TERQUEM

Sur la résolution d'une certaine classe d'équations à plusieurs inconnues du premier degré

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 5 (1846), p. 162-165

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1846_1_5__162_1>

SUR LA RÉSOLUTION

d'une certaine classe d'équations à plusieurs inconnues du premier degré.

(1re suite, voir page 67.)

II. Soit le système de m équations

$$
\begin{aligned}
&x_1 + 0.x_2 + x_3 + \ldots\ldots x_m = b^{(0)},\\
&a_1x_1 + x_2 + a_3x_3 + \ldots\ldots a_mx_m = b^{(1)},\\
&a_1^2x_1 + 2a_1x_2 + a_3^2x_3 + \ldots a_m^2x_m = b^{(2)},\\
&\vdots\\
&a_1^nx_1 + na_1^{n-1}x_2 + a_3^nx_3 + \ldots a_m^nx_m = b^{(n)},\\
&\vdots\\
&a_1^{m-1}x_1 + m-1.a_1^{m-2}x_2 \ldots a_m^{m-1}x_m = b^{(m-1)}.
\end{aligned}
$$

$x_1, x_2 \ldots. x_m$ sont m inconnues ; $a_1, a_3 \ldots. a_m$ sont $m-1$ quantités *négales* ; les seconds membres sont des quantités données quelconques ; les coefficients de x_2 sont les dérivées respectives des coefficients de x_1, par rapport à a_1. Cela posé, soient k, k', k'' .... $k^{(m-2)}$, $m-1$ constantes indéterminées, et faisons comme ci-dessus ·

$$k + k'a + k''a^2 \dots k^{(m-2)}a^{m-2} + a^{m-1} = \varphi(a) ;$$

on aura :

$$x_1\varphi(a_1)+x_2\varphi'(a_1)+x_3\varphi(a_3)\dots+x_m\varphi(a_m) = kb^{(0)}+k'b^{(1)}+k''b^{(2)}\dots+b^{(m-1)}.$$

Faisons $f(a)=(a-a_1)^2(a-a_3)(a-a_4)\dots(a-a_m) = a^m+P^{m-1}a\dots$ déterminons k, k',... $k^{(m-2)}$, de telle sorte que fa et φa aient en commun les $m-1$ racines a_1, a_3, a_4 .... a_m; on a donc :

$$\varphi(a) = \frac{f(a)}{a-a_1} = a^{m-1}+(P+a_1)a^{m-2}+\dots ;$$

ainsi k, k'.... $k^{(m-2)}$ se trouvent déterminés, et l'on trouve :

$$x_2 = \frac{kb^{(0)} + \dots b^{(m-1)}}{\varphi'(a_1)} ;$$

or $(a-a_1)\varphi a = f(a)$; prenant les dérivées, $\varphi a+(a-a')\varphi' a = f'(a)$;

d'où l'on tire $\qquad \varphi'(a) = \dfrac{f'(a) - \varphi a}{a-a_1}$;

faisant $a = a_1$, il vient $\varphi'(a_1) = \dfrac{0}{0}$, et d'après la méthode connue,

$$\varphi'(a_1) = f''(a_1) \text{ ; donc } x_2 = \frac{kb^{(0)} \dots b^{(m-1)}}{f''(a_1)}$$

Connaissant x_2, on fait passer les termes où ils se trouvent dans le second membre, et on est ramené à un système d'équations déjà traitées.

III. Si les coefficients de x_2 étaient les dérivées premières, et les coefficients de x_3 les dérivées secondes des coefficients de x_1, on ferait $f(a) = (a-a_1)^3(a-a_4)(a-a_5)\dots a-a_m$; et raisonnant de la même manière, on trouvera la valeur de x_3; et transportant ces termes dans les seconds membres, on a ramené au système d'équations précédent.

IV. On voit donc comment il faut procéder lorsque les coefficients d'une inconnue sont les dérivées de l'inconnue précédente.

Observation. Ce genre d'équations se présente dans l'intégration de l'équation linéaire, à coefficients constants, lorsque l'équation auxiliaire a des racines égales.

V. Soit le système suivant de n équations du premier degré entre les inconnues $x_1, x_2 \ldots. x_n$:

$$\begin{aligned}
&\frac{x_1}{a_1-\alpha_1}+\frac{x_2}{a_1-\alpha_2}+\ldots.\frac{x_n}{a_1-\alpha_n}=1,\\
&\frac{x_1}{a_2-\alpha_1}+\frac{x_2}{a_2-\alpha_2}+\ldots.\frac{x_n}{a_2-\alpha_n}=1, \qquad \text{(A)}\\
&\vdots\\
&\frac{x_1}{a_n-\alpha_1}+\frac{x_2}{a_n-\alpha_2}+\ldots.\frac{x_n}{a_n-\alpha_1}.
\end{aligned}$$

$a_1 \ldots. a_n$ sont n quantités connues, mais *inégales* ; de même les n quantités $\alpha_1 \ldots \alpha_n$.

Faisons $\mathrm{F}\,x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n)$,

$f(x) = (x-a_1)(x-a_2)\ldots.(x-a_n)$;

$\mathrm{F}(x)-f(x)$ est de degré $n-1$, et par conséquent $\dfrac{\mathrm{F}x-fx}{fx}$ peut se décomposer, par la méthode des dérivées, en fonctions rationnelles (*V.* t. IV, p. 296) ; on a donc l'identité :

$$\frac{\mathrm{F}(x)-fx}{\mathrm{F}(x)}=\frac{f(\alpha_1)}{\mathrm{F}'(\alpha_1)}\cdot\frac{1}{x_1-\alpha_1}-\frac{f(\alpha_2)}{\mathrm{F}'(\alpha_2)}\cdot\frac{1}{x_2-\alpha_2}+\ldots.$$

Faisant successivement $x=a_1$; $x=a_2 \ldots. x=a_n$, on obtient les n identités :

$$\begin{aligned}
1&=\frac{-f(\alpha_1)}{\mathrm{F}'(\alpha_1)}\,\frac{1}{a_1-\alpha_1}-\frac{f(\alpha_2)}{\mathrm{F}'(\alpha_2)}\,\frac{1}{a_2-\alpha_2}+\ldots\\
1&=-\frac{f(\alpha_1)}{\mathrm{F}'(\alpha_1)}\,\frac{1}{a_2-\alpha_2}-\frac{f(\alpha_2)}{\mathrm{F}'(\alpha_2)}\,\frac{1}{a_2-\alpha_2}+\ldots\\
&\vdots\\
1&=-\frac{f(\alpha_1)}{\mathrm{F}'(\alpha_1)}\,\frac{1}{a_n-\alpha_1}+\ldots
\end{aligned}$$

Donc les valeurs $x_1 = -\frac{f(\alpha_1)}{F'(\alpha_1)}$; $x_2 = -\frac{f(\alpha_2)}{F'(\alpha_2)}$, etc. satisfont au système des équations (A).

Si, parmi les quantités $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$, il y en a d'égales, on fait la décomposition en fractions rationnelles, comme pour le cas des facteurs multiples, et le reste comme ci-dessus.

Observation. Ce genre d'équations se présente dans la théorie des surfaces homofocales, expression hybride, qu'on pourrait remplacer par *biconfocales*. L'élégant procédé d'élimination est dû à M. le professeur Jacques Binet. (*Suite*).