Nouvelles annales de mathématiques

Terquem

Note sur les équations dont les racines forment une progression géométrique

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 5 (1846), p. 210-213

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1846_1_5__210_1>

NOTE

sur les équations dont les racines forment une progression géométrique.

1. Soit :

$$P = (x - a)(x - ar)(x - ar^2) \ldots (x - ar^{m-1}) =$$
$$= x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots A_m ;$$

posons $x = ry$, il vient :

$$P = r^{m-1}(ry - a)(y - a)(y - ar^2) \ldots (y - ar^{m-2}) =$$
$$= r^m y^m + A_1 r^{m-1} y^{m-1} + A_2 r^{m-2} y^{m-2} + \ldots A_m$$
$$= \frac{r^{m-1}(ry - a)}{y - ar^{m-1}} (y^m + A_1 y^{m-1} + A_2 y^{m-2} + \ldots A_m) ;$$

donc

$$(y - ar^{m-1})(r^m y^m + A_1 r^{m-1} y^{m-1} + A_2 r^{m-2} y^{m-2} + \ldots A_m) =$$
$$= r^{m-1}(ry - a)(y^m + A_1 y^{m-1} + A_2 y^{m-2} + \ldots A_m) ;$$

comparant les coefficients des termes semblables, on a :

$$A_1(1-r) = a(r^m - 1)$$
$$A_2(1-r^2) = A_1 ar(r^{m-1} - 1)$$
$$A_3(1-r^3) = A_2 ar^2(r^{m-2} - 1)$$
$$\vdots$$
$$A_p(1-r^p) = A_{p-1} ar^{p-1}(r^{m-p+1} - 1)\ ;$$

multipliant toutes ces équations, il vient :

$$(-1)^p A_p = a^p . r^{\frac{p(p-1)}{1.2}} \frac{(r^{m-p+1}-1)(r^{m-p+2}-1)(r^{m-p+3}-1)\ldots(r^m-1)}{r-1.\ r^2-1.\ r^3-1\ldots r^p-1}$$

p comprend toutes les valeurs depuis 1 jusqu'à m inclusivement.

Corollaire I. Connaissant deux termes de l'équation, toutes les racines sont déterminées ; puisqu'on a alors deux équations entre les inconnues a et r ; ce qui est aussi évident à priori.

Corollaire II. Lorsque $r = 1$, on a $\frac{r^k-1}{r^s-1} = \frac{k}{s}$; et, dans la même hypothèse,

$$(-1)^p A_p = a^p . \frac{m-p+1}{1} . \frac{m-p+2}{2} \ldots . \frac{m}{p} ;$$

mais alors $P = (x-a)^m$; on a ainsi une nouvelle démonstration du binôme.

Corollaire III. A_p est essentiellement une fonction entière de r, on a donc ce théorème :

Le produit $(r^k - 1)(r^{k+1} - 1)(r^{k+2} - 1) \ldots \ldots r^{k+p-1}$, est toujours divisible par

$$(r-1)(r^2-1)(r^3-1) \ldots \ldots (r^p-1)\ ;\ k > p\ ;$$

k et p entiers positifs. Ce théorème peut se démontrer directement, en effet, comparant les deux suites des exposants

$$k, k+1, \ldots k+p-1 \quad \text{et} \quad 1, 2, 3 \ldots p\ ;$$

l'expression $\frac{k(k+1)\ldots(k+p-1)}{1.2 \qquad p}$ est un nombre entier.

Corollaire IV. Si $r = -1$; il faut distinguer deux cas : 1° m a une valeur paire, on a toujours :

$$\frac{r^k-1}{r^s-1} = \frac{k}{s} \text{ pour } r=-1,$$

si k et s sont des nombres pairs ; et si k et s sont impairs, on a $\frac{r^k-1}{r^s-1} = 1$; si k est pair et s impair, cette expression devient nulle, toujours dans la supposition de $r = -1$.

Si donc p est pair, on a :

$$A_p = (-1)^{\frac{p}{2}} \cdot a^p \cdot \frac{m-p+2}{2} \cdot \frac{m-p+4 \dots}{4 \dots \dots} \frac{m}{p}.$$

Si p est impair, $A_p = 0$.

2° m a une valeur impaire ; si p est pair, alors on a :

$$A_{(p)} = (-1)^{\frac{p}{2}} \frac{m-p+1}{2} \cdot \frac{m-p+3 \dots}{4} \dots \frac{m-1}{p}.$$

Si p est impair, il vient :

$$A_p = (-1)^{\frac{3p-1}{2}} a^p \cdot \frac{m-p+2}{2} \cdot \frac{m-p+4}{4} \dots \frac{m-1}{p-1}.$$

Corollaire V. A_p ne peut être nul à moins que r ne soit une racine de l'unité ; soit α une racine de l'équation

$$y^t - 1 = 0,$$

et non d'un degré moindre. On a :

$$\frac{\alpha^{kt}-1}{\alpha^{k't}-1} = \frac{k}{k'},$$

et $\frac{\alpha^{kt+s}-1}{\alpha^{k't+s}}= 1$; soit donc $m = kt + s$; $p = k't + s'$; si k' est nul, alors A_p peut devenir nnl.

Soit dans le numérateur, nt le premier exposant de r, qui est un multiple de t, alors on aura

$$(-1)^p A_p = a^p . \alpha^{\frac{p.p-1}{2}} \frac{n}{1} . \frac{n+1}{2} \ldots\ldots \frac{n+k-1}{k}; \text{ car } \frac{\alpha^{nt}-1}{\alpha^t-1} = \frac{n}{1},$$

et ainsi des autres.

Corollaire VI. Si dans le corollaire précédent on a $t = m$, alors toutes les valeurs de A_p sont nulles, excepté lorsque p devient m; alors $(-1)^m A_p = a^m . \alpha^{\frac{m-1}{2}}$, et

$$\alpha^{\frac{m-1}{2}} = \sqrt{\alpha^{m-1}} = \sqrt{\frac{1}{\alpha}} = \alpha^{\frac{1}{2}}.$$

Corollaire VII. Si r est moindre que l'unité et $m = \infty$, alors

$$(-1)^p A_p = \alpha^p . r^{\frac{p(p-1)}{1.2}} \frac{1}{1-r} . \frac{1}{1-r^2} . \frac{1}{1-r^3} \ldots\ldots \frac{1}{1-r^p};$$

car $r^{m-k} = 0$, k étant un nombre déterminé.

Corollaire VIII. Si a est négatif, r restant positif, il suffit de supprimer le facteur (-1) dans le premier membre de l'équation (1).

Corollaire IX. La même équation (1) sert à résoudre cette question : Connaissant les m termes consécutifs d'une progression géométrique, trouver la somme d'une fonction symétrique quelconque de ces termes, car l'équation (1) permet de calculer les coefficients de l'équation qui a ces m termes pour racines.

(*Voir les observations instructives de M. Cirodde*, tome I, p. 106.)

Tm.