NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

V.

PARIS. — IMPRIMERIE DE FAIN ET THUNOT,
Rue Racine, 28, près de l'Odéon.

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

JOURNAL DES CANDIDATS

AUX ÉCOLES POLYTECHNIQUE ET NORMALE,

Rédigé par MM.

TERQUEM,

OFFICIER DE L'UNIVERSITÉ, DOCTEUR ÈS SCIENCES, PROFESSEUR AUX ÉCOLES ROYALES D'ARTILLERIE ;

ET

GERONO,

PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES.

TOME CINQUIÈME.

PARIS.

CARILIAN-GOEURY ET Vor DALMONT, ÉDITEURS

LIBRAIRES DES CORPS ROYAUX DES PONTS ET CHAUSSÉES ET DES MINES,

Quai des Augustins, nos 39 et 41.

1846.

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

SUR UNE MÉTHODE

proposée par Ampère, pour extraire les racines des fractions. — Décomposition des fractions en facteurs. — Application à la théorie de la gamme.

PAR A. J.-H. VINCENT,
professeur au Collége royal de Saint-Louis.

—

L'intéressante publication faite dernièrement, dans ce journal, de l'œuvre posthume d'Ampère, m'a remis en mémoire une de ces conversations toujours si instructives de l'illustre géomètre, dans laquelle il m'exposait une méthode approximative pour l'extraction des racines des fractions numériques. On sera sans doute bien aise de la trouver ici.

§ I.

Soit $\frac{a}{b}$ une fraction numérique dont on veut extraire la racine n^e, a pouvant indifféremment être $>$ ou $< b$; multiplions ses deux termes par n; et, après avoir formé la progression

$$\div\, na \cdot na + (b-a) \cdot na + 2(b-a) \cdot na + 3(b-a) \cdot \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots \cdot nb - (b-a) \cdot nb,$$

considérons les n fractions que l'on obtient en divisant chacun des termes de cette progression par le suivant, c'est-à-dire

$$\frac{na}{na+(b-a)},\ \frac{na+(b-a)}{na+2(b-a)},\ \frac{na+2(b-a)}{na+3(b-a)},\ \ldots\ldots\ \frac{nb-(b-a)}{nb};$$

le produit de toutes ces fractions sera égal à la proposée.

Maintenant, la différence des fractions consécutives étant ordinairement peu considérable (*), on peut la négliger, du moins pour une première approximation : et alors le produit des n fractions sera la n^e puissance de la fraction moyenne, en entendant par là celle du milieu quand n est impair, c'est-à-dire la fraction

$$\frac{na + \frac{1}{2}(n-1)(b-a)}{na + \frac{1}{2}(n+1)(b-a)},$$

ou plus généralement et dans tous les cas, la fraction que l'on obtient en ajoutant terme à terme les deux fractions extrêmes. On aura donc ainsi l'égalité approximative

$$\frac{a}{b} = \left\{\frac{(n+1)a + (n-1)b}{(n-1)a + (n+1)b}\right\}^n,$$

ce qui donne une valeur approchée de la racine n^e de $\frac{a}{b}$.

Au reste, si l'on veut se faire une idée précise du degré d'approximation ainsi obtenu, il n'y a qu'à développer l'expression précédente après l'avoir préalablement mise sous la forme :

(*) Sa valeur est égale au carré de la différence des nombres a et b, divisé par le produit des dénominateurs des fractions que l'on considère.

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n}\cdot\frac{a-b}{a+b}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n}\cdot\frac{b-a}{b+a}\right)^n}$$

puis comparer le développement à la fraction proposée.

Exemple.

$$\sqrt[3]{\frac{128}{125}}=\frac{127}{126}=1{,}0079365$$

$$\begin{array}{lr} \text{au lieu de. . .} & 1{,}0079361 \\ \hline \text{Erreur. . . .} & 0{,}0000004 \end{array}$$

Il est clair que l'on pourrait, en renversant la question, obtenir d'après le même principe, et par une opération fort simple, la puissance $(2n+1)^e$ d'une fraction $\frac{a}{b}$; car on a approximativement :

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{(n+1)a-nb}{na-(n-1)b}\cdots\cdots\frac{3a-2b}{2a-b}\cdot\frac{2a-b}{a}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{2b-a}\cdot$$
$$\cdot\frac{2b-a}{3b-2a}\cdots\cdots\frac{nb-(n-1)a}{(n+1)b-na}=\frac{(n+1)a-nb}{(n+1)b-na}.$$

On trouverait facilement la modification convenable au cas d'une puissance de degré pair.

Le lecteur comprend du reste que la méthode sera d'autant plus avantageuse que le nombre n sera plus grand, et que la différence des nombres a et b sera plus petite en comparaison de leurs valeurs absolues (*).

(1) Voyez, dans les *Novi Comment. Petrop.*, pour 1769, tome XIV, 1re part., p. 188, un mémoire d'Euler : *De inventione quotcumque mediarum proportionalium citrà radicum extractionem*.

§ II.

J'ajouterai à ce qui précède, que les anciens mathématiciens grecs, particulièrement les mathématiciens de l'école de Ptolémée, employaient une méthode tout à fait analogue à celle qui vient d'être exposée, pour décomposer les nombres qu'ils nommaient superpartiels (ἐπιμόριοι, en latin *superparticulares*), c'est-à-dire les nombres de la forme $\frac{a+1}{a}$, en d'autres fractions de la même forme. (Cf. Wallis. Op., t. III, *passim.*)

Il est bon de dire d'abord pourquoi ces théoriciens s'attachaient avec tant de soin à ne composer leurs *gammes* ou *harmonies* que d'intervalles de cette nature : c'est à cause de la facilité qu'ils trouvaient, ne connaissant pas les logarithmes, à partager les cordes de manière à leur faire produire ces sortes d'intervalles ; car une corde vibrante étant partagée en a parties égales, il suffisait d'augmenter la longueur totale de *une* des a parties égales, pour obtenir un second son qui fût, à celui que rendait la première longueur, dans ce même rapport acoustique de a à $a+1$. Il fallait que l'oreille s'en accommodât ; et l'expérience prouve qu'en effet elle s'en accommode très-bien, pourvu d'abord que ces sons soient rendus sans accompagnement ou du moins ne portent pas d'harmonie, et pourvu ensuite qu'il y en ait toujours 4 par chaque intervalle de quarte, les extrêmes compris.

Ainsi, soit à décomposer l'intervalle de *quarte*, dont la valeur acoustique est $\frac{4}{3}$, en trois intervalles à peu près égaux, ce qui revient à extraire la racine cubique de $\frac{4}{3}$. On avait ainsi, conformément à la méthode exposée d'après Ampère :

$$\frac{4}{3}=\frac{12}{11}\times\frac{11}{10}\times\frac{10}{9};$$

et les quatre sons cherchés, qui produisaient alors le genre nommé *diatonique égal*, étaient rendus par les cordes dont les longueurs, en progression par différence (tout étant semblable d'ailleurs), étaient représentées par les nombres respectifs 9, 10, 11, 12.

Pour les autres genres, on commençait par prélever sur la quarte un premier intervalle (aigu) représenté par la formule $\frac{a+1}{a}$, en faisant

$a = 4$ pour le genre *enharmonique*,
$a = 5$ pour le *chromatique mou*,
$a = 6$ pour le *chromatique dur*,
$a = 7$ pour le *diatonique mou*,
$a = 8$ pour le *diatonique moyen*,
et enfin $a = 9$ pour le *diatonique dur*.

Divisant alors la fraction $\frac{4}{3}$ par chacune des valeurs de la fraction $\frac{a+1}{a}$, on obtenait,

dans le cas de $a = 4$ (*g. enharmonique*) : quotient $= \frac{16}{15}$

$a = 5$ (*chromatique mou*) : $\frac{10}{9}$

$a = 6$ (*chromatique dur*) : $\frac{8}{7}$

$a = 7$ (*diatonique mou*) : $\frac{7}{6}$

$a = 8$ (*diatonique moyen*) : $\frac{32}{27}$

$a = 9$ (*diatonique dur*) : $\frac{6}{5}$.

Cela fait, il restait à décomposer ce quotient en 2 fractions de la forme susdite. Soit par exemple la fraction $\frac{6}{5}$, correspondant au diatonique dur (qui n'est autre que le diatonique des modernes) : si l'on multiplie ses deux termes par 3, on a

$$\frac{18}{15} = \frac{18}{16} \times \frac{16}{15} = \frac{9}{8} \times \frac{16}{15}.$$

Les autres cas se traitent de la même manière, en multipliant de même par 3, intercalant un nombre pair, qui est toujours déterminé, et prenant la moitié des deux termes pairs de celle des deux fractions résultantes qui se prête à cette transformation. Ainsi, pour $a = 7$, ou pour le *diatonique mou*, on a

$$\frac{7}{6} = \frac{21}{18} = \frac{21}{20} \times \frac{20}{18} = \frac{21}{20} \times \frac{10}{9};$$

de même pour $a = 4$, ce qui est le cas du genre *enharmonique*, on a :

$$\frac{16}{15} = \frac{48}{45} = \frac{48}{46} \times \frac{46}{45} = \frac{24}{23} \times \frac{46}{45}.$$

Quant à la fraction $\frac{32}{27}$ qui n'a pas la forme superpartielle, on la décompose sans multiplication préalable, en intercalant le nombre pair 28, et l'on a ainsi :

$$\frac{32}{27} = \frac{32}{28} \times \frac{28}{27} = \frac{8}{7} \times \frac{28}{27}.$$

On eût pu également intercaler le nombre 30, d'où

$$\frac{32}{27} = \frac{32}{30} \times \frac{30}{27} = \frac{16}{15} \times \frac{10}{9};$$

mais on n'eût fait ainsi que reproduire les intervalles du diatonique dur dans un ordre différent.

Si, aux 7 diverses décompositions qui viennent d'être indiquées pour l'intervalle de quarte, nous en ajoutons une huitième, savoir, la décomposition en deux tons mesurés par $\frac{9}{8}$, et un *limma* (ou reste) mesuré par $\frac{256}{243}$ $\left(\text{parce que l'on a } \frac{4}{3} = \frac{9}{8} \times \frac{9}{8} \times \frac{256}{243}\right)$, nous aurons les 8 genres admis par Ptolémée. Le dernier qui vient d'être indiqué est le *diatonique ditonié*, ou le diatonique de Platon et d'Eratosthène.

§ III.

Le problème de la décomposition de la quarte ou de la fraction $\frac{4}{3}$, en trois fractions superpartielles dont l'une est donnée suivant les conditions de Ptolémée, est un problème indéterminé que l'on peut traiter par les méthodes ordinaires, en posant d'abord

$$\frac{4}{3} : \frac{a+1}{a} = \frac{x+1}{x} \times \frac{y+1}{y},$$

et faisant ensuite alternativement :

$$a = 4, \quad a = 5, 6, 7, 8, 9 :$$

nous ne ferons qu'indiquer ce problème aux jeunes élèves, et nous terminerons par une remarque relative à la différence très-grande qui existe entre la musique ancienne et la musique moderne.

On voit figurer, dans les formules des genres de Ptolémée, les fractions superpartielles

$$\frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \frac{7}{6}, \frac{8}{7}, \text{ etc., jusqu'à } \frac{46}{45},$$

tandis que la musique moderne n'admet de cette forme que les nombres :

$\frac{2}{1}$ représentant l'octave ,
$\frac{3}{2}$ la quinte ,
$\frac{4}{3}$ la quarte ,
$\frac{5}{4}$ la tierce majeure ,
$\frac{6}{5}$ la tierce mineure ,
$\frac{9}{8}$ le ton majeur ,
$\frac{10}{9}$ le ton mineur ,
$\frac{16}{15}$ le demi-ton majeur ,
et enfin $\frac{25}{24}$ le demi-ton mineur (*).

Les intervalles représentés par les fractions $\frac{7}{6}$, $\frac{8}{7}$, et par toutes celles où entrent des nombres premiers supérieurs à 5, sont formellement exclus de notre musique, tandis que la théorie grecque admettait dans le calcul de ses tétracordes les nombres premiers 7, 11, 23; et certains théoriciens allaient même jusqu'à 31 (**). Si donc il était vrai, suivant la piquante expression de Leibnitz (Haüy, *Physique*, 2e édit., 1806, t. I, p. 348), *que l'oreille ne sait compter que jusqu'à* 5, cela du moins devrait s'entendre uniquement de l'oreille moderne, et encore de l'européenne. Aussi, sous ce point de vue,

(*) On ne considère le comma $\frac{81}{80}$ que dans la théorie.

(**) Genre enharmonique de Didyme. — (Voyez les *Notices et extraits des manuscrits de la Bibliothèque royale*, tome XVI, 2e partie.)

notre musique ne présente-t-elle qu'un cas très-particulier de la musique des anciens Grecs. Mais en voilà beaucoup trop sur ce sujet.

SOLUTION DU PROBLÈME 101.

(T. IV, p. 370.)

PAR M. MENTION,
Élève en spéciales.

—

Quatre droites dans un même plan forment quatre triangles; dans chaque triangle existe un point de rencontre des trois hauteurs; les quatre points de rencontre sont sur une même droite.

Lemme I. Le point F (*fig.* 1) est un point quelconque du prolongement de BC; je mène les trois hauteurs du triangle, je marque le pied G de celle qui correspond à la base BC; si l'on prolonge la hauteur CO jusqu'à la rencontre avec la perpendiculaire abaissée du point F sur AC, on a la relation (N étant le point de rencontre de la perpendiculaire TF avec AG) :

$$\frac{NT}{FT}=\frac{BF.CG}{CF.BG}.$$

Démonstration. Je mène par le point C une parallèle à NT, ce qui me donne :

$$\frac{NT}{CK}=\frac{OT}{OC}.$$

Mais les triangles semblables BOC et CFT donnent :

$$\frac{BO}{FT}=\frac{CO}{CT}.$$

Multipliant ces deux égalités termes à termes, nous avons :

$$\frac{NT\,.\,BO}{FT\,.\,CK}=\frac{OT}{CT}, \quad \text{d'où} \quad \frac{NT}{FT}=\frac{OT}{CT}\cdot\frac{CK}{BO}.$$

Or nous avons aussi :

$$\frac{CK}{BO}=\frac{CG}{BG} \quad \text{et} \quad \frac{OC}{CT}=\frac{BC}{CF};$$

d'où, *componendo* :

$$\frac{OT}{CT}=\frac{BF}{CF};$$

donc enfin :

$$\frac{NT}{FT}=\frac{BF\,.\,CG}{CF\,.\,BG}.$$

C. Q. F. D.

Lemme II. Si de deux points D et E (*fig.* 2) des côtés d'un triangle, on abaisse des perpendiculaires sur le troisième côté, on a (G étant le pied de la hauteur correspondante à ce côté, D′ et H les pieds des perpendiculaires abaissées des points D et E) :

$$\frac{GH}{D'G}=\frac{AE\,.\,BD\,.\,CG\,.\,FE}{FD\,.\,BG\,.\,CE\,.\,AD}.$$

Le point F est le point où la droite qui joint les deux points rencontre le troisième côté.

Nous avons d'abord successivement, à cause des perpendiculaires :

$$\frac{GH}{CH}=\frac{AE}{CE}, \quad \frac{BD'}{D'G}=\frac{BD}{AD};$$

d'où, faisant le produit :

$$\frac{GH}{D'G}\cdot\frac{BD'}{CH}=\frac{AE\,.\,BD}{CE\,.\,AD} \quad \text{ou} \quad \frac{GH}{D'G}=\frac{AE\,.\,BD}{CE\,.\,AD}\cdot\frac{CH}{BD'}.$$

Nous avons aussi, à cause des perpendiculaires :

$$\frac{CH}{CG}=\frac{EH}{AG},\quad \frac{BG}{BD'}=\frac{AG}{DD'};$$

et, *multiplicando :*

$$\frac{CH}{BD'}=\frac{EH}{DD'}\cdot\frac{CG}{BG},\quad \text{or}\quad \frac{EH}{DD'}=\frac{FE}{FD},$$

donc :

$$\frac{CH}{BD'}=\frac{FE\,.\,CG}{FD\,.\,BG};$$

et par suite :

$$\frac{GH}{D'G}=\frac{AE\,.\,BD\,.\,CG\,.\,FE}{CE\,.\,AD\,.\,BG\,.\,FD}.$$

III. Je viens à la démonstration du théorème,

Soit BCDE (*fig.* 3) le quadrilatère donné. Je prends, par exemple, les triangles ABC, BDF, ECF. Dans le premier, le point de rencontre est O; dans le second, il est O″; dans le troisième, il est O′.

Je prolonge AG jusqu'à la rencontre N avec la hauteur FO′ du triangle ECF, et jusqu'à la rencontre M avec la hauteur FO″ du triangle BDF. Alors j'obtiens un triangle dont les côtés sont coupés aux points O, O′, O″; ce triangle est MNF. Donc, si je prouve qu'on a l'égalité suivante :

$$MO''\,.\,NO\,.\,FO'=FO''\,.\,MO\,.\,NO',$$

les trois points O, O′, O″ seront en ligne droite. Or dans le triangle FGN, O′H étant parallèle à GN, nous aurons :

$$FO' : NO' :: FH : HG;$$

et, par la même raison, on a aussi :

$$MO'' : FO'' :: D'G : FD'.$$

Enfin, prolongeant CO jusqu'en T, nous avons :

$$NO : MO :: NT : FT.$$

Et, multipliant ces trois proportions termes à termes, tout revient donc à prouver que

$$\frac{FH \,.\, D'G \,.\, NT}{FD' \,.\, GH \,.\, FT} = 1.$$

Or $\frac{FH}{FD'} = \frac{FE}{FD}$, et d'après le second lemme, j'ai :

$$\frac{D'G}{GH} = \frac{CE \,.\, AD \,.\, BG \,.\, FD}{AE \,.\, BD \,.\, CG \,.\, FE};$$

enfin, le premier lemme me donne :

$$\frac{NT}{FT} = \frac{BF \,.\, CG}{GF \,.\, BG}.$$

Remplaçant par ces différentes valeurs, j'aurai :

$$\frac{FH.D'G.NT}{FD'.GH.FT} = \frac{FE.CE.AD.BG.FD.BF.CG}{FD.AE.BD.CG.FE.CF.BG} = \frac{CE.AD.BF}{AE.BD.CF} = 1.$$

Or, il suffit évidemment de démontrer que trois des points de rencontre sont en ligne droite. Donc, etc. C. Q. F. D.

Note. Le lemme I peut se démontrer directement. Supposons que FTN soit une droite quelconque coupant OB en Q; on a la relation connue :

$$\frac{GC \,.\, BF}{BG \,.\, CF} = \frac{TN \,.\, FQ}{TF \,.\, NQ};$$

or FTN étaut parallèle à OB, on a :

$$\frac{FQ}{NQ} = 1.$$

Donc, etc. Tm.

THÉORÈME DE TRIGONOMÉTRIE SPHÉRIQUE.

Construction de l'excès sphérique.

—

Observation. Dans tout ce qui suit, il n'est question que de grands cercles.

I. *Théorème.* Une transversale coupant les trois côtés d'un triangle sphérique, y forme six segments; en comptant ces segments dans le même ordre, le produit des sinus des segments de rang pair est égal au produit des sinus des segments de rang impair, et réciproquement, lorsque cette égalité subsiste, les trois points pris sur les côtés sont sur un même grand cercle.

II. *Théorème.* Si d'un même point de la sphère on mène un arc à chaque sommet d'un triangle, ces trois cercles forment sur les côtés des triangles six segments; en les comptant dans le même sens, le produit des sinus des segments de rang pair est égal au produit des sinus des segments de rang impair, et réciproquement, lorsque cette égalité subsiste, les trois arcs de grand cercle passent par le même point.

Observation. Ces deux théorèmes fondamentaux, très-connus, se démontrent comme les théorèmes analogues pour le triangle rectiligne, en substituant aux segments rectilignes les sinus des segments circulaires. Le premier est dans l'Almageste de Ptolémée.

