Nouvelles annales de mathématiques

Huet

Expression des côtés d'un triangle et de sa surface en fonction des trois hauteurs

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 5 (1846), p. 225-226

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1846_1_5__225_1>

EXPRESSION

Des côtés d'un triangle et de sa surface en fonction des trois hauteurs.

PAR M. HUET,
licencié ès sciences mathématiques,
professeur de mathématiques au collége de Toulon.

Soient a, b, c les trois côtés du triangle ; h, h', h'' les hauteurs correspondantes et s la surface.

On a les relations :

$$(1) \qquad h = \frac{1}{2a}\sqrt{(a+b+c)(a+c-b)\,(b+a-c)\,(b+c-a)},$$

$$(2) \qquad ah = bh', \qquad\qquad ah = ch''.$$

Des équations (2) on tire $b = \dfrac{ah}{h'}$, $c = \dfrac{ah}{h''}$.

Portons ces valeurs dans l'équation (1), il vient :

$$h = \frac{a}{2}\sqrt{\left(1+\frac{h}{h'}+\frac{h}{h''}\right)\left(1+\frac{h}{h''}-\frac{h}{h'}\right)\left(\frac{h}{h'}+1-\frac{h}{h''}\right)\left(\frac{h}{h'}+\frac{h}{h''}-1\right)}$$

d'où :

$$h = \frac{a}{2h'^2h''^2}\sqrt{(hh'+hh''+h'h'')(hh''+h'h''-hh')(h'h''+hh'-hh'')(hh'+hh''-h'h'')}$$

et par suite :

$$a = \frac{2hh'^2h''^2}{\sqrt{(hh'+hh''+h'h'')(hh''+h'h''-hh')(h'h''+hh'-hh'')(hh'+hh''-h'h'')}}$$

On trouverait de même :

$$b=\frac{2h^2h'h''^2}{\sqrt{(hh'+hh''+h'h'')(hh''+h'h''-hh')(h'h''+hh'-hh'')(hh'+hh''-h'h'')}}$$

et

$$c=\frac{2h^2h'^2h''}{\sqrt{(hh'+hh''+h'h'')(hh''+h'h''-hh')(h'h''+hh'-hh'')(hh'+hh'-h'h'')}}$$

On sait d'ailleurs que $S=\frac{ah}{2}$,

donc on a :

$$S=\frac{h^2h'^2h''^2}{\sqrt{(hh'+hh''+h'h'')(hh''+h'h''-hh')(h'h''+hh'-hh'')(hh'+hh''-h'h'')}}$$

ou, si l'on veut en posant $hh'+hh''+h'h''=p$

d'où. . . . . $hh''+h'h''-hh'=p-hh'$

$$h'h''+hh'-hh''=p-hh''$$

$$hh'+hh''-h'h''=p-h'h''$$

$$S=\frac{h^2h'^2h''^2}{\sqrt{p(p-hh')(p-hh'')(p-h'h'')}}.$$

(V. t. II, p. 546.)