NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

HENRI D'ANDRÉ

Démonstration du théorème 83 ; lieu relatif à une parabole

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 5 (1846), p. 122-127

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1846_1_5__122_1>

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 83 (t. III, p. 83);

lieu relatif à une parabole.

PAR M. HENRI D'ANDRÉ,
élève de l'institution Laville.

Théorème. Une parabole variable ayant un foyer fixe et touchant constamment une conique fixe de même foyer, le sommet de la parabole variable décrit une conchoïde ayant pour directrice une circonférence sur laquelle se trouve le pôle (Chasles).

Démonstration. L'équation de la conchoïde s'obtient immédiatement en coordonnées polaires, en prenant pour pôle le point fixe, et pour axe le diamètre qui passe par ce point.

Si r est le rayon du cercle et d sa longueur constante, on a :

$$\rho = 2r\cos\varphi \pm d.$$

Je suppose que la conique fixe soit rapportée à un système d'axes rectangulaires ayant pour origine le foyer et dirigés l'un suivant le diamètre de la courbe, l'autre suivant l'ordonnée du foyer; alors comme la directrice est parallèle à l'axe des y, l'équation focale de cette conique sera :

$$(1)\qquad y^2 + x^2 = (ax + b)^2,$$

en désignant par $x = -\frac{b}{a}$ l'équation de la directrice.

L'équation de la parabole variable sera suivant le type général :

$$(2)\qquad y^2 + x^2 = (my + nx + p)^2,$$

avec la condition $m^2 + n^2 = 1$.

Je vais d'abord exprimer que ces deux courbes sont tangentes : pour cela il suffit de chercher l'équation qui aurait pour racines, les abscisses de leurs points d'intersection, et d'exprimer que cette équation a deux racines égales.

Conformément à la règle prescrite pour la résolution de deux équations du second degré à deux inconnues, je fais d'abord disparaître le carré de l'une des variables, et je résous par rapport à l'autre ; il est très-facile, dans ce cas particulier, d'atteindre ce but, en égalant les seconds membres des équations des deux courbes, et extrayant la racine carrée des deux membres. Il vient de cette manière :

$my+nx+p=\pm(ax+b)$; on en tire $y=\dfrac{(\pm a-n)x\pm b-p}{m}$.

Je porte dans l'équation (1) cette expression de y, ce qui donne, en développant et réduisant :

$(an\mp1)^2x^2-2[abm^2-(\pm a-n)(\pm b-p)]\,x+(\pm b-p)^2-b^2m^2=0.$

La condition d'égalité des racines de cette équation est :

$[abm^2-(a-n)(\pm b-p)]^2-(an\mp1)^2[(\pm b-p)^2-b^2m^2]=0.$

Effectuant les calculs et ayant égard à la relation $m^2+n^2=1$, on trouve finalement :

$$p(a^2-1)\pm 2b-2abn=0. \qquad (2)$$

Actuellement, le sommet se trouvant sur la courbe, les coordonnées doivent satisfaire à l'équation :

$$(my+nx+p)^2=y^2+x^2,$$

ou bien $$(y\sqrt{1-n^2}+nx+p)^2=y^2+x^2. \qquad (3)$$

Si on l'envisage comme résultant de l'intersection de la courbe avec la perpendiculaire abaissée du foyer sur la directrice, on aura encore :

$$y=\frac{m}{n}x\,; \qquad y=\frac{\sqrt{1-n^2}}{n}x. \qquad (4)$$

Or il est facile de voir que si je donne à p, par exemple, une valeur particulière, je tirerai de l'équation (2) une valeur correspondante pour n, et en les substituant dans les équations (3) et (4), j'obtiendrai un couple de valeurs de x et de y qui seront les coordonnées d'un point du lieu ; donc si j'élimine p et n entre les trois équations (2), (3) et (4), l'équation résultante en x et y sera vérifiée par tous les couples et par les seuls couples de valeurs de x et de y, qui, conjointement avec une valeur quelconque de p et de n, vérifient les trois équations ci-dessus ; mais ces couples de valeurs sont les coordonnées d'autant de points du lieu : donc l'équation en x et y sera vérifiée par les coordonnées de tous les points du lieu, et uniquement par ces seules coordonnées. Ce sera donc bien l'équation du lieu.