III. *Théorème.* Les trois arcs qui vont des sommets aux milieux des côtés respectivement opposés passent par le même point.

IV. *Théorème.* Les trois arcs bissecteurs des angles du triangle passent par le même point.

V. *Théorème.* Les trois hauteurs du triangle passent par le même point.

Observation. Les trois derniers théorèmes sont des corollaires immédiats du théorème II.

VI. *Théorème.* Les trois arcs menés perpendiculairement aux milieux des côtés d'un triangle passent par le même point.

Démonstration. Ce point est le pôle du cercle circonscrit au triangle.

VII. *Théorème.* Les trois arcs qui, partant des sommets du triangle, divisent son aire en deux parties équivalentes, se rencontrent en un même point. (Voy. tome IV, p. 587.)

VIII. *Théorème* (*Fig.* 5). Si sur les côtés AB, AC du triangle ABC, on prend les points M et N, tels que l'on ait $\frac{\sin AM}{\sin MB} = \frac{\sin AN}{\sin NC}$; menant les arcs MC, NB se coupant au point P, l'arc AP coupe le côté BC en un point Q, milieu de BC, et les arcs BV, CT, abaissés perpendiculairement sur MN sont égaux; prolongeant l'arc MN jusqu'à ce qu'il coupe l'arc BC en R, on a $QR = 1^q$.

Démonstration. 1° Les trois arcs AQ, BN, CM, passant par le même point P, on a (théor. II) :

$$\sin AM . \sin BQ . \sin NC = \sin BM . \sin QC . \sin AN.,$$

or
$$\sin AM . \sin NC = \sin MB . \sin AN.;$$

donc $BQ = QC$.

2° MNR étant une transversale, on a (théor. I) :

$$\sin AM . \sin BR . \sin NC = \sin BM . \sin CR . \sin AN;$$

d'où
$$\sin BR = \sin CR; \text{ d'où } BR + CR = 2^q;$$

ou $$QR + BQ + QR - QC = 2^q;$$

d'où $QR = 1^q$.

3° Les triangles CTR, BVR, rectangles en T et en V, donnent :

$$\sin CT = \sin CR.\sin R;\ \ \sin BV = \sin BR.\sin R;$$

or $$\sin BR = \sin CR;\ \text{donc}\ BV = CT.$$

Corollaire. Si M et N sont les points milieux respectifs de AB et AC, toutes les propriétés énoncées ont lieu.

IX. *Théorème.* Le cosinus de l'arc qui va du sommet d'un angle d'un triangle au milieu du côté opposé (arc médian), est égal à la somme des cosinus des cotés de l'angle, divisé par le double des cosinus de la moitié du côté opposé.

Démonstration. Soit le triangle ABC (*fig.* 5); N le milieu de AC; $AB = c$: $BC = a$; $AC = b$; $BN = x$; les triangles BCN, BCA donnent :

$$\cos C = \frac{\cos x - \cos a \cos \frac{1}{2} b}{\sin a \sin \frac{1}{2} b} = \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin a \sin b};$$

d'où :

$$\cos x = \frac{\cos a + \cos c}{2 \sin \frac{1}{2} b}; \qquad \text{C. Q. F. T.}$$

X. *Théorème.* La somme des cosinus des côtés d'un triangle, augmentée d'une unité et divisée par quatre fois le produit des cosinus des demi-côtés, est égale au cosinus du demi-excès.

Démonstration. Soit e l'excès; on a $e = 2^q - A - B - C$; faisons

$$M = 4 \cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} c;$$

on a :

$$\sin\frac{1}{2}e = \frac{\sin A \sin b \sin c}{M}$$

$$M^2\cos^2\frac{1}{2}e = M^2 - \sin^2 b \sin^2 c \sin^2 A =$$

$$= 2(1+\cos a)(1+\cos b)(1+\cos c) -$$

$$-(1-\cos^2 b)(1-\cos^2 c) + (\cos a - \cos b\cos c)^2$$

$$= 2(1+\cos a)(1+\cos b)(1+\cos c) - 1 + \cos^2 a + \cos^2 b +$$
$$+\cos^2 c - 2\cos a\cos b\cos c = (1+\cos a+\cos b+\cos c)^2,$$

d'où $\cos\frac{1}{2}e = \dfrac{1+\cos a+\cos b+\cos c}{M}$, C. Q. F. D. (Voir Legendre, *Géométrie*, note X.)

XI. *Théorème.* Le cosinus de l'arc qui joint les milieux des deux côtés d'un triangle divisé par le cosinus de la moitié du côté opposé est égal au cosinus du demi-excès.

Démonstration. Soient M et N respectivement les milieux des côtés AB et AC; d'après le théorème IX, on a dans le triangle ABN :

$$\cos MN = \frac{\cos BN + \cos\frac{1}{2}b}{2\cos\frac{1}{2}c},$$

et le même théorème donne dans le triangle ABC :

$$\cos BN = \frac{\cos a + \cos c}{2\cos\frac{1}{2}b};$$

donc

$$\cos MN = \frac{\cos a + \cos c + 2\cos^2\frac{1}{2}b}{4\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c} =$$

$$= \frac{1+\cos a+\cos b+\cos c}{4\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c};$$

$$\text{et}\ \frac{\cos MN}{\cos \frac{1}{2} a} = \frac{1 + \cos a + \cos b + \cos c}{4 \cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} c} = \cos \frac{1}{2} e, \text{ C.Q.F.D.}$$

Remarque. Je ne sache pas que cette proposition soit déjà énoncée.

XII. *Théorème.* M et N étant les milieux des côtés AB et AC, R le point de rencontre des deux arcs MN et BC ; si, à partir du point R, on porte sur RN, l'arc DR $=$ MN, et sur RC, l'arc RE $= \frac{1}{2}$ BC, on forme le triangle DER rectangle en E, et DE sera le demi-excès (*Fig.* 6).

Démonstration. Soit O le pôle de l'arc MN ; menons les arcs OVB, OTC ; les angles V et T sont droits, donc BV $=$ CT (VIII), OB $=$ OC ; donc l'arc bissecteur OSQ passe par le milieu S de VT et le milieu Q de BC, et les angles Q et S sont droits ; donc R est le pôle de l'arc QSO. Abaissons de A l'arc AK perpendiculaire sur MN, les deux triangles rectangles ANK, CNT ont une hypoténuse égale et un angle égal ; donc KN $=$ NT, et pour la même raison, KM $=$ MV ; ainsi MN $= \frac{1}{2}$ VT $=$ VS ; donc DV $=$ RS $= 1^q$. Mais V est un angle droit ; donc D est le pôle de l'arc BVO, et BD $= 1^q$. Mais BE $=$ RQ $= 1^q$; donc B est le pôle de DE, et l'angle E est droit ; d'où $\cos DE = \frac{\cos DR}{\cos ER} = \frac{\cos MN}{\cos \frac{1}{2} BC}$. Donc, en vertu du théorème précédent, DE est égal au demi-excès.

Remarque. Cette belle construction est de M. le professeur Gudermann, de Clèves. (Crelle, t. VI et VIII, 1830.)

XIII. *Lemme.* Si d'un point fixe on abaisse des perpendiculaires sur un système de droites convergentes vers le même point, les pieds des perpendiculaires sont sur une surface sphérique ; si ce système de droites est dans un même plan, les pieds des perpendiculaires sont sur une même circonférence ; et en prolongeant chacune de ces perpendiculaires d'une longueur égale à elle-même, les extrémités sont sur une circonférence dont le plan est parallèle à celui du système des droites.

XIV. *Théorème.* Si d'un point fixe pris sur une sphère, on mène des arcs de grands cercles aux points d'un grand cercle donné, et qu'on prolonge chacun de ces arcs d'une longueur égale à l'arc, les extrémités sont sur un petit cercle dont le plan est parallèle à celui du grand cercle donné.

Démonstration. C'est un corollaire du lemme précédent.

XV. *Théorème.* Si un grand cercle parallèle à un petit cercle passe par le milieu d'un arc mené d'un point fixe à un point du petit cercle, il divise aussi en deux parties égales les arcs menés du point fixe à un point quelconque du petit cercle.

XVI. *Théorème.* Les sommets des triangles sphériques de même base et de même aire sont sur la circonférence d'un petit cercle. Les milieux des côtés variables sont sur un même grand cercle parallèle au petit cercle.

Démonstration. Soit A′ (*Fig.* 6) un point quelconque du petit cercle passant par A parallèlement au cercle VTR ; les arcs A′B et A′C seront divisés en deux parties égales par le grand cercle, en M′ et N′ (XV) ; les perpendiculaires CT, BV restent fixes, et l'arc M′N′ est toujours la moitié de l'arc VT : par conséquent M′N′ est constant, et le cosinus du demi-excès égal à $\dfrac{\cos M'N'}{\cos \frac{1}{2} BC}$ est aussi constant ; donc l'aire est constante. C. Q. F. D.

Remarque. La première partie de cette proposition est le théorème de Lexell ; en doublant le quadrant BD, on a le point diamétralement opposé à B et appartenant au petit cercle ; ce qui s'accorde avec la construction de M. Steiner (*voir* t. IV, p. 587).

XVII. *Théorème.* Un polygone sphérique d'un nombre de côtés pairs étant circonscrit à un petit cercle, la somme des côtés de rang pair est égale à la somme des côtés de rang impair.

Démonstration. Deux arcs de grand cercle menés d'un même point tangentiellement à un petit cercle, sont égaux ; donc, etc.

XVIII. *Lemme.* Un polygone sphérique étant inscrit dans un petit cercle, le polygone polaire est circonscrit à un petit cercle parallèle au premier.

XIX. Un polygone d'un nombre de côtés pair étant inscrit dans un petit cercle, la somme des angles d'un rang pair est égale à la somme des angles d'un rang impair.

Démonstration. Le polygone polaire étant circonscrit à un petit cercle, la somme des côtés de rang pair est égale à la somme des côtés de rang impair ; or ces côtés sont les suppléments des angles correspondants. Donc, etc.

XX. En général, toute proposition, toute formule sur les côtés et les angles d'un polygone sphérique, en fournit un second, au moyen du polygone polaire ; mais quelquefois les deux propositions sont identiques, lorsque les quantités entrent symétriquement dans la formule.

BIBLIOGRAPHIE.

Projet d'une instruction sur les travaux graphiques. — *Lithographie.* — In-4° de 49 pages. 1845.

Les constructions de l'architecture exigent la coupe des solides ; et par conséquent les opérations stéréotomiques, le tracé des épures, remontent nécessairement à la plus haute antiquité. Si la mesure des terres a donné naissance à la théorie des figures planes, il n'est pas moins évident que les grands travaux d'art, tels que les aqueducs, les palais, les temples, etc., ont créé la théorie des solides. Peut-être même que cette théorie, et les procédés qui en découlent et la réalisent, étaient du nombre des sciences mystérieuses dont les prêtres d'Égypte conservaient le dépôt, et ceci nous explique les voyages des philosophes géomètres dans cette contrée théocratique, et l'étude des *lieux solides*, auxquels les Grecs attachaient une si haute importance. On trouve même, dans Pappus, la solution de ce problème : Une sphère étant située dans l'espace, trouver la distance de son centre au plan horizontal. Les procédés, fondés sur des rabattements de plans et des recherches de traces, sont, à la terminologie près, analogues à ceux qui sont en usage parmi nous. Toutefois, dans les sciences, le secret ne nuit qu'à ceux qui le gardent. Il paraîtrait que, les principes étant oubliés, les *préceptes graphiques* seuls furent enseignés, transmis, et toujours mystérieusement. Il n'est pas même impossible que ces symboles géométriques, mélangés avec des idées religieuses, sociales, *humanitaires*, ne soient au moins une des origines de la franc-maçonnerie et de ces formules et cérémonies bizarres en usage chez les compagnons du devoir. Même au siècle de Louis XIV, lorsque Desargues retrouva la théorie du *trait*, toute la corporation des *appareilleurs* se souleva et traduisit l'illustre Lyonnais devant le parlement. On trouvera des détails curieux sur cet événement dans les œuvres de Desargues, dont nous devrons une édition soignée à M. Chasles, que nos lecteurs connaissent par tant de beaux théorèmes. Quoi qu'il en soit de ces diverses conjectures, il est certain que c'est au génie de Monge et à l'établissement de l'école polytechnique, qu'on doit l'enseignement *méthodique*, la simplification et la propagation de cette partie de la science de l'espace que son illustre promoteur a surnommée la géométrie descriptive, qui est aujourd'hui admise dans tous nos colléges et dans toutes les institutions où l'on s'occupe de tracés *exacts ;* mais pour que cette exactitude ait une utilité pratique, il faut que l'*épure* soit bien lisible, qu'elle soit la fidèle représentation non-seulement des formes, mais aussi des rapports *optiques* des corps relativement au spectateur : il est donc essentiel de bien connaître les moyens rationnels et les signes conventionnels qui président à l'exécution des épures. M. Bardin, digne successeur de feu M. Girard à l'école polytechnique, rend donc un véritable service, en publiant, dans son *Projet d'instruction*, tout ce qu'il est nécessaire de savoir pour bien exécuter les travaux graphiques; tout ce qui est relatif aux parties *vues* et *cachées*, aux hachures, aux ombres, etc., etc. On y trouve aussi d'utiles conseils sur la disposition si importante des données, pour faire entrer dans l'épure, et sans confusion, le plus d'objets possible. Il ne reste plus chez les libraires, éditeurs des Nouvelles Annales, qu'un petit nombre d'exemplaires. Tm.

NOTE ADDITIVE A L'ARTICLE DE M. DROT.

(Tome IV, p. 639.)

PAR L'AUTEUR.

Il résulte de ce qu'on vient de voir qu'il peut très-bien arriver que les deux derniers chiffres d'un nombre ne se reproduisent à aucune puissance de ce nombre, de même pour les trois derniers chiffres..... mais alors comme il est aisé de le prévoir, il arrivera toujours que les derniers chiffres d'une certaine puissance, se reproduiront à une autre puissance; de telle manière qu'en considérant les deux, trois, quatre.... derniers chiffres d'un nombre et de ses puissances successives, ils forment toujours une sorte de période, qui commence dès la première puissance dans les cas déjà examinés, et qui commence plus tard dans les autres cas.

Reprenons par exemple le cas de deux chiffres finals; on a vu que la relation $N(N^{x-1}-1)=100(q'-q)$ n'était jamais satisfaite quand le nombre N était divisible par 2 sans l'être par 4; ou par 5, sans l'être par 25 : mais dans ce cas ce seront les chiffres finals du carré de N qui se reproduiront à une certaine puissance; il est clair en effet que la condition nécessaire et suffisante pour que cela ait lieu, sera :

$$N^2(N^{x-2}-1)=100(q'-q),$$

condition qui pourra toujours être satisfaite : car :

1° Soit N divisible par 2 et 5 ; N^2 le sera par 4 et 25 ; donc la condition sera satisfaite quel que soit x.

2° Soit N divisible par 2 et non par 5 ; N^2 le sera par 4, et pour que la condition soit satisfaite, il faudra et il suffira que $N^{x-2}-1$ soit divisible par 25, ce qui peut toujours avoir lieu pour une valeur convenable de x ; ceci aura lieu pour $x=3$ et par suite pour toute valeur de x, dans le cas où le nombre N sera terminé par 26.

3° Soit N divisible par 5 et non par 2 ; N^2 le sera par 25, et il faudra que $N^{x-2}-1$ soit divisible par 4, ce qui peut toujours avoir lieu. Cette circonstance aura lieu pour $x=3$, et par suite pour toute valeur de x, dans le cas où le nombre N sera terminé par 05, 45, 65, 85.

4° Dans le cas de trois chiffres finals, on a vu que la relation

$$N(N^{x-1}-1)=1000(q'-q),$$

n'était jamais satisfaite quand le nombre N était divisible par 2 sans l'être par 8, ou par 5 sans l'être par 125 ; mais dans ce cas, ce sont les chiffres finals du carré ou du cube qui se reproduisent à une certaine puissance.

Supposons en effet d'abord que N soit divisible par 2 sans l'être par 4 ; ou par 5, sans l'être par 25 ; la condition nécessaire et suffisante pour que les trois derniers chiffres finals du cube se reproduisent, sera :

$$N^3(N^{x-3}-1)=1000(q'-q) ;$$

on la traitera comme précédemment, et on verra qu'elle peut toujours être satisfaite pour une valeur convenable de x, attendu que N^3 est divisible par 8 ou 125.

Soit en second lieu N divisible par 4 sans l'être par 8 ; ou par 25, sans l'être par 125 ; la condition nécessaire et suffisante pour que les trois derniers chiffres finals du carré se reproduisent, sera :

$$N^2(N^{x-2}-1)=1000(q'-q),$$

et on verra qu'elle peut toujours être satisfaite par une valeur convenable de x, attendu que N^2 est divisible par 8 ou par 125.

On continuerait de la même manière.

THÉORÈME D'EULER,

sur trois points de rencontre dans le triangle.

PAR M. GENTIL,
Chef d'institution.

Dans un triangle quelconque ABC (*Fig.* 4), le centre de gravité G, le point de croisement des trois hauteurs H, et le centre du cercle circonscrit I, sont en ligne droite, et la distance du premier point au second est double de celle du premier point au troisième.

Aux points A et B, on élève respectivement des perpendiculaires AM, BM, aux côtés AC et BC : elles se rencontrent en un point M de la circonférence du cercle circonscrit : la droite MC est un diamètre de ce cercle :

$$MA = BH = 2IL\,;$$

donc

$$BG = 2GL,$$

si on tire IH, etc.

THÉORÈME DE M. L. RAABE,

sur trois cercles tangents à une droite.

(Journal de Crelle, tome II.)

THÉORÈME 1. Trois cercles C, D, E, situés dans le même plan, touchent une même droite ; X et Y sont deux autres droites, dans le même plan et formant un angle droit ; supposons que les trois cercles se meuvent parallèlement à la droite Y, jusqu'à ce qu'ils touchent la droite X, et alors soient C′, D′, E′ les positions respectives qu'ont prises les centres C, D, E ; que les trois cercles C, D, E, se meuvent aussi parallèlement à la droite X, jusqu'à ce qu'ils touchent la droite Y, et soient C″, D″, E″ les positions des centres ; en désignant par D, D′, D″ les aires des triangles CDE, C′D′E′, C″D″E″, on a

$$D^2 = D'^2 + D''^2.$$

Démonstration. Prenons les droites X et Y pour axes des x et des y ; soient x', y' ; x'', y'' ; x''', y''' les coordonnées du centre C, D, E et R, R′, R″ les rayons des cercles respectifs, les coordonnées de C′, D′, E′ sont

$$x', R\ ;\ x'', R'\ ;\ x''', R''\ ;$$

et les coordonnées des points C″, D″, E″ sont

$$R, y'\ ;\ R', y''\ ;\ R'', y'''\ ;$$

soit $y = ax + b$ (1) l'équation de la droite qui touche les trois cercles C, D, E ; on a donc :

$$R = (y' - b)\cos\alpha - x'\sin\alpha\ ;\quad R' = (y'' - b)\cos\alpha - x''\sin\alpha\ ;$$
$$R'' = (y''' - b)\cos\alpha - x'''\sin\alpha.$$

α est l'angle que fait la droite (1) avec l'axe des x.

On a :

$$2D = x'y'' - x''y' + x'y''' - x'''y'' + x'''y' - y'''x'$$
$$2D' = x'R' - x''R + x''R'' - x'''R' + x'''R - R''x'$$
$$2D'' = y''R - y'R' + y'''R' - y''R'' + y'R'' - y'''R.$$

Remplaçant R, R′, R″ par leurs valeurs, on trouve :

$$D' = D\cos\alpha$$
$$D'' = -D\sin\alpha$$

d'où

$$D^2 = D'^2 + D''^2. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Remarque. Tel est le théorème énoncé sans démonstration, et qu'on peut ainsi généraliser.

