le folium de Descartes, entre les branches infinies et l'asymptote à une *aire finie*. (V. t. III, p. 302). On peut se rendre facilement raison de l'existence de ce genre d'espace. En effet, il y a des séries composées d'un nombre infini de termes, et dont la somme est *finie*, chacun de ces termes peut représenter une aire dont la somme a une limite finie. Dans les hyperboles d'un degré supérieur au second, l'espace asymptotique infini peut toujours se partager en deux espaces infinis, dont l'un a une aire infinie, et l'autre une aire finie.

III. Les espaces à aires infinies sont de deux genres, *hyperboliques* et *paraboliques*. Les premiers sont formés de branches qui vont sans cesse en s'écartant, en divergeant, de sorte que les tangentes aux points extrêmes de deux branches, font un angle qui n'est pas nul; un tel espace reste donc *ouvert*, même à l'infini; et le sens du mot *aire* n'est pas applicable; tandis que les espaces paraboliques sont formés de branches qui s'écartent de moins en moins, tendent au parallélisme, et les tangentes aux points extrêmes font un angle nul; un tel espace a une *tendance* à se fermer; et les aires infinies de tels espaces peuvent avoir entre elles un rapport *fini*.

Ainsi la comparaison des aires infinies des hyperboles du second degré ne présente aucun sens; mais les aires infinies des paraboles du même degré, lignes essentiellement semblables, sont entre elles comme les racines carrées des paramètres.

On trouve de même que les aires comprises entre l'hyperbole ordinaire et ses asymptotes sont entre elles comme les carrés des excentricités.

C'est ainsi que dans la géométrie élémentaire, les aires des angles rectilignes n'ont aucun sens; tandis que les aires des espaces compris entre deux droites parallèles sont entre elles comme les distances de ces parallèles; un raisonnement facile fait voir que l'attribution d'aires comparables aux angles rectilignes mène à des conséquences absurdes. En effet, soient trois droites AB, AC, AD, issues du même point A; et les points B, C, D étant supposés sur une même droite; les aires des triangles ABC, ACD sont entre elles comme les bases BC, CD; la droite BCD, s'éloignant du sommet et restant toujours parallèle à elle-même, les aires des triangles mentionnés vont sans cesse en croissant, mais le rapport de ces aires est constant; à l'infini les aires se confondent avec celles des angles BAC, CAD, si elles existent; donc ces aires angulaires seraient entre elles, comme BC à CD ; ce qui est absurde, puisque la droite BCD a été menée arbitrairement.

Quand donc il est question d'aires infinies des angles rectilignes, il faut toujours sous-entendre les aires *infinies* des secteurs circulaires à rayon infini qui répondent à ces angles, aires qui ont un rapport fini ; ce qui a d'ailleurs lieu pour l'espace triangulaire infini décrit par une ligne plane infinie quelconque, tournant dans son plan, autour d'un de ses points.

B. *Aires des surfaces courbes et volumes.*

IV. Ce qu'on a dit ci-dessus des aires planes est encore applicable, mot à mot, ici. Il ne saurait y avoir des espaces indéfinis à aire finie ; mais ces aires infinies peuvent avoir entre elles des rapports finis ; ainsi les aires infinies de deux cylindres droits sont entre elles comme les périmètres des bases ; mais on ne peut comparer les aires infinies de deux cônes droits.

Deux surfaces *indéfinies* asymptotiques l'une à l'autre peuvent renfermer un volume *fini*. On en a un exemple dans le folium de Descartes ; si les deux branches infinies avec leur asymptote se meuvent parallèlement suivant une direction perpendiculaire à leur plan, le volume indéfini compris entre le plan asymptotique et la surface est égal à l'aire du folium, quantité finie multipliée par le chemin parcouru ; si deux de ces surfaces courbes ainsi engendrées, ont même plan asymptotique, le volume indéfini compris entre les deux surfaces sera d'une grandeur finie.

V. Les angles solides polyédriques, les angles solides coniques prolongés indéfiniment n'ont de volumes comparables qu'en les supposant fermés par des surfaces sphériques, ayant leurs cercles au sommet de l'angle; alors ces volumes sont proportionnels aux aires de ces surfaces; aires infinies qui sont entre elles comme les aires finies des surfaces sphériques concentriques, ayant l'unité pour rayon. Ainsi les courbes cono-sphériques, tracées sur une sphère d'une unité de rayon interceptent des aires qui mesurent l'angle solide du cône qui a cette aire pour base et le centre de la sphère pour sommet.

Tm.