

LÉON ANNE

**Note sur la méthode d'approximation
de Newton**

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 5
(1846), p. 116-121

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1846_1_5__116_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1846, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

NOTE

sur la méthode d'approximation de Newton.

PAR M. LÉON ANNE,

Ancien élève de l'Ecole polytechnique.

Soit $f(x) = 0$ une équation ayant une racine réelle a plus grande ou plus petite que α ; posant $x = \alpha + y$, il vient :

$$f(\alpha + y) = f(\alpha) + yf'(\alpha) + y^2 \frac{f''(\alpha)}{1.2} + \dots$$

$$\dots + \frac{y^m f^{(m)}(\alpha)}{1.2\dots m} = \varphi(y) = 0.$$

Cette équation a pour racines les m restes qu'on obtient en retranchant de α chacune des m racines de $f(x) = 0$. L'une d'elles est $(\alpha - x)$ et le résultat de sa substitution

$$f(x) + (\alpha - x)f'(x) + \frac{(\alpha - x)^2 f''(x)}{1.2} + \dots + \frac{(\alpha - x)^m f^{(m)}(x)}{1.2\dots m}$$

est identiquement nul.

La méthode de Newton, comme il est dit dans toutes les algèbres, suppose la différence $(\alpha - x)$ assez petite pour que l'ensemble des termes qui suivent les deux premiers puisse être négligé, et que

$$f(x) + yf'(x) = 0$$

donne pour y une valeur ϵ qui, ajoutée à α , forme un nombre $\alpha + \epsilon = \alpha'$ différant encore moins de α , c'est-à-dire

$$\alpha - \alpha' < \alpha - \alpha;$$

et enfin, appliquant les mêmes calculs et les mêmes hypothèses, non-seulement à α' , mais encore aux résultats successifs, les quantités

$$\alpha = \alpha,$$

$$\alpha' = \alpha - \frac{f(x)}{f'(x)},$$

$$\alpha'' = \alpha' - \frac{f(\alpha')}{f'(\alpha')},$$

$$\alpha''' = \alpha'' - \frac{f(\alpha'')}{f'(\alpha'')},$$

convergent de plus en plus vers α .

Mais comme il existe un grand nombre de circonstances incompatibles avec de telles hypothèses, cette méthode est souvent en défaut et ne doit son emploi qu'à l'excessive sim-

plicité de son application ; bien plus, si l'on exprime ces quantités en décimales, et en ne prenant qu'un nombre déterminé de décimales, le calcul pourra donner pour α' , α'' , $\alpha''' \dots$ des nombres moins rapprochés que ces fractions dont on n'a pas ainsi la valeur exacte, et la méthode pourra devenir fautive uniquement par cette restriction.

Pour interpréter analytiquement les circonstances qui peuvent rendre cette méthode exacte ou fautive, il faut remarquer que résoudre l'équation $f(x) = 0$, c'est chercher à exprimer numériquement les abscisses des points d'intersection de la courbe $y = f(x)$ et de l'axe des x ; cette intersection peut se faire sous l'une des quatre directions des fig. 15 et 16.

Soit $oR = \alpha$, $oA = \alpha$, $AB = f(\alpha)$, ou $AB_1 = f(\alpha)$. Au point B ou B_1 , je mène la tangente BA' ou B_1A' ; au point A' je mène une ordonnée $A'B'$ ou $A'_1B'_1$, puis la tangente $B'A''$ ou $B'_1A''_1$, et ainsi de suite; et l'on obtient une suite de pieds de tangentes A' , A'' , $A''' \dots$ s'approchant de plus en plus de R, et ces triangles donneront :

$$(fig. 15) \quad AA' = \frac{AB}{\text{tang } BA'A} = \frac{f(\alpha)}{-f'(\alpha)},$$

$$\text{ou bien} \quad AA' = \frac{AB_1}{\text{tang } B_1A'A} = \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}.$$

Comme ici $f(\alpha)$ et $f'(\alpha)$ sont de signes contraires, $-\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}$ est positif, et par suite :

$$\alpha' = \alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} = oA + AA' = oA',$$

$$\text{ou } (fig. 16) \quad AA' = \frac{AB}{\text{tang } BA'A} = \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)},$$

$$\text{ou bien} \quad AA' = \frac{AB_1}{\text{tang } B_1A'A} = \frac{f(\alpha)}{-f'(\alpha)}.$$

Ici $f(x)$ et $f'(x)$ sont de même signe, $-\frac{f(x)}{f'(x)}$ est négatif, et par suite :

$$\alpha' = \alpha - \frac{f(x)}{f'(x)} = oA - AA' = oA'.$$

Ainsi R sera la limite supérieure des points A', A'', A'''... dans le premier cas, et sera dans le second cas leur limite inférieure.