II. Théorème. Soient quatre sphères C,D,E,F qui touchent le même plan; et trois plans XY, XZ, YZ rectangulaires, se coupant suivant les droites X, Y, Z ; que les quatre sphères se meuvent parallèlement à l'axe des Z jusqu'à ce qu'elles touchent le plan XY et soient alors C',D',E',F' les positions des quatre centres ; ensuite parallèlement à l'axe des Y, jusqu'à ce qu'elles touchent le plan XZ et soient alors C'',D'',E'',F'', les positions des quatre centres; et finalement que les sphères se meuvent parallèlement à l'axe des X jusqu'à ce qu'elles deviennent tangentes au plan YZ et soient C''',D''',E''',F''' les positions des quatre centres; représentons par V, V', V'', V''' les volumes des quatre pyramides

$$CDEF,\ C'D'E'F',\ C''D''E''F'',\ C'''D'''E'''F'''$$

on aura

$$V^2 = V'^2 + V''^2 + V'''^2.$$

Démonstration. Il est évident qu'on ne change pas les volumes des pyramides, en faisant mouvoir les plans XY,YZ,XZ, parallèlement à eux-mêmes; on peut donc supposer qu'ils passent tous les trois par le centre C d'une des sphères; et prenons-les pour plans des coordonnées. On peut de même admettre que les rayons des sphères soient diminués d'une longueur égale au plus petit de ces rayons; de sorte que l'une de ces sphères que nous supposons être C, se réduit à un point, l'origine. Les quatre pyramides sont

$$CDEF\ ;\ CD'E'F'\ ;\ CD''E''F''\ ;\ CD'''E'''F''';$$

soient

$$x',y',z'\ ;\ x'',y'',z''\ ;\ x''',y''',z''',$$

les coordonnées de D,E,F ;

et

$$R,R',R'',$$

les rayons des sphères ; on aura pour coordonnées de

$$\begin{array}{ll} D' \text{ coord.} & x', y', R \\ E' \ldots\ldots & x'', y'', R' \\ F' \ldots\ldots & x''', y''', R'' \end{array}$$

De plus :

$$\left.\begin{array}{l} R = x' \cos\alpha + y' \cos\beta + z' \cos\gamma \\ R' = x'' \cos\alpha + y'' \cos\beta + z'' \cos\gamma \\ R'' = x'' \cos\alpha + y''' \cos\beta + z''' \cos\gamma \end{array}\right\} \begin{array}{l} \alpha, \beta, \gamma \text{ angles du plan avec} \\ \text{les axes des } x, y, z\,; \end{array}$$

on a :

$$6V = x'y''z''' + y'z''x''' + z'x''y''' - x'z''y''' - y'x''z''' - z'y''x'''$$
$$6V' = x'y''R'' + y'x'''R' + x''y'''R - x'y'''R' - y'x''R'' - y''x'''R$$

(Voy. t. I, p. 388).

Remplaçant R, R', R'' par leurs valeurs, on trouve :

$$V = V' \cos\alpha\,;$$

et de même

$$V = V'' \cos\beta\,;\; V = V''' \cos\gamma\,;$$

donc

$$V^2 = V'^2 + V''^2 + V'''^2.$$

Tm.

LIEU GÉOMÉTRIQUE

relatif aux cordes des coniques.

—

I. *Théorème.* Si par un point situé dans le plan d'une conique on mène une corde sécante, et qu'à partir du point on porte sur la sécante une longueur égale à la corde interceptée, le lieu du point ainsi déterminé est une courbe du quatrième degré ayant le point fixe pour centre.

Démonstration. Soit l'équation de la conique à six termes; axes rectangulaires et le point fixe pour origine; soit $y + rx = 0$ l'équation de la sécante; p étant la longueur de la corde interceptée, on a :

$$p^2 (Ar^2 - Br + C)^2 = (1 + r^2)(l' - 2rx + lr^2) \text{ (t. IV, p. 592)},$$

ou $p^2 = x^2 + y^2$; $r = -\frac{y}{x}$; substituant ces valeurs, il vient pour le lieu cherché, après avoir ôté le facteur commun

$x^2 + y^2$; $(Ay^2 + Bxy + Cx^2)^2 = l'x^2 + 2rxy + ly^2$ (2);

ligne du quatrième degré ayant l'origine pour centre, qui est sur la courbe ou conjugué à la courbe.

Discussion.

1° Si le point est hors de la conique, la corde peut devenir nulle, et par conséquent la courbe passe par l'origine; si le point est dans l'intérieur, la corde ne peut s'anéantir, et l'origine est un point conjugué à la courbe;

2° Si le point est sur la conique, alors $F = 0$; $l = D^2$; $n = DE$; $l' = E^2$; et la courbe se réduit au système des deux coniques

$$(Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex)$$
$$(Ay^2 + Bxy + Cx^2 - Dy - Ex) = 0;$$

ce qui est évident à priori;

3° Si l'origine est au centre, alors

$D = E = 0$; et $l = -4AF$; $r = -2BF$; $l'^2 = 4CF$,

et l'équation se réduit à

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + \frac{F}{4} = 0,$$

conique semblable et semblablement située, et de dimensions doubles, ce qui doit être ;...

Lorsque la conique est une ellipe, $Ay^2 + Bxy + Cx^2$ ne peut jamais devenir nul ; donc, dans ce cas, la ligne du quatrième degré est fermée ; pour l'hyperbole, la courbe est infinie et a les mêmes asymptotes ; et elle est encore infinie pour la parabole, et les asymptotes sont à l'infini ;

5° pour que la courbe devienne une lemniscate, il faut que l'on ait :

$A = C$; $B = 0$; $n = 0$; $l = -b^2$; $l' = a^2$ (voy. t. IV, p. 429) ;

la conique donnée doit donc être un cercle ; on peut faire passer l'axe des x par le centre du cercle, alors $D = 0$, et par conséquent $n = 0$, et l'équation du cercle est en faisant $A = 1$,

$$y^2 + x^2 + Ex + F = 0;$$
$$l = -4F = -b^2;\ l' = E^2 - 4F = a^2;$$

d'où

$$E^2 = a^2 + b^2;\ F = \frac{b^2}{4},\ \text{et le rayon du cercle} = \frac{1}{2}a;$$

ainsi, selon une observation de M. Chasles, on peut se servir du cercle pour construire la lemniscate par points ; et si on fait $a = b$, alors

$$\frac{1}{2}E = \frac{1}{2}a\sqrt{2};$$

ainsi, la distance du point fixe au centre du cercle qui sert à décrire la lemniscate de Bernoulli est égale à la corde du quadrant.

6° Passant aux coordonnées polaires, on a :

$$z^2(A\sin^2\varphi + B\sin\varphi\cos\varphi + C\cos^2\varphi)^2 =$$
$$= l'\cos^2\varphi + 2n\sin\varphi\cos\varphi + l\sin^2\varphi;$$

égalant le second membre à zéro, on a :

$$\tang \varphi = \frac{-n \pm \sqrt{n^2 - ll'}}{l} = \frac{-n \pm 2\sqrt{FL}}{l};$$

or, lorsque le point fixe est hors de la conique, FL est positif; les deux valeurs de tang φ répondent aux rayons vecteurs passant par le centre tangentiellement à la courbe;

7° En comparant l'équation (2) avec l'équation (2) de la page 427 (t. IV), on voit que le lieu géométrique ne peut devenir une aplanétique que lorsque $A = C$ et $B = 0$; toute ligne du quatrième degré dont le terme du quatrième degré est divisible par $y^2 + x^2$, le quotient renfermant encore y^2 et x^2 avec les mêmes coefficients, est une aplanétique.

II. *Théorème.* Par un point situé dans le plan d'une conique, on ne peut mener plus de quatre cordes égales.

Démonstration. Prenons le point pour origine et les axes rectangulaires; $y = rx$ étant l'équation de la corde et p sa longueur, on aura, en ordonnant l'équation (1) par rapport à r :

$$r^4(A^2p^2 - l) + 2r^3(ABp^2 + n) + r^2(B^2p^2 + 2ACp^2 - l' - l) - \\ - 2r(BCp^2 + n) + C^2p^2 - l' = 0,$$

équation du quatrième degré.

On peut prendre les axes conjugués; alors $B = 0$, et l'équation devient :

$$r^4(A^2p^2 - l) - 2nr^3 + r^2(2ACp^2 - l' - l) - \\ - 2rn + C^2p^2 - l' = 0;$$

ou bien :

$$r^4 - A_1 r^3 + A^2 r^2 - A_1 r + A_3 = 0.$$

1° $A^2p^2 - l = 0$, l'équation se réduit au troisième degré, de même si $C^2p^2 - l' = 0$;

2° Si $n = 0$, l'équation est ramenée au second degré;

3° Si $A^2p^2 - l = C^2p^2 - l'$, l'équation devient réciproque.

Tm.

THÉORIE GÉNÉRALE DES ÉPICYCLES.

Traduit de l'allemand de L. Raabe (Journ. de Crelle, t. I, p. 283).

—

1. Soit un cercle fixe; si le centre d'un cercle se meut sur la circonférence du centre fixe, le second cercle se nomme *épicycle*. Si, de plus, le centre d'un troisième cercle se meut sur la circonférence du premier épicycle, ce troisième cercle se nomme *second épicycle*, et ainsi de suite; de sorte que le $(n+1)^{ème}$ cercle est le $n^{ème}$ épicycle.

Si l'on admet de plus que le $n^{ème}$ épicycle est parcouru par un point, il s'agit de trouver la ligne décrite par ce point.

2. Nous désignerons les divers cercles par (0), (1) .... (n); r_0, r_1 .... r_{n+1} sont les rayons de ces cercles.

De sorte que (0) est le cercle fixe; (1) le premier épicycle, etc.

Prenons le centre du cercle (0) pour origine des coordonnées rectangulaires x, y, z.

Soient n_0, n_1, n_2,.... n_n, les inclinaisons respectives constantes des cercles (0) .... $(n+1)$ sur le plan des xy;

k_0, k_1, k_2, ... k_n, les angles constants que forment les traces de ces plans sur le plan xy, avec l'axe des x;

α_0, α_1, α_2, ... α_n, les angles variables de ces traces, à une époque donnée, avec les rayons allant aux centres mobiles r_0, r_1, ... r_n;

Enfin, x_0, y_0, z_0; x_1, y_1, z_1, les coordonnées des centres, extrémités de ces rayons.

3. Les formules de la trigonométrie sphérique donnent :

$$x_0 = r_0 [\cos\alpha_0 \cos k_0 + \sin\alpha_0 \sin k_0 \cos n_0],$$
$$y_0 = r_0 [\cos\alpha_0 \sin k_0 - \sin\alpha_0 \cos k_0 \cos n_0],$$
$$z_0 = r_0 \sin\alpha_0 \sin n_0,$$
$$x_1 - x_0 = r_1 [\cos\alpha_1 \cos k_1 + \sin\alpha_1 \sin k_1 \cos n_1],$$
$$y_1 - y_0 = r_1 [\cos\alpha_1 \sin k_1 - \sin\alpha_1 \cos k_1 \cos n_1],$$
$$z_1 - z_0 = r_1 \sin\alpha_1 \sin n_1,$$
etc.

Faisons :

$$\tang A_s = \frac{\cot k_s}{\cot n_s}; \quad \sin a_s = \frac{\cos k_s}{\sin A_s};$$

s ayant les valeurs depuis $s = 1$ jusqu'à $s = n$,

$$\tang B_s = -\frac{\tang k_s}{\cos n_s}; \quad \sin b_s = \frac{\sin k_s}{\sin B_s};$$
$$\tang C_s = 0, \qquad \sin c_s = \sin n_s.$$

On déduit de ces équations :

$$x_n = r_0 \sin a_0 \sin(A_0 + \alpha_0) + r_1 \sin a_1 \sin(A_1 + \alpha_1) \ldots$$
$$\ldots + r_n \sin a_n \sin(A_n + \alpha_n).$$

Changeant a en b et A en B, on a la valeur de y_n ; changeant a en c et A en C, on obtient la valeur de z_n.

4. Soient V_0, V_1, V_2.... les vitesses de r_0, r_1, r_2...., et V_n la vitesse du point dans le dernier épicycle, on aura :

$$\frac{V_s}{V_0} = \frac{r_s \dfrac{d\alpha_s}{dt}}{r_0 \dfrac{d\alpha_0}{dt}};$$

faisant $g_s = \frac{r_0}{r_s} \frac{V_s}{V_0}$, il vient $\frac{d\alpha_s}{dt} = g_s \frac{d\alpha_0}{dt}$; si les mouvements sont uniformes, g_s est constant, et l'on a :

$$\alpha_s = g_s \alpha_0 + B_s;$$

B_s étant la valeur de α_s et simultanée à celle α_0.

Substituant ces valeurs dans celles de x_n, y_n, z_n, il vient :

$$\left.\begin{aligned}
x_n &= r_0 \sin a_0 \sin(A_0 + \alpha_0) \\
&\quad + r_1 \sin a_1 \sin(A_1 + \beta_1 + g_1\alpha_0) \\
&\quad\ \vdots \\
&\quad + r_n \sin a_n \sin(A_n + \beta_n + g_n\alpha_0) \\
y_n &= r_0 \sin b_0 \sin(B_0 + \alpha_0) \\
&\quad + r_1 \sin b_1 \sin(B_1 + \beta_1 + g_1\alpha_0) \\
&\quad\ \vdots \\
&\quad + r_n \sin b \sin(B_n + \beta_n + g_n\alpha_0) \\
z_n &= r_0 \sin c_0 \sin(C_n + \alpha_0) \\
&\quad\ r_1 \sin c_1 \sin(C_1 + \beta_1 + g_1\gamma_0) \\
&\quad\ \vdots \\
&\quad + r_n \sin c_n \sin(C_n + \beta_n + g_n\alpha_0)
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Par l'élimination de α_0 on obtient les équations des projections de la courbe décrite sur les plans coordonnés.

Observation. Les quantités C_0, C_1, C_2 .... sont nulles, et ne sont introduites que pour la symétrie des formules.

5. 1[er] *cas particulier* (*). Soit $g_s = 1$; s quelconque.

Faisons :

$$A = r_0 \sin a_0 \sin A_0 + r_1 \sin a_1 \sin(A_1 + \beta_1) + \ldots. r_n \sin a_n \sin(A_n + \beta_n),$$
$$A' = r_0 \sin a_0 \cos A_0 + r_1 \sin a_1 \cos(A_1 + \beta_1) + \ldots. r_n \sin a_n \cos(A_n + \beta_n).$$

Changeant a, A successivement en b et B et ensuite en c et C, on obtient B, B'; C, C'. Ainsi l'on a :

$$x_n = A \cos\alpha_0 + A' \sin\alpha_0,$$
$$y_n = B \cos\alpha_0 + B' \sin\alpha_0,$$
$$z_n = C \cos\alpha_0 + C' \sin\alpha_0.$$

Eliminant α_0 et faisant $A^2 + A'^2 = D^2$; $BA + A'B' = D^2E$; $CA + A'C' = F'D^2$; $A'B + AB' = FD^2$; $A'C + AC' = E'D^2$, il vient, en supprimant l'indice n :

(*) Cette supposition revient à dire que les vitesses des centres sont proportionnelles aux rayons des épicycles. Tm.

$$y = \mathrm{E}x \pm \mathrm{F}\sqrt{\mathrm{D}^2 - x^2}\,;\quad z = \mathrm{E}'x \pm \mathrm{F}'\sqrt{\mathrm{D}^2 - x^2}.$$

Faisant tourner le plan xy autour de l'axe des x d'une quantité φ, et prenant ce plan pour celui des x', y', et les nouvelles coordonnées étant toujours rectangulaires, on a :

$$x = x'\,;\ y = y'\cos\varphi + z'\sin\varphi\,;\ z = z'\cos\varphi - y'\sin\varphi.$$

Les équations de la courbe deviennent :

$$y' = x'\,[\mathrm{E}\cos\varphi - \mathrm{E}'\sin\varphi] \pm (\mathrm{F}\cos\varphi - \mathrm{F}'\sin\varphi)\sqrt{\mathrm{D}^2 - x'^2},$$

$$z' = x'\,[\mathrm{E}\sin\varphi + \mathrm{E}'\cos\varphi] \pm (\mathrm{F}\sin\varphi + \mathrm{F}'\cos\varphi)\sqrt{\mathrm{D}^2 - x'^2}.$$

Faisons $\mathrm{F}\sin\varphi + \mathrm{F}'\cos\varphi = 0$, φ est réel ; posant $\mathrm{F}^2 + \mathrm{F}'^2 = \mathrm{G}$, $\mathrm{EF} + \mathrm{E}'\mathrm{F}' = \mathrm{GI}$, $\mathrm{E}'\mathrm{F} - \mathrm{F}'\mathrm{E} = \mathrm{G}'\mathrm{I}$, il vient :

$$y' = \mathrm{I}x' \pm \mathrm{G}\sqrt{\mathrm{D}^2 - x'^2}\,;\quad z' = \mathrm{I}'x'\,;$$

ainsi la courbe est plane.

Faisant tourner l'axe des x' d'une quantité ψ, dans le plan des $x'z'$, on aura :

$$x' = x''\cos\psi + z''\sin\psi\,;\ y' = y''\,;\ z' = z''\cos\psi - x''\sin\psi\,;$$

d'où

$$x'' = \frac{(1 - \mathrm{I}'\operatorname{tang}\psi)\,[\mathrm{I}y'' \pm \mathrm{G}\sqrt{\mathrm{D}^2(\mathrm{I}^2 + \mathrm{G}^2) - y''^2}}{[\cos\psi\,(1 - \mathrm{I}'\operatorname{tang}\psi) + \sin\psi\,(\mathrm{I} + \operatorname{tang}\psi)]\,(\mathrm{I}^2 + \mathrm{G}^2)}\,;$$

$$z'' = \frac{x''(\mathrm{I}' + \operatorname{tang}\psi)}{1 - \mathrm{I}'\operatorname{tang}\psi}.$$

Faisons $\operatorname{tang}\psi + \mathrm{I}' = 0$, et $\mathrm{D}^2(\mathrm{I}^2 + \mathrm{G}^2) = \mathrm{K}^2$,

$$\mathrm{I}\sqrt{1 + \mathrm{I}'^2} = \mathrm{L}\,(\mathrm{I}^2 + \mathrm{G}^2)\,;\ \mathrm{G}\sqrt{(1 + \mathrm{I}^2)} = \mathrm{M}\,(\mathrm{I}^2 + \mathrm{G}^2)\,;$$

on a pour équation de la courbe :

$$x'' = \mathrm{L}y'' \pm \mathrm{M}\sqrt{\mathrm{K}^2 - y''^2}.$$

Faisant tourner l'axe des x'' d'une quantité θ, dans le plan de $x''y''$, on a :

$$x''' = x''\cos\theta + y''\sin\theta,$$

$$y''' = x''\cos\theta - y''\sin\theta.$$

Prenant $\operatorname{tang}\theta = \dfrac{1 - L^2 - M^2 \pm \sqrt{(1 - L^2 - M^2)^2 + 4L^2}}{2L}$,

et faisant

$$a = \frac{KM}{\sqrt{(\cos\theta - L\sin\theta)^2 + M^2\sin^2\theta}}\,;\quad b = \frac{KM}{\sqrt{(\sin\theta + L\cos\theta)^2 + M^2\cos^2\theta}}\,;$$

on a finalement :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,,$$

ellipse ayant a et b pour demi-axes principaux.

Note du traducteur. Prenant les valeurs de $\sin\alpha$ et $\cos\alpha$ dans les valeurs de x et y, et les substituant dans celle de z, on a une équation linéaire entre les coordonnées x, y, z ; donc la courbe est plane. Or la projection sur un plan des coordonnées est une ellipse (*voir* lemme, p. 191) ; donc la courbe dans l'espace est une ellipse.

