Solution de la question 96

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 5 (1846), p. 199-201

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1846_1_5__199_0>

SOLUTION DE LA QUESTION 96 (t. IV, p. 260).

PAR UN ÉLÈVE
du collége royal militaire de La Flèche.

—

Si dans l'angle de deux droites prises pour axes de coordonnées, on inscrit une ligne polygonale régulière, ayant l'origine pour centre, on aura entre les abscisses à l'origine $x', x'', x'''. .. x^{(n)}$ des côtés du polygone et l'ordonnée Y du premier sommet à partir de l'axe des x la relation :

$$\frac{1}{Y}=\frac{1}{x'}+\frac{1}{x''}+\frac{1}{x'''}+\ldots+\frac{1}{x^{(n)}}.$$

Soit n le nombre des côtés de la ligne polygonale comprise dans l'angle des axes. Je désigne par θ (*fig.* 26), la $2n^{ème}$ partie de l'angle des axes; si de l'origine j'abaisse sur les milieux des côtés des perpendiculaires et que je prolonge ces côtés jusqu'à leur rencontre avec l'axe des x, j'obtiendrai des triangles rectangles dont les hypoténuses seront

$$x',\ x'',\ x''',\ldots.x^{(n)},$$

et qui auront tous un côté de l'angle droit commun, savoir la distance de l'origine aux côtés du polygone ; je la désigne par r; ces triangles me donneront :

$$\frac{1}{x'}=\frac{\cos\theta}{r}$$

$$\frac{1}{x''}=\frac{\cos 3\theta}{r}$$

$$\frac{1}{x'''}=\frac{\cos 5\theta}{r};$$

posant pour abréger :

$$S=\frac{1}{x'}+\frac{1}{x''}+\frac{1}{x'''}+\ldots..+\frac{1}{x^{(n)}};\quad \frac{1}{x^{(n)}}=\frac{\cos(2n-1)\theta}{r};$$

et ajoutant ces égalités membre à membre, j'aurai :

(A) $rS=\cos\theta+\cos 3\theta+\cos 5\theta+\ldots.+\cos(2n-1)\theta.$

D'un autre côté évaluant r en fonction de Y, on a :

$$r=\frac{Y\sin 2n\theta}{2\sin\theta};$$

Remplaçant r par sa valeur dans l'équation (A) elle devient :

$$SY=\frac{2\sin\theta}{\sin 2n\theta}\left[\cos\theta+\cos 3\theta+\cos 5\theta+\ldots+\cos(2n-1)\theta\right].$$

Je vais prouver que le second membre de cette égalité n'est autre chose que l'unité.

Pour cela je me sers des formules générales :

$$\cos x=\frac{e^{x\sqrt{-1}}+e^{-x\sqrt{-1}}}{2}$$

$$\sin x=\frac{e^{x\sqrt{-1}}-e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}},$$

e, étant le nombre dont le logarithme hyperbolique est 1.

On a donc :

$$\frac{2\sin\theta}{\sin 2n\theta}=\frac{2\left(e^{\theta\sqrt{-1}}-e^{-\theta}\right)\sqrt{-1}}{e^{2n\theta\sqrt{-1}}-e^{-2n\theta\sqrt{-1}}}.$$

$\cos\theta+\cos 3\theta+\ldots.+\cos(2n-1)\theta=$

$$=\frac{1}{2}\left\{\begin{array}{l}e^{\theta\sqrt{-1}}+e^{3\theta\sqrt{-1}}+\ldots\ldots+e^{(2n-1)\theta\sqrt{-1}}\\+e^{-\theta\sqrt{-1}}+e^{-3\theta\sqrt{-1}}+\ldots.+e^{-(2n-1)\theta\sqrt{-1}}\end{array}\right.;$$

donc

$$\frac{2\sin\theta\,[\cos\theta+\cos 3\theta+\ldots+\cos(2n-1)\theta]}{\sin 2n\theta}=$$

$$=\frac{\left(e^{\theta\sqrt{-1}}-e^{-\theta\sqrt{-1}}\right)\left\{\begin{array}{l}e^{\theta\sqrt{-1}}+e^{3\theta\sqrt{-1}}+\ldots+e^{(2n-1)\theta\sqrt{-1}}\\+e^{-\theta\sqrt{-1}}+e^{-3\theta\sqrt{-1}}+\ldots+e^{-(2n-1)\theta\sqrt{-1}}\end{array}\right.}{e^{2n\theta\sqrt{-1}}-e^{-2n\theta\sqrt{-1}}}$$

Je multiplie $\left\{\begin{array}{l}e^{\theta\sqrt{-1}}+e^{3\theta\sqrt{-1}}+\ldots+e^{(2n-1)\theta\sqrt{-1}}\\+e^{-\theta\sqrt{-1}}+e^{-3\theta\sqrt{-1}}+\ldots+e^{-(2n-1)\theta\sqrt{-1}}\end{array}\right.$

par $e^{\theta\sqrt{-1}}-e^{-\theta\sqrt{-1}}$. J'ai :

$$\left\{\begin{array}{llll}+e^{2\theta\sqrt{-1}} & +e^{4\theta\sqrt{-1}} & +\ldots+e^{2(n-1)\theta\sqrt{-1}} & +e^{2n\theta\sqrt{-1}}\\+1 & +e^{-2\theta\sqrt{-1}}+ & \ldots\ldots\ldots & +e^{-2(n-1)\theta\sqrt{-1}}\\-1 & -e^{-2\theta\sqrt{-1}}- & \ldots\ldots\ldots & -e^{2(n-1)\theta\sqrt{-1}}\\-e^{-2\theta\sqrt{-1}} & -e^{-4\theta\sqrt{-1}}- & \ldots\ldots\ldots & -e^{-2n\theta\sqrt{-1}}\end{array}\right.$$

il est facile de voir que tous les termes se détruisent à l'exception de $e^{2n\theta\sqrt{-1}}-e^{2n\theta\sqrt{-1}}$,

donc :

$$\frac{2\sin\theta[\cos\theta+\cos 3\theta+\ldots+\cos(2n-1)\theta]}{\sin 2n\theta}=\frac{e^{2n\theta\sqrt{-1}}\cdot e^{-2n\theta\sqrt{-1}}}{e^{2n\theta\sqrt{-1}}-e^{-2n\theta\sqrt{-1}}}=1$$

donc enfin : $SY=1$.

ou $$\frac{1}{x_{,}}+\frac{1}{x_{,,}}+\frac{1}{x_{,,,}}+\ldots+\frac{1}{x_{(n)}}=\frac{1}{Y}.$$

Note. M. Lecointe est parvenu directement à démontrer que le second membre de SY est égal à l'unité (t. III, p. 524, éq. 3).

Tm.