Nouvelles annales de mathématiques

MIDY

Question d'examen

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 5 (1846), p. 214-218

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1846_1_5__214_0>

QUESTION D'EXAMEN.

(Voir t. III, p. 603.)

PAR M. MIDY,
ancien professeur dans les Colléges royaux.

On demande quelle est la courbe dont l'équation polaire est

$$\rho = \frac{1}{\cos^2 \omega}. \qquad (1)$$

La valeur de ρ restant la même quand on y change le signe de $\cos \omega$, il s'ensuit que la courbe cherchée, déjà symétrique par rapport à l'axe polaire XOX', l'est encore par rapport à la perpendiculaire YOY', menée au pôle sur cet axe. De 0°, ou bien de 180° à 90°, le cosinus décroît en valeur absolue depuis 1 jusqu'à 0. Donc, entre ces limites, la valeur de ρ toujours positive, ira en croissant depuis 1 jusqu'à l'infini. La courbe est donc composée, comme l'indique la figure 27, de deux branches séparées et infinies UAV, U'A'V', limitées en A et A' au cercle décrit du rayon OA = 1.

Sa construction est facile. En effet, l'équation (1) peut se mettre sous la forme

$$\rho = \frac{1}{\cos \omega} \cdot \frac{1}{\cos \omega}$$

et comme la perpendiculaire en A sur OX aurait pour équation

$$\rho = \frac{1}{\cos \omega},$$

il s'ensuit que si, pour un rayon vecteur quelconque OIN, on rabat du centre O le point N en N' et qu'on élève en celui-ci une perpendiculaire sur l'axe, sa rencontre avec OR déterminera le point correspondant M de la courbe. D'ailleurs, à cause de l'égalité des triangles OIN', OAN, IN' est perpendiculaire sur OI. D'où il suit que le point M est encore à l'intersection du rayon vecteur OI prolongé et de la perpendiculaire élevée sur l'axe polaire au point où cet axe lui-même est coupé par la perpendiculaire menée à l'extrémité du rayon mobile. Ce qui donne un second moyen de construire la courbe considérée.

De l'équation (1) on déduit celle-ci :

$$\rho^4 \cos^4 \omega = \rho^2 \sin^2 \omega + \rho^2 \cos^2 \omega \,;$$

d'où, passant aux coordonnées rectangulaires,

$$x^4 = x^2 + y^2 \,; \tag{2}$$

par suite

$$x^2 = \sqrt{x^2 + y^2},$$

Cette dernière équation equivaut à la proportion suivante

$$1 : x :: x : \sqrt{x^2 + y^2},$$

ou

$$\mathrm{OI} : \mathrm{ON'} :: \mathrm{ON'} : \mathrm{OM}$$

Réciproquement, celle-ci, qui est l'expression géométrique la plus simple du second mode de génération indiqué, conduirait immédiatement aux équations (2) et (1), si ces équations n'étaient point connues.

Proposons-nous maintenant de mener la tangente en un point quelconque de la courbe.

Nous aurons les équations:

$$\rho = \frac{1}{\cos^2 \omega} \quad \text{et} \quad \rho + k = \frac{1}{\cos^2 (\omega + h)},$$

d'où

$$k = \frac{\cos^2 \omega - \cos^2 (\omega + h)}{\cos^2 \omega \,.\, \cos^2 (\omega + h)},$$

expression qu'on peut changer en celle-ci :

$$k = \frac{h \cos\left(\omega + \frac{h}{2}\right) \sin\left(\omega + \frac{h}{2}\right) \cos\frac{h}{2} \sin\frac{h}{2}}{\cos^2 \omega \,.\, \cos^2 (\omega + h)} ;$$

par suite

$$\lim^e \frac{h}{k} = \frac{\cos^3 \omega}{2 \sin \omega}.$$

Donc $$\operatorname{tang} = \frac{1}{2} \cot \omega \quad \text{et} \quad st = \frac{1}{\sin \omega}.$$

Discutons ces valeurs. Quand ω est égal à 0°, ou à 180°, tg. et st deviennent infinies. D'où il suit que les perpendiculaires en H et H' sur l'axe sont tangentes à la courbe. A mesure que ω augmente à partir de 0°, cot ω et par suite tg., ou, ce qui revient au même, l'angle OMT diminue. Pour $\omega = 90°$, cet angle est nul.