2^{me} *cas.* Si, conservant les données précédentes, on suppose que tous les cercles sont dans le même plan, alors

$$n_s = 0\,;\ k_s = 0,$$

et on trouve pour l'équation du dernier point mobile :

$$\begin{array}{ll} x = N\cos\alpha_0 + N'\sin\alpha_0\,; & N = r_0 + r_1\cos\beta_1 + \ldots r_n\cos\beta_n \\ y = -N\sin\alpha_0 + N'\cos\alpha_0 & N' = \phantom{r_0 +{}} r_1\sin\beta_1 + \ldots r_n\sin\beta_n \end{array}$$

d'où l'on déduit :

$$y^2 + x^2 = N^2 + N'^2\,;$$

équation d'un cercle.

3^{me} *cas.* Si, conservant $g_s = 0$; on a soit $A = B = C = 0$; ou bien

$$A' = B' = C' = 0\,;$$

ou encore

$$A = A'\,;\ B = B'\,;\ C = C'\,;$$

la ligne décrite, par mouvement de va-et-vient, est une droite.

6. La théorie des épicycles était indispensable aux anciens. Nous allons d'abord exposer leurs hypothèses sur le système planétaire, et ensuite nous chercherons, d'après la théorie que nous venons d'exposer, si ces hypothèses peuvent tenir lieu de la réalité.

L'opinion des anciens était : la terre est en repos au centre du monde ; toutes les planètes tournent, le soleil compris, décrivent des cercles, autour de la terre comme centre. Même avec l'état des instruments d'alors, les hypothèses ne s'accordaient pas avec les observations, mais partie par prévention pour les mouvements circulaires, partie aussi pour donner une application plus claire des rétrogradations des planètes, ils imaginèrent un second cercle, dont le centre se mouvait sur le premier cercle, et tandis que la planète elle même se mouvait dans ce second cercle, qu'ils nommaient épicycle.

Cette hypothèse ne satisfaisant pas encore aux observations, ils donnèrent à la terre une position excentrique dans le premier cercle ; ce qui revient, comme on sait, à laisser la terre au centre, et à faire mouvoir la planète sur un second épicycle ; il y en a même qui adaptèrent un troisième épicycle, et on pouvait multiplier ces cercles indéfiniment ; mais tous ces cercles étaient toujours supposés dans le même plan.

Pour comparer ces hypothèses avec la réalité, nous devons d'abord rapporter les formules relatives aux mouvements géocentriques des planètes.

Fixons l'origine des coordonnées rectangulaires au centre du soleil, et prenons l'orbite terrestre ou l'écliptique pour plan xy ; et pour axe des x la ligne des nœuds de la planète que l'on considère comme ayant pour coordonnées x, y, z, et soient X.Y. les coordonnées de la terre ; r et R les rayons vecteurs de la planète et de la terre ; u et U les angles de r avec l'axe des x et de R avec la ligne équinoxiale ; n inclinaison de l'orbite ; K la longitude du nœud ascendant ou l'angle de l'axe des x avec la ligne équinoxiale ; on a donc :

$$\begin{array}{ll} x = r\cos u & X = R\cos(U-K) \\ y = r\sin u\cos n & Y = R\sin(U-K) \\ z = r\sin u\sin n & \end{array}$$

transportant l'origine au centre de la terre, et appelant x', y', z' les nouvelles coordonnées de la planète, on aura :

$$\left.\begin{array}{l} x' = r\cos u - \quad R\cos(U-K) \\ y' = r\sin u\cos n - R\sin(U-K) \\ z' = r\sin u\sin n. \end{array}\right\} \quad (2).$$

Mais la planète et la terre décrivant des ellipses, l'on a :

$$r = \frac{f}{1-\cos e(u-h)}; \; R = \frac{F}{1-E\cos(U-H)};$$

f, e, h, F, E, H sont des quantités connues ; éliminant entre ces cinq équations, r, R, u, U, on obtient une équation entre les trois inconnues x', y', z' ;

Nous concluons de là que les lieux géocentriques des planètes se trouvent sur une certaine surface courbe. Si on voulait donc substituer les équations (1) des § 4 aux équations (2), pour déterminer les lieux géocentriques des planètes, c'est-à-dire, si on voulait se servir d'un mouvement épicyclique au lieu de celui qui a réellement lieu autour du soleil, mais vu de la terre, alors les considérations précédentes, montrent qu'une telle hypothèse ne peut subsister.

Le mouvement apparent du soleil pourrait se remplacer par un mouvement épicyclique ; car, le soleil, vu de la terre, se meut suivant une ellipse ; mais l'hypothèse adoptée par les anciens, que tous les cercles sont dans un même plan, ne peut produire que le cercle et exclut l'ellipse ; ainsi les hypothèses épicycliques ne peuvent même servir à expliquer le mouvement apparent du soleil.

Note du traducteur. Cette dernière raison est applicable aussi aux autres planètes, et suffit pour exclure l'hypothèse épicyclique ; car la première raison que donne l'auteur ne me paraît pas concluante ; de ce que la trajectoire géocentrique se trouve sur une surface de degré quelconque, il ne s'ensuit pas qu'elle ne puisse être une ellipse.

NOTE

Sur la détermination du rapport de la circonférence au diamètre, par la méthode des isopérimètres.

PAR M. JUBÉ (EUGÈNE),
Professeur de mathématiques spéciales au collége royal de Saint-Omer.

—

Quand on cherche à déterminer le rapport de la circonférence au diamètre par la méthode des isopérimètres, il me semble qu'on arrive plus promptement à une approximation donnée que lorsqu'on emploie la méthode des périmètres ou celle des surfaces.

On reconnaît d'abord immédiatement que la circonférence qui est égale au périmètre d'un polygone régulier donné a son rayon compris entre ceux des cercles auxquels le polygone peut être inscrit et circonscrit.

Soient r,R les rayons des cercles inscrit et circonscrit à un polygone régulier de p côtés, et égaux chacun à A : ceux du polygone régulier de même périmètre, dont le nombre des côtés est double, seront, comme on sait,

$$r' = \frac{1}{2}(R+r),\ R' = \sqrt{R.r'},$$

et au moyen de ces formules on peut calculer les valeurs de ces rayons pour un polygone régulier isopérimètre, ayant $2^n.p$ côtés. Nommons les r_n, R_n.

A mesure que le nombre des côtés augmente, les rayons des cercles inscrits augmentent, et ceux des cercles circonscrits diminuent ; on voit en outre que les polygones ayant des angles de plus en plus grands, et des côtés de plus en plus petits, s'approchent de la circonférence qui leur est isopérimètre.

En nommant ρ le rayon de celle-ci, on aura toujours quel que soit n, $R_n > \rho > r_n$. Mais on peut prendre n assez grand pour que $R_n - r_n$ soit plus petit que toute quantité donnée. Car si a représente le côté du polygone régulier,

$$R^2_n - r^2_n = \frac{a^2}{4},$$

d'où

$$R_n - r_n = \frac{a^2}{4(R_n + r_n)},$$

expression dont le numérateur a pour limite 0, et le dénominateur 8ρ.

Quand on prendra R_n ou r_n pour valeur de ρ, l'erreur commise sera moindre que $\frac{a^2}{4(R_n + r_n)}$, et comme $a = \frac{A}{2^n}$, pour avoir une approximation à moins de $\frac{1}{10^m}$, il faut que n satisfasse à la condition

$$\frac{A^2}{2^{2n}.4(R_n + r_n)} < \frac{1}{10^m}.$$

Comme $R_n > r_n > r$ on pourra poser :

$$\frac{A^2}{2^{2n}\,8r} \overset{=}{<} \frac{1}{10^m}.$$

Supposons maintenant que A soit le côté d'un hexagone régulier, et prenons ce côté pour unité ; nous aurons :

$$R = 1,\ r = \sqrt{\frac{3}{4}},$$

de sorte qu'on devra avoir :

$$\frac{1}{2^{2n}.8\sqrt{\frac{3}{4}}} \overset{=}{<} \frac{1}{10^m} \text{ et } n \overset{=}{>} \frac{m - L8\sqrt{\frac{3}{4}}}{2L.2}.$$

Mais comme $\sqrt{\frac{3}{4}} > \frac{1}{2}$, il suffira d'avoir $n \overset{=}{>} \frac{m - L.4}{L.4}$,

et puisque $L.4 > 0{,}6$, on pourra prendre :

$$n \overset{=}{>} \frac{m}{0{,}6} - 1 \quad \text{ou} \quad \frac{5}{3}m - 1.$$

En donnant à n cette valeur, on sera certain d'avoir dans l'évaluation de ρ les $m - 1$ premiers chiffres exacts, et le m^e fautif au plus d'une unité. Pour avoir le rapport de la circonférence au diamètre, il faudra diviser le demi-périmètre 3 par cette valeur de ρ, et on sait qu'alors le quotient a autant de chiffres exacts qu'il y en a dans ρ. Le rapport π sera donc calculé à moins de $\frac{1}{10^m}$.

Pour arriver à cette approximation il aura donc fallu considérer n polygones outre le premier. Ce nombre est inférieur à celui que donne la méthode des périmètres ou celle des surfaces (*Voir* page 160, tome IV), et en outre les formules auxquelles conduisent ces dernières méthodes sont moins commodes à calculer que celles dont nous avons fait usage.

NOTE

Sur une question géométrique de maximum.

PAR M. A. VACHETTE,
licencié ès sciences.

—

1. On a (*fig.* 9) deux parallèles $\begin{matrix}PQ\\P'Q'\end{matrix}$, et deux points $\begin{matrix}A\\B\end{matrix}$ situés hors de ces parallèles et de côtés différents ; on demande de trouver le plus court chemin de A en B, par une ligne brisée AMNB, telle que la portion MN interceptée entre les deux parallèles soit donnée en direction.

Puisque la portion MN est donnée en direction par l'angle V qu'elle fait avec les parallèles, elle l'est aussi en grandeur, et nous pouvons poser $MN = a$. Si on projette $\begin{matrix}A\\B\end{matrix}$ sur $\begin{matrix}PQ\\P'Q'\end{matrix}$ en $\begin{matrix}A'\\B'\end{matrix}$, en posant $A'M = x$, il suffira de trouver x pour résoudre la question : si on pose $NB' = y$, et qu'on prenne x pour variable indépendante, y en sera une fonction. On connaît $A'B' = b$; et l'on peut poser $\begin{matrix}AA' = p\\BB' = q\end{matrix}$.

La question revient à chercher le minimum (elle ne comporte pas évidemment de maximum) de $AM + NB$, puisque MN est constant, ou de la fonction $\sqrt{p^2+x^2} + \sqrt{q^2+y^2}$. Il s'agit de trouver y en fonction de x, ou une relation entre x et y.

Or, dans le trapèze MB'NA', une relation connue donne

$$\overline{MN}^2 + \overline{A'B'}^2 = \overline{MB'}^2 + \overline{NA'}^2 + 2MA'.B'N,$$

d'ailleurs

$$\overline{MB'}^2 = a^2 + y^2 - 2ay \cos V,$$
$$\overline{NA'}^2 = a^2 + x^2 - 2ax \cos V;$$

et en substituant, il vient :

$$a^2 + b^2 = 2a^2 + x^2 + y^2 - 2(x+y)a\cos V + 2xy,$$

d'où l'on déduit aisément :

$$(1) \qquad x + y = a\cos V \pm \sqrt{b^2 - a^2\sin^2 V},$$

relation cherchée entre x et y.

On sait d'ailleurs que pour trouver le maximum de $F(x,y)$ quand on a $f(x,y) = 0$, et que x est variable indépendante, il faut égaler à 0 la dérivée totale de la fonction F, éliminer $\frac{dy}{dx}$ entre l'équation qui en résulte, et la dérivée totale de la fonction f qui est identiquement nulle; ce qui donne une nouvelle relation entre x et y, qui, jointe à la première, peut servir à déterminer les variables.

Ici :

$$F(x,y) = \sqrt{x^2 + p^2} + \sqrt{y^2 + q^2}.$$

On aura donc :

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+p^2}} + \frac{y}{\sqrt{y^2+q^2}}\,\frac{dy}{dx} = 0,$$

d'ailleurs en différentiant (1), on obtient :

$$1 + \frac{dy}{dx} = 0;$$

et la nouvelle relation est alors

$$(2) \qquad \frac{x}{y} = \frac{\sqrt{x^2+p^2}}{\sqrt{y^2+q^2}}.$$

Au lieu de chercher les valeurs de $\frac{x}{y}$ au moyen des équations (1) et (2), on remarque que, si on élève au carré, on aura :

$$\frac{x^2}{y^2}=\frac{x^2+p^2}{y^2+q^2}=\frac{p^2}{q^2};$$

donc on a :

$$\frac{p}{q}=\frac{x}{y}=\frac{\sqrt{x^2+p^2}}{\sqrt{y^2+q^2}};$$

et par conséquent les triangles $\left\{\begin{matrix}\text{AMA}'\\ \text{ANB}'\end{matrix}\right.$ sont semblables, ce qui nécessite le parallélisme de AM et de NB.

Il est d'ailleurs facile de trouver maintenant x et y, au moyen de $\frac{x}{y}=\frac{p}{q}$, et de l'équation (1).

2. La question peut se résoudre sans calcul.

Problème I. Construire un parallélogramme dont on connaît deux sommets opposés, et l'un des côtés en grandeur et en direction.

En menant par chaque sommet une droite indéfinie parallèle à la direction donnée, et portant sur cette droite dans les deux sens la longueur donnée à partir du sommet, on aura quatre parallélogrammes équivalents, non superposables, satisfaisant à la question.

Théorème I. Si on coupe un parallélogramme ABCD (*fig.* 10) par deux droites parallèles, l'une des diagonales KL du parallélogramme d'intersection IKML, est parallèle aux côtés $\begin{matrix}\text{AB}\\ \text{CD}\end{matrix}$, si toutefois AB est égal à la longueur QR inscrite entre les parallèles $\begin{matrix}\text{PQ}\\ \text{P}'\text{Q}'\end{matrix}$ parallèlement à AB.

En effet, si KL n'était pas parallèle à AB, en menant KG parallèle à AB, on aurait KG $=$ AB, mais

$$\text{KH}=\text{QR}=\text{AB},$$

ce qui serait absurde.

Problème II. Étant données deux parallèles $\begin{matrix}\text{PQ}\\ \text{P}'\text{Q}'\end{matrix}$ (*fig.* 11), et deux points $\begin{matrix}A\\B\end{matrix}$ de côtés différents en dehors de ces parallèles, on peut toujours mener de A en B un chemin brisé AMNB, de façon que la portion MN interceptée entre les parallèles, ait une direction donnée, et que les portions $\begin{matrix}AM\\BN\end{matrix}$ soient parallèles.

Par A on mène AD égale et parallèle à M'N', par B on mène BC égale et parallèle à M'N'; d'après le théorème I, MN est égale et parallèle à M'N', et le chemin AMNB satisfait à la question, en vertu du problème I, il y aura deux chemins satisfaisant à la question : c'est d'ailleurs ce qu'indique la solution analytique.

Mais de ces deux chemins, le premier AMNB va du point A à la première parallèle PQ, et du point B à la deuxième P'Q', le second AM''N''B va du point A à la deuxième parallèle P'Q', et du point B à la première PQ.

Les deux autres parallélogrammes du problème I, ayant AB pour un de leurs côtés, ne peuvent satisfaire au problème actuel.

Théorème II. Tout chemin brisé AMNB tel que MN ait une direction donnée, et que $\begin{matrix}AM\\BN\end{matrix}$ soient parallèles, est plus court qu'un chemin brisé AM'N'B, dont la portion M'N' a la direction de MN.

En effet, menons BG (*fig.* 12) égale et parallèle à M'N', le chemin AM'GB est égal au chemin AM'N'B. MG étant dès lors parallèle à NB, est le prolongement de AM, et le chemin AMGB est égal au chemin AMNB. Or AMGB est évidemment plus petit que AM'GB, ce qu'il fallait prouver.

Note. Il serait intéressant de résoudre ce problème, qui a une application dans la dioptrique, pour un système quelconque de droites. Tm.

NOTE

Sur la résolution des équations trigonométriques.

PAR M. GUILMIN,
Ancien élève de l'École normale.

I. En cherchant l'une des lignes trigonométriques de l'arc $\frac{a}{n}$, en fonction de la même ligne de l'arc a, n étant un nombre entier, on est conduit à résoudre une équation du degré n au moins ; cependant une seule racine de l'équation convient pour la n^e partie de l'arc donné a. Comment distinguer cette racine pour ne s'occuper que de sa détermination ?

On peut observer la règle suivante, évidemment applicable à toutes les lignes trigonométriques.

Supposons qu'il s'agisse de trouver le sinus de $\frac{324^\circ}{9}$, connaissant le sinus de 324°.

Une discussion connue nous apprend que les racines de l'équation du neuvième degré à laquelle on parvient, sont les sinus de neuf arcs formant une progression arithmétique dont le premier terme est $\frac{324^\circ}{9} = 36^\circ$, et la raison $\frac{2\pi}{9} = 40^\circ$. Ces arcs sont donc

$$36^\circ,\ 76^\circ,\ 116^\circ,\ 156^\circ,\ 196^\circ, 236^\circ,\ 276^\circ,\ 316^\circ,\ 356^\circ.$$

Je les ramène au premier quadrant ; ce qui donne pour leurs sinus

$$\begin{array}{lll} \sin 36^\circ; & \sin 156^\circ = \sin 24^\circ; & \sin 276^\circ = -\sin 84^\circ \\ \sin 76^\circ; & \sin 196^\circ = -\sin 16^\circ; & \sin 316^\circ = -\sin 44^\circ \\ \sin 116^\circ = \sin 64^\circ; & \sin 236^\circ = -\sin 56^\circ; & \sin 356^\circ = -\sin 4^\circ. \end{array}$$

Ce tableau fait voir que l'équation du neuvième degré doit avoir dans notre exemple quatre racines positives, dont l'une est le sinus de $\frac{324^\circ}{9}$ ou 36°. Cet arc est le deuxième dans l'ordre de grandeur parmi les arcs du premier quadrant qui correspondent à ces racines. On calculera donc pour sin 36° la deuxième des racines positives de l'équation trouvée et séparées dans l'ordre des grandeurs croissantes.

II. Prenons pour deuxième exemple la recherche de tang. $\frac{a}{6}$ en fonction de tang. a. On arrive à une équation du sixième degré, dont les racines correspondent à six arcs, formant une progression arithmétique dont le premier terme est $\frac{a}{6}$, et la raison $\frac{\pi}{6}$ ou 30°.

Soit

$$a = 306^\circ;\ \frac{a}{6} = 51^\circ;$$

Les arcs indiqués sont ici

$$51^\circ,\ 81^\circ,\ 111^\circ,\ 141^\circ,\ 171^\circ,\ 201^\circ.$$

Je les ramène au premier quadrant ; ce qui donne en considérant la tangente

$$\begin{array}{ll} \text{tg. } 51^\circ; & \text{tg. } 141^\circ = -\text{tg. } 39^\circ \\ \text{tg. } 81^\circ; & \text{tg. } 171^\circ = -\text{tg. } 9^\circ \\ \text{tg. } 111^\circ = -\text{tg. } 69^\circ; & \text{tg. } 201^\circ = \text{tg. } 21^\circ. \end{array}$$

Ce tableau nous apprend que l'équation trouvée du sixième degré a trois racines positives, et trois négatives. Les trois racines positives correspondent aux arcs, dont la tangente ne change pas de signe, quand on les ramène au premier quadrant. 51° est l'un de ces arcs, et il est le deuxième, par ordre de grandeur, parmi les arcs du premier quadrant ainsi obtenus; sa tangente est donc la deuxième dans l'ordre des grandeurs des racines positives de l'équation du sixième degré.

III. La même méthode sert à déterminer la racine convenable dans les questions de ce genre. Trouver $\cos \frac{3}{7} a$, connaissant $\cos a$.

Je vais indiquer d'abord la marche à suivre pour trouver l'équation du problème. Soit posé $\cos 3 \frac{a}{7} = x$.