Pour effectuer l'élimination le plus simplement possible, je tire de l'équation (4) :

$$n = \frac{x}{\sqrt{y^2+x^2}}; \quad \text{et par suite,} \quad m = \frac{y}{\sqrt{y^2+x^2}}.$$

Si l'on substitue ces valeurs dans l'équation (3), il vient :

$$(\sqrt{y^2+x^2}+p)^2 = y^2+x^2;$$

d'où

$$p = \pm\sqrt{y^2+x^2} - \sqrt{y^2+x^2}.$$

Or p ne peut pas être nul ; car la directrice ne passe pas par le foyer ; la seule valeur admissible est donc :

$$p = -2\sqrt{y^2+x^2}.$$

Il ne reste plus qu'à remplacer dans l'équation (2) n, p par leurs valeurs, et on trouve :

$$(a^2-1)(y^2+x^2) = \mp b\sqrt{y^2+x^2} + abx.$$

En passant aux coordonnées polaires, il vient :

$$(a^2-1)\rho^2 = \mp b\rho + ab\rho\cos\varphi.$$

J'ôte le facteur ρ, ce qui fait disparaître l'équation de l'origine, et je parviens enfin à l'équation

$$\rho = \frac{a}{a^2-1}\, b\cos\varphi \mp \frac{1}{a^2-1}\, b.$$

On voit donc que le sommet de la parabole variable décrit un limaçon de Pascal ayant pour directrice une circonférence dont le diamètre serait représenté par $\frac{a}{a^2-1}\, b$, et pour paramètre constant, $\frac{b}{a^2-1}$.

On pourrait exprimer ces quantités en fonctions des axes de la conique proposée ; mais on ne parvient pas à des valeurs remarquables.

Note. On peut parvenir à ce résultat d'une manière plus simple. Soit F le foyer d'une ellipse, pris pour origine ; F' le second foyer ; FF' l'axe des x et les coordonnées rectangulaires. L'équation de l'ellipse est : $a^2y^2+b^2x^2-2b^2cx=b^4$, $a=\frac{1}{2}$ axe focal ; $b=$ petit axe ; $c^2=a^2-b^2$.

Soit M (y', x') un point de l'ellipse ; menons par F une parallèle à MF' et rencontrant en P la tangente en M ; soit MQ une perpendiculaire abaissée de M sur cette parallèle, et S le milieu de PQ ; la parabole, qui a S pour sommet et F pour foyer, touche l'ellipse en M ; faisons FS$=\rho$; SFF'$=\varphi$; il s'agit de trouver une relation entre ρ et φ ; faisons :

$$\text{FM}=z'=\frac{b^2+cx'}{a};\quad \text{F'M}=z''=\frac{a^2+c^2-cx'}{a};$$

les triangles semblables donnent pour les coordonnées de P :

$$x=\frac{z'(x'-2c)}{z''};\quad y=\frac{y'z'}{z''}. \tag{1}$$

La parallèle à MF' passant par l'origine a pour équation :

$$y=\frac{y'}{x'-2c}x.$$

La perpendiculaire abaissée sur cette parallèle a pour équation :

$$y-y'=\frac{2c-x'}{y'}x.$$

Les coordonnées de Q, pied de la perpendiculaire, sont :

$$x=\frac{(x'-2c)(z'^2-2cx')}{z''^2},$$
$$y=\frac{y'(z'^2-2cx')}{z''^2}. \tag{2}$$

Donc les coordonnées du point S, milieu de PQ, sont :

$$x = \frac{b^2(x' - 2c)}{z''^2}, \qquad y = \frac{b^2 y'}{z''^2}, \tag{3}$$

d'où

$$\rho^2 = \frac{b^4}{z''^2};\quad \rho = \frac{b^2}{z''};\quad \operatorname{tang}\varphi = \frac{y'}{x' - 2c};\quad \cos\varphi = \frac{x' - 2c}{z''} = \frac{b^2 - az''}{cz''}.$$

Éliminant z'', il vient $\rho = a - c\cos\varphi$, équation du limaçon de Pascal. Ainsi C étant le centre de l'ellipse, on décrit une circonference sur CF comme diamètre ; prenant F pour pôle, et le demi-axe focal pour ligne constante, on construit avec ces données le *limaçon* qui convient au lieu cherché.

L'équation, étant indépendante de b^2, a donc lieu aussi lorsque la conique fixe est une hyperbole.

Observation. Il est à désirer qu'on démontre géométriquement la propriété $\rho z'' = b^2$; cela abrégerait beaucoup le calcul.

Tm.