Nouvelles annales de mathématiques

Terquem

Théorème sur un maximum

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 5 (1846), p. 207-208

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1846_1_5__207_1>

THÉORÈME SUR UN MAXIMUM.

—

Théorème. Soit $y = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots . a_n x_n$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots . x_n^2 = 1$$

relations entre n variables $x_1, x_2 \ldots x_n$ et n constantes $a_1, a_2 \ldots a_n$, alors $\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots a_n^2}$ est la valeur maximum de y.

Démonstration.

$$y^2 = a_1^2 + a_2^2 + \ldots a_n^2 - (a_1 x_2 - a_2 x_1)^2 - (a_1 x_3 - a_3 x_1)^2 \ldots - (a_1 x_4 - a_4 x_1) \\ - (a_2 x_3 - a_3 x_2)^2 - (a_2 x_4 - a_4 x_2)^2 \ldots - (a_2 x_n - a_n x_2)^2$$

donc y est un maximum lorsque

$$a_1 x_2 - a_2 x_1 = 0 .. \ a_1 x_3 - a_3 x_1 = 0 ... a_1 x_n - a_n x_1 = 0.$$

On tire de ces n équations $\frac{x_1}{a_1} = \frac{x_2}{a_2} = \frac{x_3}{a_3} ... = \frac{x_n}{a_n}$; d'après ces valeurs, les autres termes s'annulent d'eux mêmes;

$$y = x_1 \left\{ a_1 + \frac{a_2^2}{a_1} + \frac{a_3^2}{a_1} ... \right] = \frac{x_1}{a_1}(a_1^2 + a_2^2 + ... a_n^2) = (a_1^2 + a_2^2 ... a_n^2)^{\frac{1}{2}};$$

d'où $x_1 = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + ... a_n^2}}$; $x_2 = \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + ... a_n^2}}$ ..

(Moigno. Calcul intégral, t. II, p. 516).

Observation. Ce théorème est utile dans plusieurs questions de géométrie élémentaire. Exemple : x_1, x_2, x_3 étant les demi-diamètres conjugués d'un ellipsoïde, dans quel cas $a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3$ devient-il un maximum ? de même pour l'ellipse. Tm.