On a d'abord

$$\cos 3a = 4 \cos^3 a - 3 \cos a = b'.$$

On emploie ensuite la formule de Moivre qui donne $\cos 7a$ en fonction de $\cos a$, ou bien $\cos a$ en fonction de $\cos \frac{a}{7}$; on a ainsi une équation

$$b' = f(x). \qquad (1)$$

du septième degré en x, et dont toutes les racines sont réelles. En répétant une discussion connue, on trouverait que ces racines correspondent à sept arcs, formant une progression arithmétique dont le premier terme est $\frac{3a}{7}$, et la raison $\frac{2\pi}{7}$. Il suffit de bien remarquer que le cosinus b' est le cosinus de $3a$, ou de $2n\pi \pm 3a$.

Soit

$$a = 294°; \frac{3a}{7} = 126°, \frac{2\pi}{7} = 51° \frac{3}{7}.$$

Les sept termes de la progression arithmétique indiquée sont :

$$126^\circ,\ 177^\circ\frac{3}{7},\ 228^\circ\frac{6}{7},\ 280^\circ\frac{2}{7},\ 331^\circ\frac{5}{7},\ 383^\circ\frac{1}{7},\ 434^\circ\frac{4}{7}.$$

Je les ramène au premier quadrant, et je trouve en considérant le cosinus

$$\begin{aligned}
\cos 126^\circ &= -\cos 54^\circ \\
\cos 177^\circ\tfrac{3}{7} &= -\cos\ 2^\circ\tfrac{4}{7} \\
\cos 228^\circ\tfrac{6}{7} &= -\cos 48^\circ\tfrac{6}{7} \\
\cos 280^\circ\tfrac{2}{7} &= \cos 79^\circ\tfrac{5}{7} \\
\cos 331^\circ\tfrac{5}{7} &= \cos 28^\circ\tfrac{2}{7} \\
\cos 383^\circ\tfrac{1}{7} &= \cos 23^\circ\tfrac{1}{7} \\
\cos 434^\circ\tfrac{4}{7} &= \cos 74^\circ\tfrac{4}{7}.
\end{aligned}$$

L'équation $b' = f'(x)$ a trois racines négatives, et quatre positives ; le cosinus de 126° est une des premières, la plus petite des trois en valeur absolue; on séparera donc les racines négatives de l'équation, et on calculera la plus petite des trois.

Il peut arriver dans un pareil calcul que l'expression de l'arc multiple ma, contienne sous un radical carré la ligne trigonométrique de l'arc simple a.

Soit, par exemple, à trouver $\sin\frac{ma}{n}$ étant donné $\sin a$ $\left(\frac{m}{n}\right.$ peut toujours être supposée irréductible$\left.\right)$. Il peut se présenter trois cas : 1° m et n impairs; ex. : $\frac{5}{7}a$. 2° m impair, n pair ; ex. : $\frac{5}{6}a$. 3° m pair et n impair ; ex. : $\frac{4a}{7}$.

1^er *cas*. Trouver $\sin\frac{5}{7}a$ connaissant $\sin a = b$.

On calculera $\sin 5a = f(b) = b'$ d'après la formule de Moivre. Puis on emploiera celle qui donne $\sin a$ en fonction de $\sin\frac{a}{7}$, en observant que $5\frac{a}{7}$ est le 7^e de $5a$. Si donc on pose $5a = a'$, le problème proposé revient maintenant à celui-ci : Connaissant $\sin a' = b'$, trouver $\sin\frac{a'}{7} = x$.

L'équation du problème sera du 7^e degré.

La discussion se ferait absolument comme pour $\frac{a}{7}$. Les racines correspondent à 7 arcs formant une progression arithmétique dont le premier terme est $\frac{5a}{7}$ et la raison $\frac{2\pi}{7}$.

2^e *cas*. Trouver $\sin\frac{5a}{6}$, étant donné $\sin a$.

Le calcul de $\sin 5a$ en fonction de $\sin a$ par la formule de Moivre ne donne qu'une valeur b'; en employant cette valeur, toujours d'après la méthode de Moivre, pour trouver $\sin\frac{5a}{6}$, on arrive à une équation

$$b' = f(x)$$

du 12^e degré. La discussion servant à déterminer les arcs correspondants aux racines se ferait comme pour $\frac{a}{6}$; il suffit d'observer, en posant $5a = a'$, que connaissant $\sin 5a$, ou $\sin a' = b'$, on cherche $\sin\frac{a'}{6}$.

3^e *cas*. Trouver $\sin\frac{4}{7}a$, connaissant $\sin a = b$.

On cherchera d'abord $\sin 4a$ au moyen de la formule de Moivre :

$$\begin{aligned}\sin 4a &= 4\sin a\cos^3 a - 2\sin^3 a\cos a\,,\\ &= (4\sin a - 6\sin^3 a)\cos a\,,\\ &= \pm\sqrt{1-\sin^2 a}\,(4\sin a - 6\sin^3 a)\,;\end{aligned}$$

ou bien

$$\sin 4a = \pm\sqrt{1-b^2}\,(4b - 6b^3) = \pm b'.$$

Pour continuer le calcul, il faudra employer successivement l'une et l'autre de ces valeurs pour trouver $\sin\frac{1}{7}4a$, d'après la formule de Moivre, qui donne $\sin a$ en fonction de $\sin\frac{a}{7}$; nous aurons :

$$b' = f(x)\,, \qquad (1)$$

$$-b' = f(x)\,, \qquad (2)$$

que nous pouvons réunir en une seule :

$$b'^2 = [f(x)]^2.$$

On voit facilement, par l'algèbre, que les équations (1) et (2) ont toutes leurs racines différentes, à moins que b ne soit 0. Nous allons vérifier cette circonstance par la discussion des formules trigonométriques, laquelle nous apprend aussi que chacune de ces équations a toutes ses racines réelles.

En effet, nous avons :

$$b' = \sin 4a\,;\quad -b' = -\sin 4a = \sin(-4a).$$

Par conséquent toutes les racines de (1) correspondent aux arcs des deux formules suivantes :

$$\frac{4a}{7} + \frac{2k\pi}{7},\quad \frac{-4a}{7} + \frac{(2k+1)\pi}{7}\,; \qquad (\alpha)$$

celles de (2) aux arcs des formules suivantes :

$$\frac{-4a}{7} + \frac{2k\pi}{7},\quad \frac{4a}{7} + \frac{(2k+1)\pi}{7}. \qquad (\beta)$$

Je ne ferai pas la discussion qui apprend que tous les arcs des formules (α) ont mêmes sinus que 7 arcs formant une progression arithmétique dont le premier terme est $\frac{4a}{7}$, et la raison $\frac{2\pi}{7}$. De même pour les arcs de la formule (β). Je vais seulement montrer que, pour des valeurs quelconques de a, les 7 arcs de la première progression ont des sinus différents de ceux des 7 arcs de la progression déduite des formules (β).

Deux arcs des formules $\frac{4a}{7}+\frac{2k\pi}{7}$, $\frac{-4a}{7}+2k\pi$ ne peuvent avoir même sinus, pour a quelconque, que dans le cas où la somme $\frac{2k'\pi+2k''\pi}{7}$ serait un nombre entier impair de demi-circonférences ; or cela est impossible, car ce quotient, s'il était entier, serait évidemment un multiple pair de π.

Deux arcs des formules $\frac{4a}{7}+\frac{2k\pi}{7}$, $+\frac{4a}{7}+\frac{(2k+1)\pi}{7}$ ne peuvent avoir même sinus que si la différence $\frac{(2k''+1)\pi-2k'\pi}{7}$ est un nombre entier pair de demi-circonférences, ce qui est impossible ; car on peut regarder $2k''+1$, et $2k'$ comme étant chacun moindre que 2×7.

Même raisonnement pour démontrer qu'un arc de la deuxième formule (α) ne peut avoir même sinus, quand a est quelconque, que l'un des arcs des formules (β).

On peut d'ailleurs facilement déterminer des valeurs de a ; telles que deux arcs de ces formules aient même sinus. Par exemple, on posera :

$$\frac{4a}{7}+\frac{2k'\pi}{7}-\left(\frac{-4a}{7}+\frac{2k''\pi}{7}\right)=2n\pi,$$

ou

$$\frac{8a}{7}+\frac{2(k'-k'')\pi}{7}=2n\pi;$$

d'où enfin

$$4a = 7 \,.\, n\pi - (k' - k'')\pi\,,$$

dans laquelle k' et k'' ont toutes les valeurs entières de 0 à 6; d'où il résulte que $k' - k''$ a aussi toutes les valeurs entières de 0 à 6. Ce résultat est conforme à ce que demande l'algèbre pour que les équations (1) et (2) aient des racines communes, à savoir, que $b' = \sin 4a$ soit égal à 0 ; car, dans la dernière égalité, $4a$ est un multiple de π.

Il est évident que la règle exposée au commencement de cette note servira à choisir la racine convenable parmi celles des équations obtenues dans les différents calculs que nous venons d'indiquer.

NOTE

sur les fractions continues.

PAR M. GUILMIN,
Ancien élève de l'Ecole normale.

Puisque j'ai l'occasion de vous écrire, permettez-moi de vous communiquer une réponse à la question qui m'a été faite jadis à propos des fractions continues considérées en algèbre élémentaire. Cette réponse, je l'ai faite *immédiatement* à M. Catalan, qui l'a trouvée satisfaisante; mais comme il s'agit d'une définition qui n'est écrite explicitement nulle part, son insertion dans votre journal pourrait être utile aux élèves.

Qu'entend-on par *valeur* d'une fraction continue composée d'un nombre illimité de termes ?

Les réduites de rang impair d'une pareille fraction forment une suite croissante ; les réduites de rang pair forment une suite décroissante. Les nombres de la première suite *ont* une limite supérieure ; car aucun d'eux ne saurait dépasser un nombre pris à volonté dans la deuxième ; les nombres de la deuxième suite *ont* une limite inférieure ; car aucun d'eux ne saurait être moindre qu'un nombre pris à volonté dans la première.

Ces deux limites sont égales ; car elles sont comprises entre deux réduites consécutives quelconques, et par conséquent leur différence est moindre que tout nombre assignable. C'est cette limite commune qui est la *valeur* de la fraction continue.

Trouver la somme de toutes les permutations différentes d'un nombre donné.

PAR M. ARISTIDE MARRE,
Soldat au 71e régiment de ligne.

—

Soit en général N un nombre composé de n chiffres ; trois cas peuvent se présenter : ou ces n chiffres sont tous différents, ou parmi eux il y en a p d'une espèce, q d'une autre espèce, etc., ou bien le nombre proposé est composé avec un seul et même chiffre.

1er *cas*. Soit $n....dcba$ le nombre proposé de n chiffres différents ; il fournira, comme on le sait, $1.2.3....n$ permutations. Or, dans l'addition de ces $1.2.3....n$ nombres, il est facile de voir : 1° que toutes les colonnes verticales donneront une même somme partielle, prise en valeur absolue ; 2° que cette somme constante en valeur absolue, n'est autre chose que la somme des chiffres du nombre proposé, multipliée par le nombre des permutations de $(n-1)$ lettres. D'où il résulte que les sommes partielles des diverses colonnes verticales sont :

$(a+b+c+d+\ldots+n)\,[1.2.3\ldots(n-1)]$ pour la 1re à droite,
$(a+b+c+d+\ldots+n)\,[1.2.3\ldots(n-1)] \times 10$ pour la 2e,
$(a+b+c+d+\ldots+n)\,[1.2.3\ldots(n-1)] \times 10^2$ pour la 3e,

$$\vdots$$

$(a+b+c+d+\ldots+n)\,[1.2.3\ldots(n-1)] \times 10^{n-1}$ pour la $n^{ième}$ ou dernière,

et que la somme demandée peut s'écrire :

$$\frac{1.2.3\ldots n}{n}(a+b+c+d+\ldots+n)(1+10+10^2+10^3+\ldots+10^{n-1})\,;$$

ou bien, en désignant par s la somme des chiffres du nombre proposé, et en observant que le quotient $\frac{10^n-1}{10-1}$, équivalent au dernier facteur entre parenthèse, est un nombre composé de n chiffres tous égaux à 1, on arrive à la formule :

$$S = \frac{1.2.3\ldots n}{n} \times s \times 11111\ \ldots\ \text{(en nombre } n\text{)}.$$

Exemple : Soit proposé de trouver la somme des permutations différentes du nombre 1846. Nous aurons :

$$S = \frac{1.2.3.4}{4}\,.\,19\,.\,1111 = 114 \times 1111 = 126654.$$

2e *cas*. Si le nombre donné n'a pas tous ses n chiffres différents, il faut alors remarquer que le nombre des permutations n'est plus $1.2.3\ldots n$ pour n lettres ; mais ce produit divisé par $1.2.3\ldots p$, s'il y a p de ces n lettres semblables, ou divisé par $1.2.3\ldots p \times 1.2.3\ldots q$, s'il y en a p d'une espèce, q d'une autre, etc.

Soit proposé, par exemple, de trouver toute la somme des permutations différentes de 22211.

La formule donnera :

$$S = \frac{1.2.3.4.5}{5 \times 1.2.3 \times 1.2} \times 8 \times 11111 = 177776.$$

3[e] *cas*. Supposons enfin que le nombre proposé soit composé avec un seul et même chiffre. Dans ce cas, $p = n$.

Soit le nombre 555555 dont on demande la somme des permutations. Il est évident à priori que cette somme n'est autre chose que le nombre lui-même. La formule donne un résultat parfaitement identique avec celui-ci ; elle conduit à :

$$S = \frac{1.2.3.4.5.6}{6 \times 1.2.3.4.5.6} \cdot 30 \cdot 111111,$$
$$= 5 \times 111111 = 555555.$$

II. Les Hindous rangeaient, parmi leurs règles d'arithmétique, la règle qui donne le moyen de trouver la somme des permutations dont tous les chiffres sont différents (1[er] cas), et M. Reuben Barrow nous a conservé l'énoncé suivant :

Place au-dessus des chiffres du nombre donné une progression arithmétique commençant par 1, au rang des unités, et allant en croissant d'une unité : divise le produit des termes de cette progression par le nombre des chiffres qui entrent dans le nombre proposé : multiplie la somme des chiffres de ce même nombre par le quotient ainsi obtenu ; et ce produit, écris-le autant qu'il y a de chiffres dans le nombre donné, en le reculant successivement d'un rang vers la droite ; la somme de ces lignes est la somme de toutes les permutations.

Exemple déjà cité : 1846.

$$
\begin{array}{lll}
 & & 114 \\
 & & 114 \\
 & & 114 \\
4321 & \dfrac{1.2.3.4}{4}.19 = 114 & 114 \\
1846 & & \overline{} \\
 & & S = 126654
\end{array}
$$

NOTE

Sur le problème de Malfatti.

PAR E. CATALAN.

—

Problème. *Inscrire dans un triangle donné, trois cercles tangents entre eux, et tangents aux côtés du triangle.*

Ce problème a été l'objet des recherches d'un assez grand nombre de géomètres. La solution qu'on va lire n'est que la *réduction* de celle qui a été donnée par M. *Lechmütz*, dans les *Annales de Gergonne* (tome X).

ABC (*Fig.* 7) étant le triangle donné ; soient, O le centre du cercle inscrit ; X, Y, Z les centres des cercles cherchés. Nommons x, y, z les rayons de ces cercles ; prenons pour unité le rayon OA' du cercle inscrit, et représentons par α, β, γ les angles AOB'$=$AOC', BOC'$=$BOA', COA'$=$COB' que forment, avec OA, OB, OC, les rayons menés aux points de contact B', C', A'.

Soient ensuite D, F, G le point de contact mutuel des deux cercles X, Y, et les points de contact de ces deux cercles avec AB. En menant la tangente commune DE, nous aurons, ainsi qu'il est facile de le voir, à l'aide des droites EX, EY ;

$$DE = \sqrt{xy},\ FG = 2\sqrt{xy}.$$

Si donc nous projetons AXYB sur AB, nous aurons aussi, à cause de

$$AF = x \operatorname{tang} \alpha, \ BG = y \operatorname{tang} \beta, \text{ etc. :}$$

$$x \operatorname{tang} \alpha + y \operatorname{tang} \beta + 2\sqrt{xy} = \operatorname{tang} \alpha + \operatorname{tang} \beta. \quad (1)$$

Afin d'éviter les radicaux, je prends pour inconnues auxiliaires

$$\sqrt{xy} = p, \quad \sqrt{yz} = m, \quad \sqrt{xz} = n;$$

ce qui donne :

$$x = \frac{np}{m}, \ y = \frac{mp}{n}, \ z = \frac{mn}{p}. \quad (2)$$

L'équation (1) devient par la substitution de ces valeurs :

$$p\,(n^2 \sin \alpha \cos \beta + m^2 \sin \beta \cos \alpha + 2mn \cos \alpha \cos \beta)$$
$$= mn \sin(\alpha + \beta). \quad (3)$$

A cause de la quantité

$$n^2 \sin \alpha \cos \beta + 2mn \cos \alpha \cos \beta,$$

laquelle forme, à un facteur près, les deux premiers termes du carré de $n \sin \alpha + m \cos \alpha$, je transforme comme il suit l'équation (3) :

$$p \cos \beta\,(n^2 \sin \alpha + 2mn \cos \alpha) = mn \sin(\alpha+\beta) - m^2 p \sin \beta \cos \alpha,$$
$$p \cos \beta\,(n^2 \sin^2 \alpha + 2mn \sin \alpha \cos \alpha) =$$
$$mn \sin \alpha \sin(\alpha + \beta) - m^2 p \sin \alpha \sin \beta \cos \alpha,$$
$$p \cos \beta\,(n \sin \alpha + m \cos \alpha)^2 =$$
$$mn \sin \alpha \sin(\alpha+\beta) - m^2 p \sin \alpha \sin \beta \cos \alpha + m^2 p \cos^2 \alpha \cos \beta.$$
$$= mn \sin \alpha \sin(\alpha+\beta) + m^2 p \cos \alpha \cos(\alpha + \beta).$$

Mais

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ;$$

donc

$$p\cos\beta(n\sin\alpha + m\cos\alpha)^2 = mn\sin\alpha\sin\gamma - m^2p\cos\alpha\cos\gamma. \quad (4)$$

Dans cette équation, changeons m en p, α en γ et *vice versâ ;* nous aurons :

$$m\cos\beta\,(n\sin\gamma + p\cos\gamma)^2 = pn\sin\gamma\sin\alpha - mp^2\cos\gamma\cos\alpha.$$

Ces deux équations donnent :

$$p^2(n\sin\alpha + m\cos\alpha)^2 = m^2\,(n\sin\gamma + p\cos\gamma)^2.$$

Extrayons les racines des deux membres, et ne considérons que les valeurs positives de m, n, p, lesquelles répondent aux cercles *intérieurs*; nous aurons :

$$p\,(n\sin\alpha + m\cos\alpha) = m\,(n\sin\gamma + p\cos\gamma). \quad (5)$$

Un calcul semblable au précédent nous donnerait évidemment les deux autres équations suivantes, que l'on déduit de celle-ci par une permutation tournante :

$$m\,(p\sin\beta + n\cos\beta) = n\,(p\sin\alpha + m\cos\alpha), \quad (6)$$

$$n\,(m\sin\gamma + p\cos\gamma) = p\,(n\sin\beta + n\cos\beta). \quad (7)$$

En ajoutant les équations (5) et (7), et supprimant le facteur p, on a :

$$m(\cos\gamma + \sin\beta - \cos\alpha) = n\,(\cos\gamma + \sin\alpha - \cos\beta). \quad (8)$$

Par une transformation bien connue, on obtient :

$$\cos\gamma + \sin\beta - \cos\alpha = 4\cos\frac{1}{2}\beta\sin\frac{1}{4}(\alpha+\beta-\gamma)\cos\frac{1}{4}(\beta+\gamma-\alpha)$$

$$= 4\cos\frac{1}{2}\beta\cos(45^\circ + \frac{1}{2}\gamma)\sin(45^\circ + \frac{1}{2}\alpha),$$

$$\cos\gamma + \sin\alpha - \cos\beta = 4\cos\frac{1}{2}\alpha\cos\left(45^\circ + \frac{1}{2}\gamma\right)\sin\left(45^\circ + \frac{1}{2}\beta\right);$$

ce qui donne, au lieu de l'équation (8)

$$\frac{m}{n}=\frac{1+\operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta}{1+\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha} \tag{9}$$

Observons actuellement que l'équation (3) peut être mise sous la forme :

$$p\left(\frac{n}{m}\operatorname{tg}\alpha+\frac{m}{n}\operatorname{tg}\beta+2\right)=\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta.$$

Si donc on remplace, dans cette dernière, le rapport $\frac{m}{n}$ par sa valeur (9), on aura successivement :

$$p\left[\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha}{\left(1+\operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta\right)\left(1-\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha\right)}+\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta}{\left(1+\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha\right)\left(1-\operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta\right)}+1\right]$$
$$=\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\alpha}+\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta}{1-\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\beta},$$

$$p\left[\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha\left(1+\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha\right)\left(1-\operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta\right)+\operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta\left(1+\operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta\right)\left(1-\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha\right)\right.$$
$$\left.+\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\alpha\right)\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\beta\right)\right]=\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\beta\right)+\operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\alpha\right),$$

$$p\left[\left(\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha+\operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta\right)\left(1-\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha\operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta\right)+\left(1-\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha\operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta\right)^2\right]$$
$$=\left(\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha+\operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta\right)\left(1-\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha\operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta\right);$$

ou bien, en supprimant le facteur $1-\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha\operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta$, et remplaçant $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha+\operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta$ par

$$\left(1-\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha\operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta\right)\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha+\beta):$$

$$p\left[1+\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\right]=\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha+\beta),$$

$$p\left(1+\cot\frac{1}{2}\gamma\right)=\cot\frac{1}{2}\gamma;$$

d'où enfin

$$p=\frac{1}{1+\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma} \qquad (10)$$

On obtiendrait des valeurs analogues pour m et pour n.

