NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

BILLELAUT DE SAINT-MAURICE

Remarque sur les courbes algébriques rapportées à leur centre comme origine, ou à un axe de symétrie comme axe des abscisses

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 5 (1846), p. 228-231

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1846_1_5__228_1>

REMARQUE

Sur les courbes algébriques rapportées à leur centre comme origine, ou à un axe de symétrie comme axe des abscisses.

PAR M. BILLELAUT (DE SAINT-MAURICE),
élève de l'institution Massin.

Quand on veut simplement prouver que toute équation d'un lieu rapportée à un axe de symétrie comme axe des x contenant des puissances impaires de l'ordonnée peut toujours être remplacée par une équation plus simple, qui donnera tous les points du même lieu, la démonstration suivante suffit.

Soit F $(x,y)=0$ l'équation du lieu rapportée à un axe de symétrie comme axe des x dans laquelle l'ordonnée entre à différentes puissances paires et impaires.

Je dis que je puis trouver une équation de degré plus simple donnant tous les points du lieu.

Donc l'équation F $(x, y) = 0$ doit avoir un facteur étranger que nous ferons disparaître, c'est ce que nous verrons plus tard.

Représentons par P la somme des termes de degré pair en y

par I celle des termes de degré impair.

Soit donc

$$P + I = F(x, y), \text{ d'où } P + I = 0.$$

Si je change y en $-y$ cette équation admettra les mêmes solutions réelles pour y puisque le lieu est symétrique par rapport à l'axe des x.

Donc tous les points du lieu seront donnés par $P - I = 0$, mais chacune des deux équations $P = 0$; $I = 0$ donne toutes les solutions communes à $P + I = 0$ et à $P - I = 0$. Donc chacune d'elles donne tous les points du lieu F $(x, y) = 0$ et comme I contient y dans tous ses termes $\frac{I}{y} = 0$ sera au moins d'un degré inférieur à F $(x, y) = 0$ et représentera tous les points du lieu. Comme elle est plus simple, le théorème est démontré. Le raisonnement serait absolument le même pour les courbes rapportées à leur centre comme origine.

Mais ce raisonnement m'ayant paru incomplet, j'ai été conduit à la démonstration suivante qui est aussi simple.

En effet, ce qui précède prouve bien qu'une équation de degré plus simple peut donner tons les points du lieu; mais il ne prouve pas qu'il y en ait une qui puisse les donner tous, *et rien que ceux-là*, car tout porte à croire que $\frac{I}{y} = 0$ a encore des solutions étrangères; soit donc F $(x, y) = 0$. L'équation de ce lieu F $(x, -y) = 0$ doit admettre toutes les mêmes solutions. Comme ces solutions sont en nombre infini. $F(x,y)=0$ et $F(x,-y)=0$ doivent être identiques ou avoir un facteur commun. Si elles sont identiques $F(x,y)=0$ ne contiendra que des puissances paires de y; si elles ne le sont pas, on a :

$$F(x,y)=\varphi(x,y)\,\psi(xy),$$
$$F(x,-y)=\varphi(x,y)\,\theta(xy),$$

alors $\psi(x,y)=0$ et $\theta(x,y)=0$ ne peuvent plus avoir qu'un nombre fini de solutions communes ; ces solutions représenteraient donc des points isolés qui ne pourraient avoir été introduits qu'artificiellement dans l'équation du lieu.

Ainsi $\varphi(x,y)=0$ donne exclusivement tous les points du lieu.

En opérant sur $\varphi(xy)=0$ comme sur $F(x\ y)=0$ et ainsi de suite, on arriverait à une équation qui ne contiendrait plus que des puissances paires de y qui est l'équation demandée. Il serait plus simple d'opérer sur les polynomes P et $\frac{1}{y}$ cités plus haut, c'est-à-dire de prendre leur plus grand commun diviseur.

Le principe peut donc être énoncé ainsi :

Si une équation entre deux variables $F(x,y)=0$ susceptible d'une infinité de solutions réelles est telle qu'à une même valeur réelle de x correspondent deux valeurs de y égales et de signes contraires, ou cette équation ne contiendra que des puissances paires de y ou elle sera décomposable en deux facteurs entiers dont l'un remplira cette condition, et l'autre ne donnera qu'un nombre infini de solutions nouvelles.

Il est bon de remarquer que s'il y avait eu des points isolés introduits artificiellement dans l'équation du lieu et qu'on voulût la remplacer par $\frac{1}{y}=0$, on aurait le plus ordinairement, au lieu de ces points, une courbe étrangère au lieu qui passerait par ces points ; il faudrait donc pour s'assurer de n'avoir pas de solutions étrangères faire la recherche du plus grand commun diviseur indiquée plus haut ; d'ailleurs on peut dire que la présence de ces points isolés n'infirme pas la généralité du théorème, car l'équation la plus simple qui puisse donner par exemple deux points isolés placés symétriquement par rapport à l'axe des x est

$$[(x+\alpha)^2+(y+\beta)^2]\,[(x+\alpha)^2+(y-\beta)^2]\,;$$

elle remplit bien la condition de ne contenir que des puissances paires de y.

La même démonstration, les mêmes observations sont applicables au cas d'une courbe rapportée à son centre comme origine.