Terquem

Problème sur les probabilités

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 5 (1846), p. 218-221
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1846_1_5__218_1>

PROBLÈME SUR LES PROBABILITÉS (*).

L'urne A renferme n boules blanches ; l'urne B, n boules noires ; à chaque seconde il passe une boule de A en B et une autre de B en A. On demande le nombre probable de boules blanches qui se trouveront en A au bout de t secondes.

Solution. Supposons qu'au bout de $t-1$ seconde, il y ait :

Dans A... p, noires, et $n-p$. blanches ;

Dans B... $n-p$. noires, et p. blanches.

(*) Ce problème, généralisé pour un nombre quelconque d'urnes, a ete propose et résolu par Bernoulli (Daniel). *N. mém. de Petersbourg*, t. XIV. 1769, p. 3.

Il y a quatre cas possibles :

1° Une noire va de A en B et une noire de B en A ; l'état de A et de B ne sera pas changé ; la probabilité, pour qu'un tel échange ait lieu, est représentée par $\frac{p}{n} \times \frac{n-p}{n}$; et comme il y a $n-p$ boules blanches, la valeur totale de la blancheur sera représentée par $\frac{p(n-p)^2}{n^2}$

2° Une boule noire va de A en B et une blanche de B en A ; la probabilité d'un tel échange est représentée par $\frac{p}{n}.\frac{p}{n}$; et le nombre de boules blanches devient $n-p+1$; ainsi la valeur actuelle de la blancheur est $\frac{p^2(n-p+1)}{n^2}$

3° Une boule blanche va de A en B et une noire de B en A ; la probabilité est $\frac{n-p}{n} \times \frac{n-p}{n}$; le nombre de boules blanches est alors $n-p-1$; donc la valeur probable est $\frac{(n-p)^2(n-p-1)}{n^2}$

4° Une boule blanche va de A en B et une blanche de B en A ; la probabilité est $\frac{p}{n} \times \frac{n-p}{n}$; le nombre de boules blanches reste $n-p$, ainsi la valeur est $\frac{(n-p)^2 p}{n^2}$.

La somme de ces quatre valeurs est égale à

$$(n-p)\frac{(n-2)}{n}+1.$$

Or, en commençant on a $p=0$;
donc au bout de la 1re seconde, la valeur certaine est :

$$n-1$$

2e seconde, la valeur probable $\quad \frac{(n-1)(n-2)}{n}+1$

3e seconde. . . . . $\frac{(n-1)(n-2)^2}{n^2}+\frac{n-2}{n}+1$;

Au bout de la $t^{ème}$ seconde :

$$\frac{(n-1)(n-2)^{t-1}}{n^{t-1}}+\left(\frac{n-2}{n}\right)^{t-2}+\left(\frac{n-2}{n}\right)^{t-3}+\ldots\frac{n-2}{n}+1=s.$$

Faisant $\frac{n-2}{n}=1-r$; on aura : $s=\frac{(1-r)^t+1}{r}$.

Coroll. 1. Si $t=\infty$; $s=\frac{1}{r}=\frac{n}{2}$; ainsi, au bout d'un temps infini, on peut parier un contre un, qu'il ne reste dans l'urne A que la moitié des boules blanches; résultat qu'on peut trouver à priori.

Coroll. 2. Si r est une quantité très-petite, mais tr un produit appréciable, on a sensiblement :

$(1-r)^t=1-tr+\frac{t^2r^2}{1\cdot 2}-\frac{t^3r^3}{1\cdot 23\cdot}+\text{et}=e^{tr}$; e étant la base du système népérien; donc, lorsque n est très-considérable, on a : $s=\frac{n}{2}\left(1+\frac{1}{e^{tr}}\right)=\frac{n}{2}\left(1+\frac{1}{e^{\frac{2t}{n}}}\right)$ (1).

Coroll. 3. Si deux vases A et B d'égale capacité sont remplis chacun d'un liquide différent, et s'ils communiquent par des canaux de manière qu'il s'écoule uniformément la même quantité de liquide de A en B et de B en A; la formule (1) fait connaître à chaque instant l'état du mélange; n représente le volume; et connaissant l'etat du mélange au bout d'un temps t', on le connaîtra pour un temps quelconque t.

5° Autrement; A, a pour acquérir une boule blanche, une probabilité représentée par $\frac{p}{n}$; et pour perdre une boule blanche une probabilité $\frac{n-p}{n}$, de sorte que l'état probable de A au bout de t secondes sera :

$$n-p+\frac{p}{n}-\frac{(n-p)}{n}=(n-p)\frac{(n-2)}{n}+1.$$

6° Soient maintenant trois urnes A, B, C; la première contient n boules blanches, la seconde n boules noires, et la troisième n boules rouges; à chaque seconde il passe une boule de la première dans la seconde, de la seconde dans la troisième, et de la troisième dans la première; quel est le nombre probable des boules blanches dans l'urne A au bout de t secondes? soit au bout de $t-1$ secondes le nombre de boules blanches, p dans A; p' dans B; et p'' dans C; on aura:

$$p+p'+p''=n.$$

Ainsi A a une chance $\frac{p''}{n}$ de gagner une boule blanche, et une chance $\frac{p}{n}$ de perdre. Donc, au bout de t secondes, l'état blanc probable de A est: $p+\frac{p''}{n}-\frac{p}{n}=\frac{p(n-1)+p''}{n}$; celui de B: $\frac{(n-1)p'+p}{n}$; celui de C: $\frac{(n-1)p''+p'}{n}$.

Tm.