La valeur de p peut se construire facilement.

On a, en effet :

$$CO+OA'-CA'=\frac{1}{\cos\gamma}+1-\operatorname{tg}\gamma$$

$$=\frac{2\cos^2\frac{1}{2}\gamma-2\sin\frac{1}{2}\gamma\cos\frac{1}{2}\gamma}{\cos^2\frac{1}{2}\gamma-\sin^2\frac{1}{2}\gamma}=\frac{2\cos\frac{1}{2}\gamma}{\cos\frac{1}{2}\gamma+\sin\frac{1}{2}\gamma}=\frac{2}{p}.$$

Ainsi :

$$p=\frac{1}{2}(CO+OA'-CA'),\ m=\frac{1}{2}(AO+OB'-AB'),$$

$$n=\frac{1}{2}(BO+OC'-BC').$$

Note. Nous donnerons avec l'historique de ce célèbre problème, la solution géométrique de M. Steiner, qui s'applique aussi au triangle sphérique. Tm.

QUESTION D'EXAMEN (*Voir* t. IV, p. 648).

PAR M. C. DROUETS,
Elève du collége royal militaire de La Flèche.

D'un point m de la circonférence d'une ellipse, on mène deux cordes $m\mathrm{F'Q}$, $m\mathrm{FP}$ passant par les foyers ; démontrer que la somme $\frac{m\mathrm{F}}{\mathrm{FP}}+\frac{m\mathrm{F'}}{\mathrm{F'Q}}$ est constante (*fig.* 8).

Je rapporte l'ellipse au foyer de droite F et à l'axe focal ; on a alors l'équation polaire :

$$\rho=\frac{p}{1+e\cos\omega}.$$

Si on la rapportait à l'autre foyer comme pôle et au même axe polaire, on aurait :

$$\rho=\frac{p}{1-e\cos\omega}.$$

Soient ρ',ω' les coordonnées du point m, et ρ''',ω''' les coordonnées du point P dans le premier système ; ρ'',ω'' celles du point m ; $\rho^{\mathrm{IV}}\omega,^{\mathrm{IV}}$ celles du point Q dans le second, on aura :

$$\rho'=\frac{p}{1+e\cos\omega'},\quad \rho'''=\frac{p}{1+e\cos\omega'''},\quad \rho''=\frac{p}{1-e\cos\omega''},\quad \rho^{\mathrm{IV}}=\frac{p}{1-e\cos\omega^{\mathrm{IV}}}.$$

De plus,

$$\omega'''=\omega'+\pi,\quad \text{d'où}\quad \cos\omega'''=-\cos\omega',$$
$$\omega^{\mathrm{IV}}=\omega''+\pi,\quad \text{d'où}\quad \cos\omega^{\mathrm{IV}}=-\cos\omega''.$$

On aura donc, eu égard à ces valeurs :

$$\rho'=\frac{p}{1+e\cos\omega'},\quad \rho'''=\frac{p}{1-e\cos\omega'};\quad \rho''=\frac{p}{1-e\cos\omega''},\quad \rho^{\mathrm{IV}}=\frac{p}{1+e\cos\omega''}.$$

Il faut démontrer que $\frac{\rho'}{\rho'''}+\frac{\rho''}{\rho^{\text{IV}}}$ est constant; ce qui revient à chercher la valeur de

$$\frac{1-e\cos\omega'}{1+e\cos\omega'}+\frac{1+e\cos\omega''}{1-e\cos\omega''}.$$

Or, la relation qui existe entre les deux systèmes est que $\rho'+\rho''=2a$; ou bien, en mettant les angles

$$\frac{p(2+e\cos\omega'-e\cos\omega'')}{(1+e\cos\omega')(1-e\cos\omega'')}=2a,$$

$$p=\frac{b^2}{a},\quad b^2=a^2-c^2\quad \frac{b^2}{a^2}=1-\frac{c^2}{a^2}=1-e^2.$$

Donc $p=a(1-e^2)$. L'égalité précédente donne $\cos\omega''$ en fonction de $\cos\omega'$,

$$\cos\omega''=\frac{e^2\cos\omega'+2e+\cos\omega'}{e^2+2e\cos\omega'+1}.$$

Puis, substituant cette valeur dans la somme à calculer, et réduisant au même dénominateur, il vient :

$$2\frac{(1+e^2)(e^2\cos^2\omega'+2e\cos\omega'+1)}{(1-e^2)(e^2\cos^2\omega'+2e\cos\omega'+1)}\quad\text{ou}\quad 2\frac{1+e^2}{1-e^2},$$

valeur constante. On peut vérifier cette valeur pour l'extrémité du grand axe. On a, dans ce cas :

$$\frac{a-c}{a+c}+\frac{a+c}{a-c}=2\frac{a^2+c^2}{a^2-c^2}=2\frac{1+e^2}{1-e^2}.$$

On peut aussi résoudre ce problème sans se servir des coordonnées polaires, en observant que les abscisses des points P, Q peuvent se déduire des lignes de la figure et de l'abscisse du point m, au moyen des triangles $m\text{F}\mu$, $\text{F}p\text{P}$; $m\text{F}'\mu$ et $q\text{F}'\text{Q}$, qui sont semblables deux à deux. Puis, substituant ces abscisses dans les expressions des rayons vecteurs, savoir :

$d=a-\frac{cx}{a}$ pour le foyer F, $d'=a+\frac{cx}{a}$ pour l'autre F'.

SUR LA RÉSOLUTION

d'une certaine classe d'équations à plusieurs inconnues du premier degré.

—

Soit le système de m équations

$$
\begin{array}{l}
x_1+x_2+x_3+\ldots\ldots\ldots x_m=b, \\
a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+\ldots\ldots a_mx_m=b', \\
a_1^2x_1+a_2^2x_2+a_3^2x_3+\ldots\ldots a_m^2x_m=b'', \\
\vdots \\
a_1^{m-1}x_1+a_2^{m-1}x_2+a_3^{m-1}x_3\ \ldots\ a_m^{m-1}x_m=b^{(m-1)}.
\end{array}
$$

x_1, x_2, $x_3 \ldots\ldots x_m$ sont m inconnues ; a_1, a_2, $a_3 \ldots\ldots a_m$ sont m quantités connues *inégales* ; $b, b' \ldots\ldots b^{(m-1)}$, m autres quantités connues quelconques. Soient k, k', $k'' \ldots\ldots k^{(m-2)}$, $m-1$ quantités constantes indéterminées, et représentons par $\varphi(a)$ la fonction $k+k'a+k''a^2+\ldots\ldots+a^{m-1}=\varphi(a)$; on a donc :

$$x_1\varphi(a_1)+x_2\varphi(a_2)+x_3\varphi(a_3)+\ldots x_m\varphi(a_{m-1})=kb+k'b'+k''b''+\ldots b^{(m-1)}$$

Pour trouver la valeur de x_1, prenant pour $\varphi(a)$ une fonction algébrique qui ait pour racines a_2, $a_3 \ldots\ldots a_m$, les quantités k, $k' \ldots\ldots k^{(m-1)}$ seront déterminées, et l'on aura :

$$x_1=\frac{kb+k'b'+\ldots\ldots b^{(m-1)}}{\varphi(a_1)};$$

calculons la fonction

$$(a-a_1)(a-a_2)\ldots\ldots(a-a_m)=f(a)=a^m+\mathrm{P}a^{m-1}+\mathrm{Q}a^{m-2}+\ldots\mathrm{T}a+\mathrm{U},$$

P, Q .... T, U sont des quantités connues ; or

$$\varphi(a)=(a-a_2)(a-a_3)\ \ldots\ldots\ (a-a_m)=\frac{fa}{a-a_1};$$

donc, d'après des théorèmes connus,

$$k^{(m-2)} = a_1 + \mathrm{P}\ ;\quad k^{(m-3)} = a_1^2 + \mathrm{P}a_1 + \mathrm{Q}\ ,\ \text{etc.}\ ;$$

et $\varphi(a_1) = f'(a_1)$ ou f' désigne la dérivée $f(a)$ par rapport à a, qui ne peut jamais être nulle, puisque $f(a) = 0$ n'a pas de racines égales; on calculera de même la valeur de x_2, x_3, etc.; ainsi la détermination des inconnues exige seulement la formation de la fonction $f(a)$.

Observation. Ce genre d'équations se présente souvent dans le calcul intégral, et nous avons extrait ce qui précède du Cours lithographié de M. Sturm (2e année). Tm.

(*La suite prochainemeut.*)

THEORÈME SUR LES NOMBRES.

PAR M. A. VACHETTE,
Licencié ès sciences mathématiques et physiques.

Théorème. Il est impossible de trouver deux nombres rationnels dont le produit soit égal à la différence de leurs carrés.

Ainsi l'équation

$$(1) \qquad xy = x^2 - y^2$$

est impossible en nombres rationnels.

Démonstration. Si $\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}$ sont fractionnaires $\begin{matrix} x = \dfrac{a}{b} \\ y = \dfrac{c}{d} \end{matrix}$, on les réduit au même dénominateur $\begin{matrix} x = \dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{D}} \\ y = \dfrac{\mathrm{N}'}{\mathrm{D}} \end{matrix}$, et l'équation est ramenée à des nombres entiers.

On peut supposer $\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}$ premiers entre eux ; car s'ils ont un facteur commun a, ce facteur disparaîtra.

L'équation (1) revenant à

$$xy = (x+y)(x-y),$$

$\begin{matrix} x+y \\ x-y \end{matrix}$ sont premiers entre eux ; sinon, leur somme $2x$ et leur différence $2y$ auraient, ou un facteur commun autre que deux qui devrait diviser à la fois $\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}$, ou le facteur commun 2 qui, divisant à la fois $\begin{matrix} x+y \\ x-y \end{matrix}$, entraîne pour $\left\{\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right.$ la nécessité d'être tous deux pairs ou tous deux impairs ; $\left\{\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right.$ étant premiers entre eux ne peuvent être qu'impairs ; mais alors x^2-y^2 serait pair, tandis que xy serait impair ; on aurait, par l'équation (1), un nombre impair égal à un nombre pair, ce qui est absurde.

Remarque. Le théorème résulte immédiatement de la résolution directe ; on a :

$$x = \frac{y(1 \pm \sqrt{5})}{2} \quad \text{ou} \quad y = \frac{-x(1 \pm \sqrt{5})}{2},$$

y étant rationnel, x ne peut l'être.

Autrement encore. Puisque $\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}$ sont premiers entre eux, $\begin{matrix} x^2 \\ y^2 \end{matrix}$ le sont aussi, et l'on aurait dans xy des facteurs qui n'entreraient pas dans x^2-y^2.

Généralement, l'équation

$$x^m - y^n = (xy)^p$$

est impossible en nombres rationnels, par une raison analogue.

Un cas particulier de cette équation est :

$$x^m - y^m = (xy)^p.$$

On peut faire $(xy)^p = z^m$, si $p = mn$, car alors $z = (xy)^n$;

$$x^m - y^m = z^m$$

est impossible pour tout nombre z qui est une puissance du produit des deux premiers nombres $\frac{x}{y}$. C'est peut-être une lueur jetée sur le célèbre théorème de Fermat, que, passé le deuxième degré, l'équation $x^m + y^m = z^m$ est impossible.

Note. Il suffit de démontrer ce dernier théorème pour le nombre 4 et pour les exposants nombres premiers. Fermat l'a démontré pour 4 ; Euler pour 3 ; Legendre pour 5 ; M. Dirichlet pour 14, et M. Lamé ensuite pour 7 ; démonstration que M. Lebesgue a considérablement simplifiée (*Voir* Liouville, t. V, 1840). Tm.

THÉORÈMES

sur les Puissances des Nombres.

—

I. *Théorème.* S'il est impossible de satisfaire à l'équation $X^n + Y^n = Z^n$, il est aussi impossible de satisfaire à l'équation $x^{2n} + y^{2n} = z^2$ (Lebesgue).

Démonstration. Il suffit évidemment de démontrer le théorème pour des nombres entiers.

a) Si deux des trois x, y, z ont un facteur commun, il divise aussi le troisième ; on peut ainsi le faire disparaître ; donc deux quelconques des trois nombres peuvent être supposés premiers entre eux et il n'y a qu'un seul des trois nombres qui soit pair.

b) z ne peut être pair ; z^2 serait divisible par 4 ; et x et y étant alors impairs, la somme des deux carrés impairs $(x^n)^2+(y^n)^2$ ne peut donner un nombre divisible par 4 ; donc l'un des deux nombres x, y est nécessairement pair et l'autre impair. Soit donc $x=2^m pq$; m est au moins égal à l'unité ; p et q sont deux nombres impairs et premiers entre eux, et pouvant être l'unité, chacun ou ensemble. Ainsi les quatre nombres y, p, q, z sont impairs et premiers entre eux, pris deux à deux.

Premier cas. n pair.

L'équation peut alors évidemment prendre la forme

$$u^4+v^4=z^2 ; \text{ ou } 2^{4m}p^4q^4+v^4=z^2 ; \; 2^{4m}p^4q^4=$$
$$=(z-v^2)(z+v^2).$$

a) $z+v^2$ et $z-v^2$ n'ont d'autre facteur commun que 2 ; car ce facteur commun appartient à la somme $2z$ et à la différence $2v^2$; z et v étant premiers, $2z$ et $2v^2$ n'ont que 2 pour facteur commun.

b) Il n'y a donc que ces deux décompositions possibles :

$$z+v^2=2p^4,$$
$$z-v^2=2^{4m-1}q^4 ;$$

ou bien :

$$z-v^2=2p^4,$$
$$z+v^2=2^{4m-1}q^4.$$

Le premier système donne $v^2=p^4-2^{4m-2}q^4$; et le second, $v^2=2^{4m-2}q^4-p^4$. Or, cette dernière équation est impossible ; car elle donne :

$$v^2+p^4=2^{4m-2}q^4 ;$$

v^2 et p^4 étant deux carrés impairs, leur somme ne peut être divisible par 4 ; on ne peut donc admettre que le premier système, dont on tire $2^{4m-2}q^4 = (p^2+v)(p^2-v)$. Faisons $q = rs$, r et s étant deux nombres impairs premiers entre eux ; et raisonnant comme dessus, on aura ces deux systèmes possibles :

$$\left.\begin{array}{l} p^2+v=2r^4 \\ p^2-v=2^{4m-3}s^4 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} p^2-v=2r^4 \\ p^2+v=2^{4m-3}s^4 \end{array}\right\}$$

L'un et l'autre système donne $p^2 = r^4 + (2^{m-1}s)^4$ (1) ; donc si l'équation $(2^m pq)^4 + v^4 = r^2$ est possible, celle-ci, l'équation (1) le sera aussi, où p, v, s sont des nombres impairs premiers entre eux, et m est diminué d'une unité ; en continuant ainsi, on parviendra enfin à une équation $p'^2 = r'^4 + s'^4$, où p', r', s' sont des nombres impairs, résultat absurde ; donc aussi la somme de deux bicarrés ne peut être un bicarré. Théorème de Fermat (*Théorème des Nombres*, t. II, p. 5, 3e édit. 1830).

Deuxième cas. n est impair.

Faisant toujours $x = 2^m pq$, il vient $(2^m pq)^{2n} + y^{2n} = z^2$; $(2^m pq)^{2n} = (z-y^n)(z+y^n)$, d'où deux systèmes possibles :

$$\begin{array}{ll} z-y^n = 2p^{2n}, & \text{ou bien } z+y^n = 2p^{2n} \\ z+y^n = 2^{2mn-1}q^{2n}, & z-y^4 = 2^{2mn-1}q^{2n}. \end{array}$$

Le second système donne

$$y^{2n} = p^{4n} - 2^{4mn-2}q^{4n} = [p^n - (2^{mn-1}q^2)^n]\,[p^n + (2^{mn-1}q^2)^n]\,;$$

faisant $y = rs$ en supposant r et s impairs et premiers entre eux, on aura :

$$r^n = p^n + 2^{mn-1}q^n\,;\ s^n = p^n - 2^{mn-1}q^n;\ \text{d'où } r^n - s^n = 2^{mn}q^n = (2^m q)^n\,;\ \text{et } r^n = s^n + (2^m q)^n.$$

Or, cette équation est supposée impossible ; donc... etc.

Pour le premier système, il suffit de supposer que y, ou que l'un des diviseurs r ou s est négatif et l'on parvient à la même conclusion.

Si $n = 1$, en obtient la solution connue :

$$\pm y = p^2 - (2^{m-1}q)^2$$
$$z = p^2 + (2^{m-1}q)^2$$
$$x = 2^m pq.$$ (Voir *Annales*, t. I, p. 184.)

Observation. La première partie du théorème, savoir que la somme de deux quatrièmes puissances ne peut être un carré, est indépendante du théorème de Fermat sur l'impossibilité de trouver une puissance de nom quelconque, la seconde exceptée, égale à la somme de deux puissances de même nom.

II. *Théorème.* $y^{2n} - x^{2n} = 2z^n$ est une équation impossible, en nombres rationnels pour $n > 1$.

Démonstration. Faisons $x^{2n} + z^n = u$; $u + z^n = y^{2n}$;

$$u - z^n = x^{2n};\ u^2 - z^{2n} = (xy)^{2n};\ \text{d'où } (xy)^{2n} + z^{2n} = u^2,$$

équation impossible d'après le théorème précédent ; donc...

Corollaire. Ainsi la différence de deux bicarrés ne peut être égale au double d'un carré.

Observation. Ce théorème est de M. Liouville (*Journ. des Math.*, t. V, p. 360. 1840).

III. *Théorème.* La différence de deux bicarrés ne peut être un carré.

Démonstration. Soit l'équation $x^4 - y^4 = z^2$; il suffit de prouver l'impossibilité de cette équation en nombres entiers et premiers entre eux, pris deux à deux ; il y a donc deux nombres impairs et un nombre pair ; x ne peut être pair, car la somme $y^4 + z^2$ de deux carrés impairs ne peut être égale à un carré. Il y a donc deux cas possibles :

Premier cas. x impair ; y pair ; z impair.

