

TERQUEM

Théorème sur un maximum

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 5
(1846), p. 207-208

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1846_1_5__207_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1846, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

THÉORÈME SUR UN MAXIMUM.

Théorème. Soit $y = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2 = 1$$

relations entre n variables x_1, x_2, \dots, x_n et n constantes a_1, a_2, \dots, a_n ,

alors $\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$ est la valeur maximum de y .

Démonstration.

$$y^2 = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 - (a_1x_2 - a_2x_1)^2 - (a_1x_3 - a_3x_1)^2 \dots - (a_1x_n - a_nx_1)^2 \\ - (a_2x_3 - a_3x_2)^2 - (a_2x_4 - a_4x_2)^2 \dots - (a_2x_n - a_nx_2)^2$$

donc y est un maximum lorsque

$$a_1 x_2 - a_2 x_1 = 0 \dots a_1 x_3 - a_3 x_1 = 0 \dots a_1 x_n - a_n x_1 = 0.$$

On tire de ces n équations $\frac{x_1}{a_1} = \frac{x_2}{a_2} = \frac{x_3}{a_3} \dots = \frac{x_n}{a_n}$; d'après ces valeurs, les autres termes s'annulent d'eux mêmes;

$$y = x_1 \left\{ a_1 + \frac{a_2^2}{a_1} + \frac{a_3^2}{a_1} \dots \right\} = \frac{x_1}{a_1} (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) = (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)^{\frac{1}{2}};$$

$$\text{d'où } x_1 = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}}; x_2 = \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}} \dots$$

(Moigno. Calcul intégral, t. II, p. 516).

Observation. Ce théorème est utile dans plusieurs questions de géométrie élémentaire. Exemple : x_1, x_2, x_3 étant les demi-diamètres conjugués d'un ellipsoïde, dans quel cas $a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3$ devient-il un maximum ? de même pour l'ellipse.

Tm.