D'ailleurs dans cette hypothèse O est infini : st l'est aussi ; donc pour ce point et pour le point correspondant sur la branche opposée, les tangentes, devenues des asymptotes de la courbe, sont parallèles à YOY, mais situées à une distance infinie de cette droite, en d'autres termes ces asymptotes n'existent plus (*fig.* 28). Voyons comment pour un point donné M de la courbe, on déterminera la position correspondante de la tangente au moyen de la valeur de st. Faites l'arc IG = IA et menez le diamètre GG' prolongé jusqu'à la rencontre en S de la tangente au cercle en B'. Rabattez S en T sur la perpendiculaire en O au rayon vecteur OIM et la droite TMT' sera la tangente demandée.

Si nous suivons le point de contact M et la position de la tangente depuis le sommet H de la courbe jusqu'à l'infini, nous reconnaîtrons que la courbe, de convexe qu'elle était d'abord par rapport à YOY', lui devient nécessairement concave puisque les asymptotes sont parallèles à cette droite.

Il y a donc nécessairement sur chacune des deux brances deux points d'inflexion dont nous allons déterminer la position.

Soit menée par O une parallèle LL′ à une tangente quelconque TMT′. Appelons θ l'angle LOB formé par cette droite et le diamètre BB′. Cet angle, nul d'abord quand le point de contact est en A, croît jusqu'à ce que le point M parvienne au point d'inflexion et décroît ensuite à partir de ce terme pour redevenir nul quand le point de contact passe à l'infini.

On voit par là qu'en déterminant la valeur maximum de cet angle θ, on aura la position correspondante du point d'inflexion cherché.

Or, à cause de la relation $tg = \frac{1}{2}\cot\omega$ et de l'égalité des angles LOM, OMT, l'on a :

$$\frac{1}{2}\cot\omega = \operatorname{tang}(90^\circ - (\omega + \theta),$$

d'où

$$2\operatorname{tang}\omega = \frac{\operatorname{tang}\omega + \operatorname{tang}\theta}{1 - \operatorname{tang}\omega\operatorname{tang}\theta},$$

par suite

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{\operatorname{tang}\omega}{1 + 2\operatorname{tang}^2\omega}.$$

Pour abréger, changeons cette expression en celle-ci :

$$u = \frac{z}{1 + 2z^2}.$$

Résolue par rapport à z, cette équation donne :

$$z = \frac{1 + \sqrt{1 - 8u^2}}{4u}.$$

On en tire $u = \frac{1}{4}\sqrt{2}$ pour la valeur maximum de u, et $z = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ pour la valeur correspondante de z.

Pour construire ces résultats, formons (*fig.* 27) le carré DE D'E' et menons ses diagonales. Rabattons du centre A',K en G et *g* et les lignes indéfinies GOM, *gOm* seront les directions des rayons vecteurs correspondant aux points d'inflexion cherchés. Faisons $B'H = B'H' = \frac{1}{2} B'K$. Les parallèles aux droites OH, OH' menées par les points M et *m*, M' et *m'* de la courbe, seront les tangentes correspondantes aux quatre points que l'on vient de nommer.

Nota. Cette question a déjà été traitée par les coordonnés rectangulaires, t. II p. 232. Descartes a imaginé un instrument formé de deux règles à l'aide duquel il construit d'un mouvement continu et simultanément les courbes données par les équations polaires

$$\rho = \frac{1}{\cos^2 \omega}; \ \rho = \frac{1}{\cos^4 \omega}, \ \rho = \frac{1}{\cos^6 \omega} \text{ etc.}$$

(Œuvres, t. V, p. 336, édition Cousin.)