Faisons $y=2^m pq$; m au moins $=1$; p et q nombres impairs premiers entre eux et premiers avec x et z, l'équation devient $(x^2+z)(x^2-z)=2^{4m}p^4q^4$; x^2+z et x^2-z n'ont que 2 pour facteur commun ; donc $x^2\pm z = 2p^4$

$$x^2 \mp z = 2^{4m-1}q^4$$
$$x^2=p^4+2^{4m-2}q^4 ;\ (x-p^2)(x+p^2)=2^{4m-2}q^4 ;$$

$x-p^2$ et $x+p^2$ n'ont que 2 en facteur commun ; d'où :

$$x-p^2=2 ; \qquad p^2=2^{4m-4}q^4-1 ;\ 1+p^2=2^{4m-4}q^4,$$
$$x+p^2=2^{4m-3}q^4$$

équation impossible, car la somme de deux carrés impairs ne peut être égale à un carré ; donc...

Deuxième cas. x impair ; y impair ; z pair.

$$z=2^m pq ;\ (x^2-y^2)(x^2+y^2)=2^{2m}p^2q^2 ;\ x^2+y^2=2p^2 ;$$
$$x^2-y^2=2^{2m-1}q^2 ;\ x^2=p^2+2^{2m-2}q^2 ;\ y^2=p^2-2^{2m-2}q^2 ;$$
$$x^2y^2=p^4-(2^{m-1}q)^4 ;$$

si $m=1$, l'équation est impossible, puisque p, q, x, y sont des nombres impairs ; si $m>1$, l'équation rentrant dans le cas précédent, est encore impossible.

Le second système, $x^2-y^2=2p^2$; $x^2+y^2=2^{2m-2}q^2$ mène à l'équation impossible $y^2+p^2=2^{2m-2}q^2$; donc, etc.

Corollaire. Donc ni la somme de deux bicarrés, ni leur différence ne peut être un bicarré.

IV. *Théorème*. Lorsque la somme des deux carrés est un carré, le produit des racines ne peut être le double d'un carré.

Démonstration. Soit $x^2+y^2=u^2$; $xy=2v^2$; on en tire $(x^2-y^2)^2=u^4-(2v)^4$; mais la différence de deux bicarrés ne peut être un carré ; donc...

Observation. Lorsque les côtés d'un triangle rectangle sont des nombres rationnels, l'aire ne peut être un nombre carré.

V. *Théorème.* L'équation $x^4+4y^4 = z^2$ est impossible, excepté pour $y=0$.

Démonstration. x et z sont impairs et premiers entre eux; $x^4=(z+2y^2)(z-2y^2)$; ces deux derniers facteurs sont impairs et premiers entre eux; donc :

$$z+2y^2=r^4;\ z-2y^2=s^4;\ 4y^2=r^4-s^4;$$

équation impossible (theorème III); donc...

Observation. Une démonstration analogue fait voir que la formule x^4-4y^4 ne peut devenir un carré.

VI. *Théorème.* L'équation $x^4+2y^4=z^2$ est impossible en nombres rationnels, excepté pour $y=0$.

Démonstration. Raisonnant toujours comme ci-dessus, il est évident que x et z sont impairs et premiers entre eux;

$$2y^4=z^2-x^4=(z+x^2)(z-x^2);$$

le second nombre est pairement pair; donc y doit être pair.

D'après la théorie des carrés, on a :

$$z=p^2+2q^2;\ x^2=p^2-2q^2;\ y^2=2pq;$$

par la même théorie, l'équation $p^2-x^2=2q^2$ donne :

$$x=m^2-2n^2;\ p=m^2+2n^2;\ q=2mn;$$

d'où $y^2=4mn(m^2+2n^2)$; m et n sont premiers entre eux; il faut donc que m, n, m^2-2n^2 soient des carrés. Faisons $m=f^2$; $n=g^2$; ni f ni g ne peut devenir nul, à moins qu'on ait $y=0$; nous devons donc avoir $f^4+2g^4=v^2=p$, équation semblable à celle qui est donnée; mais $p^2<z$; $v<\sqrt[4]{z}$; le second membre de l'équation donnée peut donc aller en diminuant sans pouvoir devenir nul, ce qui est impossible; donc..., etc.

VII. *Théorème.* L'équation $x^4 - 8y^4 = z^2$ est impossible en nombres rationnels, excepté pour $y = 0$.

Démonstration. On déduit de cette équation

$$z^4 + 2(2xy)^4 = (x^4 + 8y^4)^2,$$

équation impossible, etc.

VIII. *Théorème.* L'équation $x^4 - 4y^4 = z^2$ est impossible en nombres rationnels, excepté pour $y = 0$.

Démonstration. On a

$$x^2 = p^2 + q^2;\ 2y^2 = p^2 - q^2;\ z = 2pq;\ \text{d'où } 2x^2y^2 = p^4 - q^4,$$

équation impossible (théor. II).

IX. *Récapitulation.*

$$x^4 \pm y^4 = z^2;\ x^4 - y^4 = 2z^2;\ x^4 + 2y^4 = z^2;$$
$$x^4 \pm 4y^4 = z^2;\ x^4 - 8y^4 = z^2$$

sont des équations impossibles en nombres rationnels (Voir Legendre, *Théorie des nombres*).

X. *Théorème.* Aucun nombre triangulaire, excepté l'unité, n'est égal à un bicarré.

Démonstration. Soit $x(x-1) = 2z^4$; faisons $z = mn$; il n'y a que deux décompositions possibles.

Première décomposition :

$$x = 2m^4;\ x+1 = n^4;\ \text{d'où } 1 = n^4 - 2m^4;\ \text{ou } 2m^4 + 1 = n^4,$$

équation impossible (th. VI).

Deuxième décomposition :

$$x = n^4;\ x + 1 = 2m^4;\ 1 = 2m^4 - n^4;$$

on en tire :

$$-n^4 = 1 - 2m^4;\ m^8 - n^4 = (m^4 - 1)^2;$$

équation impossible (th. III), à moins de supposer $m = n = 1$.

XI. *Théorème.* Ni la somme d'un nombre et de son réciproque, ni leur différence ne peut être un carré.

Démonstration. Soit l'équation $z \pm \frac{1}{z} = v^2$; z étant un nombre quelconque entier ou fractionnaire, on en tire : $z = \frac{1}{2} v^2 \pm \frac{1}{2} \sqrt{v^4 \pm 4}$; et, faisant $v = \frac{p}{q}$, $p^4 \pm 4q^4$ ne peut être un carré ; donc..., etc.

Autrement. Soit $z = \frac{p}{q}$; p et q nombres premiers entre eux ; alors $\frac{z^2 \pm 1}{z} = \frac{p^2 \pm q^2}{pq}$; $p^2 \pm q^2$ et pq sont aussi premiers entre eux ; donc, pour que cette expression soit un carré, il faut que pq et $p^2 \pm q^2$ soient des carrés ; or, p et q étant premiers entre eux, il faut que p et q soient chacun un carré, et alors $p^2 \pm q^2$ étant la somme ou la différence de deux bicarrés, ne peut être un carré ; donc..., etc.

Observation. $\frac{x}{y} \pm \frac{y}{x}$ ne peut donc être un carré ; donc on ne peut avoir $\frac{x}{y} \pm \frac{y}{x} = 1$, ou $x^2 \pm y^2 = xy$ (Théorème de M. Vachette, voir p. 111).

XII. Trouver à quelle condition on peut satisfaire en nombres rationnels à l'équation $y^2 + myx^2 + a = 0$; m et a sont des nombres donnés.

Solution. $y = -\frac{1}{2} ax^2 \pm \frac{1}{2} \sqrt{m^2x^4 - 4a}$; ainsi il faut que la formule $m^2p^4 - 4aq^4$, ou ce qui revient au même, que la somme $p^4 - 4am^2q^4$ puisse devenir un carré.

XIII. *Remarque.* Quelqu'un répétait devant d'Alembert l'assertion banale que la géométrie servait à rectifier l'esprit. Oui, reprit d'Alembert, à rectifier les esprits droits. Cette réponse spirituelle est d'une grande justesse. Il est vrai pourtant de dire que l'étude des sciences exactes rend en général l'esprit difficile sur le mérite des *preuves*. Euler croit que la théorie des nombres en particulier est plus propre encore que la géométrie à donner de la rectitude au jugement et de l'intensité à la faculté méditative. Si l'on introduisait les principales propositions de cette théorie dans l'enseignement classique, les examinateurs acquerraient un excellent criterium pour classer les intelligences. Ce moyen est infiniment préférable à celui qui est en usage, et qui consiste à rendre difficiles des lieux communs, à accumuler des minuties puritaines, plus propres à cambrer les esprits qu'à les rendre droits. Admettons donc dans nos colléges le calcul différentiel pour faciliter, abréger, étendre les études, et la théorie des nombres pour en augmenter la force. La véritable logique s'apprendra alors dans nos classes. Surtout depuis que nos philosophes désertent les sciences, ne veulent plus être que des écrivains et des littérateurs et croient pouvoir se passer des sciences exactes. Platon, Aristote, Descartes, Leibnitz, Mallebranche, Gassendi, Spinosa, Clarke, Kant, n'étaient pas de cet avis. On ne voit pas ce que la philosophie a gagné à cette ignorance-là.

Comment d'ailleurs nos prétendus disciples de Platon feraient-ils pour entrer dans l'école du maître, laquelle portait l'inscription connue : Οὐδεὶς ἀγεωμέτρητης εἰσίτω, qu'aucun non-géomètre n'entre ici ?

Dans un article spécial, nous signalerons les nombreuses lacunes, l'état honteusement arriéré de l'enseignement mathématique universitaire et nous indiquerons les moyens faciles d'y remédier, par les programmes d'examen.

Tm.

RECUEIL DE FORMULES ET DE VALEURS

relatives aux fonctions circulaires et logarithmiques.

—

1. $e = 2,718281828459045235360 28......$

2. $l'.10 = 2,30258\ 50929\ 94045\ 68401\ 79914......$
l' désigne le logarithme népérien.

3. $\frac{1}{l'.10} = 0,4342\ 9448\ 1903\ 2518\ 2765\ 11289.....$

4. $l'.(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}.$

5. $l'.\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \text{etc.}\right).$

6. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \ldots.$

7. $e^x = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$, lorsque $n = \infty$.

8. $$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = x\left(1 + \frac{x^2}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} + \ldots.\right) =$$
$$= x\left(1 + \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 + \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 + \frac{x^2}{9\pi^2}\right)\left(1 + \frac{x^2}{16\pi^2}\right), \text{ etc.}$$

9. $$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \text{etc.} =$$
$$= \left(1 + \frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1 + \frac{4x^2}{9\pi^2}\right)\left(1 + \frac{4x^2}{25\pi^2}\right)\left(1 + \frac{4x^2}{49\pi^2}\right), \text{ etc.}$$

10. $\log(x + y\sqrt{-1}) = \log\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{-1}\ .\ \text{arc tang}\frac{y}{x}.$

11. $\cos x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}; \quad \sin x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}.$

12. $e^{2x\sqrt{-1}} = \dfrac{1+\sqrt{-1}\,.\,\mathrm{tang}\,x}{1-\sqrt{-1}\,.\,\mathrm{tang}\,x}.$

13. $e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sqrt{-1}\,.\sin x\,;\; e^{-x\sqrt{-1}} = \cos x - \sqrt{-1}\sin x.$

14. $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{1.2} + \dfrac{x^4}{1.2.3.4} - \text{etc.}$

15. $\sin x = x - \dfrac{x^3}{1.2.3} + \dfrac{x^5}{1.2.3.4.5} - \text{etc.}$

16. $x = \mathrm{tang}\,x - \dfrac{1}{3}\,\mathrm{tang}^3 x + \dfrac{1}{5}\,\mathrm{tang}^5 x - \dfrac{1}{7}\,\mathrm{tang}^7 x + \ldots.$

17. $u = \cos u \left(\sin u + \dfrac{2}{3} \sin^3 u + \dfrac{2.4}{3.5} \sin^5 u + \ldots \right)$

$$u = \sin 2u \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \sin^2 u + \frac{4}{3.5} \sin^4 u + \frac{4.6}{3.5.7} \sin^6 u + \ldots \right).$$

18. $x = \dfrac{\mathrm{tang}\,x}{1+\mathrm{tang}^2 x} \left(\dfrac{2}{3}\, \dfrac{\mathrm{tang}^2 x}{1+\mathrm{tang}^2 x} + \dfrac{2.4}{3.5}\, \dfrac{\mathrm{tang}^4 x}{(1+\mathrm{tang}\,2^2 x)^2} + \right.$

$$\left. + \frac{2.4.6}{3.5.7}\, \frac{\mathrm{tang}^6 x}{(1+\mathrm{tang}^2 x)^3} + \ldots \right).$$

19. $\pi = 3{,}141592653589793238462643 38\,;$

$L\pi = 0{,}4971498726941338543511268288 = \log \pi\,;$

$l\pi = 1{,}1447298858494001741434237\,;$

$\log \dfrac{3.60}{\pi} = 1{,}7581226324091722154525 26413\,;$

$\log \dfrac{3.60^2}{\pi} = 3{,}5362738827928158479612 93211\,;$

$\log \dfrac{3.60^3}{\pi} = 5{,}3144251331764594804700 60009.$

20. Arc égal au rayon $= 57^\circ{,}2957795130823208767 98 =$

$= 3437'{,}7467707849392526 0788$

$= 206264''{,}806247096355 1564728$

$= 57^\circ.\,17'.\,44''.\,48'''.\,22^{\mathrm{IV}}.\,29^{\mathrm{V}}.\,21^{\mathrm{VI}}.$

(Suite.)

DÉTERMINATION

des axes principaux de rotation d'un corps, par M. Th. Clausen, de Munich.

(Crelle, t. V, p. 383.)

—

La solution ordinaire conduit à une équation du troisième degré, un peu compliquée ; la méthode suivante donne à l'équation une forme plus symétrique ; elle a été employée par M. Gauss pour la solution d'un autre problème ; l'origine est au centre de gravité du corps ; axes rectangulaires ; x,y,z, coordonnées d'un point ; x',y', z', coordonnées du même point relativement aux axes principaux ; on a :

$$\left.\begin{aligned} \int x^2dm &= \alpha\,; & \int xydm &= \delta \\ \int y^2dm &= \beta\,; & \int yzdm &= \varepsilon \\ \int z^2dm &= \gamma\,; & \int zxdm &= \theta \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Les six lettres grecques représentent des quantités connues. Et relativement aux axes principaux :

$$\left.\begin{aligned} \int x'^2dm &= \xi\,; & \int x'y'dm &= 0 \\ \int y'^2dm &= \upsilon\,; & \int y'z'dm &= 0 \\ \int z'^2dm &= \zeta\,; & \int z'x'dm &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

et soit

$$\left.\begin{aligned} x' &= ax + by + cz \\ y' &= a'x + b'y + c'z \\ z' &= a''x + b''y + c''z \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

on doit avoir $x^2+y^2+z^2=x'^2+y'^2+z'^2$; donc

$$\left.\begin{array}{ll} a^2+a'^2+a''^2=1, & ab+a'b'+a''b''=0 \\ b^2+b'^2+b''^2=1, & bc+b'c'+b''c''=0 \\ c^2+c'^2+c''^2=1, & ac+a'c'+a''c''=0 \end{array}\right\} \quad (4)$$

Ainsi nous avons douze inconnues, ξ, υ, ζ et les neuf coefficients des équations (3) ; mais aussi douze équations, savoir les systèmes (2) et (4).

Les équations (3) donnent :

$$\left.\begin{array}{l} x=ax'+a'y'+a''z' \\ y=bx'+b'y'+b''z' \\ z=cx'+c'y'+c''z' \end{array}\right\} \quad (5)$$

d'où

$$\left.\begin{array}{ll} a^2+b^2+c^2=1, & aa'+bb'+cc'=0 \\ a'^2+b'^2+c'^2=1, & a'a''+b'b''+c'c''=0 \\ a''^2+b''^2+c''^2=1, & a''a+b''b+c''c=0 \end{array}\right\} \quad (6)$$

Substituant dans les équations (1), les valeurs déduites de (5) et (2), il vient :

$$\left.\begin{array}{l} \alpha=a^2\xi+a'^2.\upsilon+a''^2.\zeta \\ \beta=b^2\xi+b'^2.\upsilon+b''^2.\zeta \\ \gamma=c^2\xi+c'^2.\upsilon+c''^2.\zeta \\ \delta=ab\xi+a'b'.\upsilon+a''b''.\zeta \\ \varepsilon=bc\xi+b'c'.\upsilon+b''c''.\zeta \\ \theta=ca\xi+c'a'.\upsilon+c'a''.\zeta \end{array}\right\} \quad (7)$$

celles-ci donnent, ayant égard aux équations (6) :

$$\left.\begin{array}{l} \xi a=\alpha a+\delta b+\theta c \\ \xi b=\delta a+\beta b+\varepsilon c \\ \xi c=\theta a+\varepsilon b+\gamma c \end{array}\right\} \quad (8)$$

$$\left.\begin{array}{l} \upsilon a'=\alpha a'+\delta b'+\theta c' \\ \upsilon b'=\delta a'+\beta b'+\varepsilon c' \\ \upsilon c'=\theta a'+\varepsilon b'+\gamma c' \end{array}\right\} \quad (9)$$

$$\left.\begin{aligned}\zeta a'' &= \alpha a'' + \delta b'' + \theta c''\\ \zeta b'' &= \delta a'' + \beta b'' + \varepsilon c''\\ \zeta c'' &= \theta a'' + \varepsilon b'' + \gamma c''\end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Par l'élimination de a, b, c, des équations (8), on trouve l'équation suivante entre ξ, et les quantités connues α, β, γ, etc. :

$$-\xi)(\beta-\xi)(\gamma-\xi)-\delta^2(\gamma-\xi)-\varepsilon^2(\alpha-\xi)-\theta^2(\beta-\xi)+2\delta\varepsilon\theta=0. \quad (11)$$

On voit de suite qu'on trouve une semblable équation, en υ et en ζ, en éliminant a', b', c' entre les équations (9), et a'', b'', c'' entre les équations (10) ; ainsi, si on développe l'équation (11), et qu'on remplace ξ par u, on obtient :

$$u^3-(\alpha+\beta+\gamma)u^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha-\delta^2-\varepsilon^2-\theta^2)u+\alpha\varepsilon^2+$$
$$+\beta\theta^2+\gamma\delta^2-2\delta\varepsilon\theta-\alpha\beta\gamma=0; \qquad (12)$$

les trois racines sont les valeurs de ζ, υ et ξ.

Les équations (8) donnent :

$$a\big((\alpha-\xi)\xi-\delta\theta\big)=b\big((\beta-\xi)\xi-\delta\varepsilon\big)=c\big((\gamma-\xi)\xi-\theta\varepsilon\big)$$

$$\left.\begin{aligned}\lambda a &= \frac{1}{(\alpha-\xi)\xi-\delta\theta}\\ \lambda b &= \frac{1}{(\beta-\xi)\xi-\varepsilon\delta}\\ \lambda c &= \frac{1}{(\gamma-\xi)\xi-\theta\varepsilon}\\ \lambda^2 &= \frac{1}{\big((\alpha-\xi)\xi-\delta\theta\big)^2}+\frac{1}{\big((\beta-\xi)\xi-\delta\varepsilon\big)^2}+\frac{1}{\big((\gamma-\xi)\xi-\theta\varepsilon\big)^2},\end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

On trouve de la même manière a', b', c' en υ, et a'', b'', c'' en ζ.

DÉMONSTRATION

des formules qui donnent sin$(a+b)$, etc.

PAR M. A. RISPAL,
Elève de l'Ecole normale.

—

On peut arriver à la démonstration de ces formules d'une façon très-simple et dès le commencement même de la trigonométrie, en donnant les définitions suivantes des *lignes* trigonométriques.

BAC étant un certain angle,

Si on abaisse d'un point quelconque D de AB, une perpendiculaire DF sur AC,

Les rapports $\frac{DF}{AF}$, $\frac{DF}{AD}$, $\frac{AF}{AD}$ sont constants pour l'angle A, quelle que soit la perpendiculaire DF.