Ces points A', A'', A'''... ne dépasseront pas le point R si, dans toute l'étendue de l'arc BR, les ordonnées sont constamment décroissantes de B en R, ainsi que les coefficients d'inclinaison (abstraction faite du signe). Pour cela, il faut que $f'(x)$ n'admette de B en R ni maximum ni minimum, c'est-à-dire que l'arc BR n'ait ni sommets ni inflexions. Pour qu'une fonction soit croissante, il faut et il suffit que la dérivée reste positive; puis une quantité négative est d'autant plus grande que sa valeur absolue est plus petite. Cela admis :

1° $f(x)$, $f'(x)$ et $f''(x)$ ne doivent pas changer de signe pour toute valeur de x comprise entre α et α .

2° De B en R (fig. 15) ou de R en B (fig. 16), $f'(x)$ augmente; donc $f''(x)$ reste, comme $f'(x)$, positif entre ces limites.

3° De B, en R (fig. 15) ou de R en B, (fig. 16), $f'(x)$ diminue; donc $f''(x)$ reste, comme $f'(x)$, négatif entre ces limites.

D'où il suit que la méthode ne sera pas en défaut :

1° Si l'on a deux nombres α , γ comprenant entre eux une racine de $f(x) = 0$ et une seule.

2° Si, pour toute valeur de x comprise entre α et γ , les fonctions $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ ne changent pas de signe. (Le théorème de M. Sturm permettra de déterminer toujours α et γ dans ces conditions.)

3° Si l'on prend pour première approximation de la racine de $f(x) = 0$ celui des deux nombres dont la substitution dans $f(x)$ et $f'(x)$ donnera deux résultats de même signe.

On voit, d'après cela, que si les nombres $\alpha, \alpha', \alpha'' \dots$ convergent de plus en plus vers une certaine limite, cette limite est la racine a ; il serait donc utile de reconnaître si en effet il y a convergence, c'est-à-dire de déterminer à chaque nouvelle opération une limite de l'erreur commise. On pourrait, à cet effet, substituer aux tangentes les cordes des arcs ayant le point R pour un de leurs points, comme l'indique M. Lefebure de Fourcy dans sa Géométrie analytique, ou bien des parallèles aux tangentes, ainsi qu'il suit.

Soit $oA = \alpha$ une limite inférieure, et soit oC une limite supérieure de $oR = a$; supposons que l'arc BD n'ait ni sommets ni inflexions, il est clair que si par le point D l'on mène DC' parallèle à BA' , le point R sera compris entre A' et C' ; menant l'ordonnée $C'D'$ du point C' et la parallèle $D'C''$ à la tangente $B'A''$, on aura deux nouveaux points A'', C'' plus rapprochés, et néanmoins comprenant entre eux le point R, et ainsi de suite; de sorte que, comparant ces deux constructions, on aurait :

$$\begin{aligned} oA &= \alpha, & oC &= \gamma, \\ oA' &= \alpha' = \alpha - \frac{f'(\alpha)}{f''(\alpha)}, & oC' &= \gamma' = \gamma - \frac{f'(\gamma)}{f''(\gamma)}, \\ oA'' &= \alpha'' = \alpha' - \frac{f'(\alpha')}{f''(\alpha')}, & oC'' &= \gamma'' = \gamma' - \frac{f'(\gamma')}{f''(\gamma')}, \\ oA''' &= \alpha''' = \alpha'' - \frac{f'(\alpha'')}{f''(\alpha'')}, & oC''' &= \gamma''' = \gamma'' - \frac{f'(\gamma'')}{f''(\gamma'')}, \end{aligned}$$

et ainsi de suite; et l'erreur commise à chacune de ces approximations est évidemment moindre que $\gamma - \alpha, \gamma' - \alpha', \gamma'' - \alpha'' \dots$

Ainsi on pourra prendre pour valeurs approximatives celles qui sont formées des décimales communes.

Il est clair que ce calcul serait identique, si la courbe avait l'une quelconque des quatre courbures dessinées fig. 15 et fig. 16.

Nous croyons utile aux élèves de leur faire connaître succinctement cette méthode, due, comme chacun sait, à l'illustre Fourier. Elle est exposée avec beaucoup d'étendue dans l'ouvrage posthume publié en 1831 sous le titre d'*Analyse des équations déterminées*; il ne renferme que deux livres, dont le premier traite de la séparation des racines, et le second du calcul approché de ces racines selon le procédé newtonien perfectionné. Dans ce second livre, on trouve, pour le même objet, l'ingénieuse abréviation de la division ordonnée, qui a passé dans les traités élémentaires. Nous empruntons au même ouvrage l'exemple suivant, qui peut servir d'exercice (p. 209) :

$$x^3 - 2x - 5 = 0.$$

1^{re} val. app. $x = 2,09$ à $0,01$ près; on ne sait si c'est en plus ou en moins.

2^e $x = 2,0945$, à $0,001$ *id.*

3^e $x = 2,09455148$, moindre que la racine.

4^e $x = 2,0945514815423265$, à moins d'une décimale du 16^e ordre; plus petit que la racine.

5^e $x = 2,0945514815423265914823865405793$.