Ces rapports peuvent donc servir à déterminer parfaitement cet angle.

Le premier, $\frac{DF}{AF}$, est appelé tangente de l'angle A.

Le deuxième, $\frac{DF}{AD}$, est dit le sinus de l'angle A.

Et le troisième, $\frac{AF}{AD}$, est appelé le cosinus.

Alors nous ne dirons plus les *lignes*, mais bien les rapports trigonométriques (*).

(*) ces définitions sont celles du Manuel de géométrie et devraient être adoptées. Tm.

Ces définitions nous donnent immédiatement :

$$DF = AF . \operatorname{tang} A, \quad DF = AD \sin A, \quad AF = AD \cos A.$$

La troisième nous montre que la projection d'une ligne sur une autre est égale à la longueur de cette même ligne multipliée par le cosinus de l'angle compris ; car AC est la projection de AD.

On aurait aussi dès lors :

$$DF = AD \cos D,$$

mais

$$DF = AD \sin A ;$$

donc

$$\sin A = \cos D = \cos (90^\circ - A) ;$$

ce qui montre que le sinus d'un angle est égal au cosinus du complément de cet angle.

On voit aisément que si on projette AF et FD sur l'hypoténuse AD, cette hypoténuse AD est égale à la somme des projections de ces deux lignes.

Donc

$$AD = AF \cos A + FD \cos D.$$

$$\cos A = \frac{AF}{AD}, \quad \cos D = \frac{FD}{AD}.$$

Substituant ces deux valeurs, il vient :

$$AD = \frac{\overline{AF}^2}{AD} + \frac{\overline{FO}^2}{AD} ;$$

ou

$$\overline{AF}^2 + \overline{FD}^2 = \overline{AD}^2 ;$$

ce qui démontre, en passant, le carré de l'hypoténuse.

Si le triangle est quelconque, comme ABC, on pourra voir, avec la plus grande simplicité, que les côtés sont entre eux dans les mêmes rapports que les sinus des angles opposés.

Venons maintenant à la démonstration qui fait l'objet de ce théorème.

Je suppose que j'ai deux angles a et b, dont la somme est :

$$< 180^\circ \ (\textit{fig. 9 bis}).$$

Elle peut différer aussi peu de 180° qu'on voudra, et le théorème n'en sera pas moins vrai.

Sur une droite indéfinie AB, je fais un angle BAC $= a$.

En un point quelconque C de la droite AC, je fais un angle $= b$.

J'obtiens ainsi le triangle ACD, dans lequel l'angle extérieur CDB $= a + b$.

Par le théorème des projections, on a immédiatement :

$$AC = AD \cos a + CD \cos b.$$

[On sait que cette égalité est toujours vraie ; car si, par exemple, l'angle b était obtus, le deuxième terme du deuxième membre serait négatif ; mais le cosinus d'un angle obtus est négatif. On a donc deux signes — qui se réduisent à + par les règles de la soustraction.]

Si maintenant je remplace dans l'égalité précédente les côtés par les sinus des angles opposés, ce qui ne trouble pas l'égalité, puisque ces sinus sont proportionnels aux côtés, j'aurai l'égalité

$$\sin D = \sin b \cos a + \sin a \cos b.$$

Or $\sin D = \sin (a + b)$, puisque ces deux angles sont supplémentaires. Donc

$$\sin (a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a.$$

On aurait de même :

$$AD = AC \cos a - CD \cos (a + b) ;$$

d'où

$$CD . \cos (a + b) = AC \cos a - AD.$$

Et en remplaçant, comme tout à l'heure, les côtés par les sinus :

$$\begin{aligned} \sin a . \cos (a + b) &= \cos a . \sin (a + b) - \sin b , \\ &= \cos a [\sin a \cos b + \sin b \cos a] - \sin b , \\ &= \sin a [\cos a \cos b - \sin a \sin b]. \end{aligned}$$

Donc $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b.$

Si maintenant, dans les deux formules que nous venons de trouver, on fait $a+b=a'$, $b=a'-a$, elles deviennent :

$$\sin a \,.\, \cos(a'-a) + \sin(a'-a)\cos a = \sin a',$$
$$\cos a \,.\, \cos(a'-a) - \sin a \sin(a'-a) = \cos a'.$$

Ces deux formules, qui sont deux équations du premier degré, donneront :

$$\cos(a'-a) \quad \text{et} \quad \sin(a'-a).$$

On a donc les quatre formules :

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a,$$
$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b,$$
$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a,$$
$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b.$$

Puisque les trois dernières formules ont été déduites de la première, on voit qu'il suffit de démontrer la généralité de la première. Or elle est vraie, tant que l'on a $a+b<180^\circ$; il est donc facile de l'étendre au cas où l'on aurait $a+b>180^\circ$, et en général à tous les autres cas.

Ainsi, par exemple, si on a :

$$a+b>180,$$

je puis supposer :

$$a+b = 180 + a' + b';$$
$$a = 90 + a', \quad b = 90 + b'.$$

Alors

$$\sin(a+b) = \sin(180 + a' + b') = -\sin(a'+b').$$

Or $a'+b'$ étant <180, on a :

$$-\sin(a'+b') = -\sin a' \cos b' - \sin b' \cos a'.$$

Mais $\sin a' = \sin(a-90) = -\cos a,$

$\cos a' = \cos(a-90) = \sin a.$

De même $\qquad \sin b' = -\sin b,$

$$\cos b' = \cos b.$$

Ainsi $\qquad -\sin(a'+b') - \sin a \cos b + \sin b \cos a.$

Or $\qquad \sin(a+b) = -\sin(a'+b').$

Donc $\qquad \sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a.$

On pourrait ainsi étendre la formule à tous les cas possibles.

Cette généralisation montre immédiatement que la formule est vraie de 0° à 360°; car $a'+b'$ est aussi peu différente de 180° que l'on voudra. D'ailleurs, $a+b$ est $>$ 180°; donc on voit que la formule est vraie de 180° à 360°, comme de 0° à 180°. Nous avons posé $a+b = 180 + a'+b'$; donc $a+b$ est aussi peu différent qu'on le veut de 360°.

Or, au delà de 360°, on retombe sur les mêmes valeurs des rapports trigonométriques que de 0° à 360°. Ainsi la formule est toujours vraie et dans tous les cas, lorsque a et b sont positifs.

On prouverait avec la même facilité que la formule est toujours vraie, lorsque $a+b$ ou l'un des deux angles est négatif. Elle est donc vraie dans tous les cas.

Note. Cette démonstration rentre dans celle qui a été indiquée dans une note, t. III, p. 375. Tm.

DÉMONSTRATIONS ÉLÉMENTAIRES

de plusieurs propriétés de la spirale logarithmique.

PAR M. TURQUAN,

Professeur au Collége royal de Pontivy.

—

1° Le lieu de l'équation $r = ke^{m\varphi}$ rapportée aux coordonnées polaires r et φ, est une spirale, qu'on a appelée logarithmique, parce que l'angle φ croissant en progression arithmétique, les rayons vecteurs correspondants croissent en progression géométrique.

On voit facilement que k est le rayon vecteur correspondant à $\varphi=0$, et qu'en faisant varier la direction de l'axe polaire, on peut faire passer k par tous les degrés de grandeur; et que réciproquement si on fait passer le coefficient k par différents degrés de grandeur, on changera seulement la direction de l'axe polaire; et qu'ainsi la grandeur de ce coefficient n'a aucune influence sur les dimensions de la courbe. D'ailleurs ce coefficient ne peut pas être nul.

Une des propriétés les plus remarquables de la spirale logarithmique, qui peut lui servir de définition géométrique, c'est celle de couper ses rayons vecteurs sous un angle constant. On démontre assez facilement cette propriété, en cherchant l'expression de l'angle que la tangente en un point donné fait avec le rayon vecteur qui aboutit à ce point; car cet angle est donné par la formule $\tan \theta = r \lim \frac{h}{k}$; r étant le rayon vecteur du point donné, k la différence de ce rayon vecteur et du rayon voisin, et h l'angle de ces deux rayons. On aura donc:

$$\tan \theta = r \lim \frac{\varphi_1 - \varphi}{r_1 - r} = r \lim \frac{\varphi_1 - \varphi}{k(e^{m\varphi_1} - e^{m\varphi})} =$$

$$= r \lim \frac{1}{mk\left\{1 + \frac{m}{1.2}(\varphi_1 + \varphi) + \frac{m^2}{1.2.3}(\varphi_1^2 + \varphi_1\varphi + \varphi^2) + \ldots\right\}};$$

et à la limite, quand $\varphi_1 = \varphi$

$$\tan \theta = r \times \frac{1}{km\left(1 + m\varphi + \frac{m^2}{1.2.}\varphi^2 + \ldots\ldots\right)} = \frac{r}{mr} = \frac{1}{m}.$$

Il est essentiel de remarquer que la constante m est la cotangente de l'angle θ.

2° Réciproquement la courbe qui coupe ses rayons vecteurs sous un angle constant, est une spirale logarithmique. Car si (*fig.* 10 bis), MM'M''... est le lieu géométrique demandé, et qu'on mène les rayons vecteurs AM, AM'... qui fassent entre eux un angle constant, qu'on mène des tangentes aux points MM'M'', et qu'on prolonge les rayons vecteurs jusqu'à la rencontre des tangentes en TT'T''... les triangles AM'T AM''T' AM'''T''... seront équiangles et semblables, donc AM est à AM' dans le même rapport que AM' est à AM''... etc. C'est-à-dire en d'autres termes que l'angle φ croissant en progression arithmétique, le rayon vecteur croît en progression géométrique ; donc le rayon vecteur r est lié à l'angle φ par la relation

$$r = ka^{\varphi} \quad \text{ou} \quad r = ke^{m\varphi} \quad \text{en posant} \quad a = e^{m}.$$

3° Si on fait croître l'angle φ depuis une certaine valeur φ_1 jusqu'à $\varphi_1 + 2\pi$, l'arc décrit par l'extrémité du rayon vecteur s'appelle une spire. L'angle continuant à croître de la même quantité 2π, on aura une seconde spire. Ces deux spires sont des arcs semblables.

Supposons pour plus de simplicité, que ces deux spires commencent à l'axe polaire ; si par le pôle on mène une droite qui fasse avec cet axe polaire un angle quelconque α, et qu'on joigne les points où cette droite rencontre les deux spires, à l'origine des spires, on aura deux triangles semblables, comme ayant un angle égal compris entre côtés proportionnels. En effet, le rapport de ces deux côtés pour le triangle inscrit dans la première spire est

$$\frac{r}{r'} = \frac{k}{ke^{m\alpha}} = \frac{1}{e^{m\alpha}};$$

le rapport des deux côtés homologues du triangle inscrit dans la seconde spire est

$$\frac{r_1}{r'_1} = \frac{ke^{2m\pi}}{ke^{2m\pi+m\alpha}} = \frac{1}{e^{m\alpha}}.$$

Une autre spire dont l'origine serait ailleurs que sur l'axe polaire serait encore un arc semblable aux deux spires précédentes. En effet soit φ_1 l'angle que la droite qui passe par le pôle et l'origine de la spire fait avec l'axe polaire, menons un rayon vecteur qui fasse avec cette droite un angle α, et joignons le point où il rencontre la spire à l'origine de cette spire ; le rapport des côtés qui comprennent l'angle α dans le triangle ainsi formé, sera encore $\frac{1}{e^{m\alpha}}$.

On voit facilement maintenant que si r_1 et r_2 sont deux rayons vecteurs qui fassent entre eux un angle quelconque α, et r' et r'' deux autres rayons vecteurs qui fassent entre eux le même angle, ces rayons vecteurs étant prolongés indéfiniment, intercepteront sur la spirale une infinité d'arcs qui sont semblables.

4° Il résulte de là que pour voir si deux spirales logarithmiques sont semblables, il suffit de mener dans chacune deux rayons vecteurs faisant entre eux le même angle ; de joindre les extrémités de ces rayons vecteurs, et d'examiner si les deux triangles ainsi formés sont semblables. Soient donc :

$$r = ke^{m\varphi} \quad \text{et} \quad s = k'e^{m'\varphi},$$

les équations de deux spirales logarithmiques, en faisant les constructions du numéro précédent ; le rapport des deux côtés comprenant l'angle égal pour le triangle inscrit dans la première spirale sera $\frac{r}{r'} = \frac{1}{e^{m\alpha}}$, le rapport de ces deux côtés pour le triangle inscrit dans la seconde spirale sera $\frac{s}{s'} = \frac{1}{e^{m'\alpha}}$. Or ces deux triangles ne pourront être semblables, et par conséquent les deux spirales elles-mêmes ne pourront être semblables, qu'autant qu'on aura $m = m'$. Mais alors les deux spirales seront égales ; et seront seulement différemment placées si k' est différent de k.

Ainsi la spirale logarithmique jouit de cette propriété singulière, de n'avoir aucune courbe semblable à elle-même.

5° La spirale logarithmique est facilement rectifiable ; en effet, si on considère un polygone (*Fig.* 11 bis) MM'M''M'''... dont les côtés coupent sous un angle constant $AM'''M'' = \theta$ les rayons vecteurs qui aboutissent à ses extrémités, qu'on projette les côtés MM', M'M'', M''M'''... sur AM', AM'', AM'''... et qu'on rabatte les projections des sommets sur le rayon vecteur AM'''... La longueur M''M''', différence des rayons extrêmes Ap et AM''' sera égale à

$$MM' \cos\theta + M'M'' \cos\theta + M''M''' \cos\theta —,$$

d'où

$$MM'M''M''' = \frac{AM''' — Ap}{\cos\theta}.$$

Or cette propriété a lieu indépendamment de la longueur et du nombre des côtés MM', M'M'', M''M'''... etc. Donc elle aura lieu aussi quand ces côtés seront infiniment petits ; mais alors Ap deviendra AM ; et le polygone se changera en une spirale logarithmique. Donc un arc de spirale logarithmique est égal à la différence des rayons vecteurs qui aboutissent à ses extrémités, divisé par le cosinus de l'angle constant θ, sous lequel ces rayons vecteurs sont coupés par la courbe.

De là la construction suivante : si par l'extrémité M''' de l'arc MM''', où aboutit le plus grand rayon vecteur, on mène une tangente, qu'on prenne sur AM''' une longueur Am = AM ; que par le point m on mène une perpendiculaire à AM', et qu'on prolonge cette perpendiculaire jusqu'à ce qu'elle rencontre la tangente en T ; la partie M‴T sera égale à l'arc MM‴.

Toutes ces propriétés subsistent, quelle que soit la grandeur du rayon k correspondant à $\varphi = 0$. Ainsi rien n'empêche de supposer ce rayon infiniment petit et de compter l'arc MM′ à partir de son extrémité, ou, ce qui sera la même chose, à compter les arcs à partir du pôle lui-même ; alors, d'après la construction précédente, si par le pôle on mène une perpendiculaire à AM′, et qu'on prolonge cette perpendiculaire jusqu'à la rencontre de la tangente eu T′, la partie M′T′ de cette tangente sera égale à l'arc de spirale logarithmique compté à partir du pôle jusqu'au point M′. Et cet arc a une longueur finie, quoique composé d'un nombre infini de spires.

Si la distance mM′ est partagée en R, en deux parties proportionnelles à deux longueurs données a et b, la perpendiculaire élevée à AM′ par le point R partagera aussi M′T dans le rapport de a à b ; d'où il résulte que si du pôle comme centre avec un rayon égal à AR on décrit une circonférence, cette circonférence partagera l'arc MM′ dans le rapport de a à b.

On voit facilement par quelle construction on partagerait un arc de spirale logarithmique en autant de parties égales qu'on voudrait. Je ferai seulement remarquer que le rayon du cercle qui partage cet arc en deux parties égales est la moyenne différentielle des rayons vecteurs des extrémités de cet arc.

6° Je passerai maintenant à la quadrature du secteur compris entre deux rayons vecteurs et l'arc qu'ils interceptent. Je partage l'angle de ces deux rayons vecteurs en un nombre n de parties égales, assez grand pour que les arcs interceptés par les rayons vecteurs de division puissent être pris pour une ligne droite. Soient $r_1, r_2, r_3 \ldots r_{n+1}$ la suite de ces rayons vecteurs, $s_1, s_2, s_3 \ldots$ les arcs correspondants ; chaque triangle élémentaire aura pour mesure :

$$\frac{1}{2} r_2 s_1 \sin\theta \qquad \text{ou} \qquad \frac{1}{2} r_2 (r_2 - r_1) \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\frac{1}{2} r_3 s_2 \sin\theta \qquad \frac{1}{2} r_3 (r_3 - r_2) \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{1}{2} r_{n+1} s_n \sin\theta \qquad \frac{1}{2} r_{n+1} (r_{n+1} - r_n) \frac{\sin\theta}{\cos\theta}.$$

Les rayons vecteurs croissant en progression géométrique, je désignerai par q la raison de cette progression, et j'aurai :

$$r_2 = q r_1 \quad r_3 = q^2 r_1 \quad r^4 = q^3 r_1 \quad \ldots\ldots \quad r_{n+1} = q^n r_1$$

$$r_2 - r_1 (q-1) \quad r_3 - r_2 = q r_1 (q-1) \ \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots \ r_{n+1} - r_n = q^{n-1} r_1 (q-1) ;$$

et par suite, pour les surfaces des triangles élémentaires :

$$\frac{1}{2} \operatorname{tang}\theta\, r_1^2 (q-1) q ; \qquad \frac{1}{2} \operatorname{tang}\theta\, r_1^2 (q-1) q^3$$

$$\frac{1}{2} \operatorname{tang}\theta\, r_1^2 (q-1) q^5 \ \ldots \ \frac{1}{2} \operatorname{tang}\theta\, r_1^2 (q-1) q^{2n-1}.$$

La somme de ces aires sera :

$$\frac{1}{2} \operatorname{tang}\theta\, r_1^2 (q-1)(q+q^3+q^5+\ldots+q^{2n-1}) = \frac{1}{2} \operatorname{tang}\theta\, r_1^2 q \frac{q^{2n}-1}{q+1}$$

ou

$$\frac{1}{2} \operatorname{tang}\theta\, r_1^2 q \frac{e^{2m(\varphi_{n+1}-\varphi_1)}-1}{q+1},$$

φ_{n+1} et φ_1 étant les angles correspondants aux rayons vecteurs r_{n+1} et r_1. Mais cette expression n'est pas encore rigoureusement l'aire du secteur que nous voulons mesurer. Il faudrait pour cela que le nombre n des parties dans lesquelles on a partagé l'angle $\varphi_{n+1} - \varphi_1$ fût infiniment grand. Pour introduire cette hypothèse, il suffira de faire $q = 1$. On aura donc pour l'aire A du secteur de spirale logarithmique, en remarquant que $\tang\theta = \frac{1}{m}$, et que

$$r_1^2 e^{2m(\varphi_{n+1} - \varphi_1)} = r^2_{n+1},$$

$$A = \frac{1}{4m}(r^2_{n+1} - r_1^2).$$

On aura encore :

$$A = \frac{1}{2} s \left(\frac{r_{n+1} - r_1}{2}\right) \sin\theta,$$

en appelant s l'arc compris entre r_{n+1} et r_1.

Soit R un rayon vecteur qui partage l'aire A en deux parties proportionnelles à a et b, on aura la proportion :

$$r_{n+1}^2 - R^2 : R^2 - r_1^2 :: a : b, \text{ d'où } R^2 = \frac{b}{a+b} r_{n+1}^2 + \frac{a}{a+b} r_1^2.$$

Ainsi, si l'on cherche le côté d'un carré qui soit au carré construit sur r_{n+1} dans le rapport de b à $a+b$, et le côté d'un carré qui soit au carré de r_1 dans le rapport de a à $a+b$, puis que du pôle comme centre avec un rayon égal à la diagonale du rectangle construit sur ces deux côtés, on décrive une circonférence, et qu'on joigne le pôle au point où elle rencontre l'arc du secteur ; ce rayon vecteur partagera le secteur en deux parties proportionnelles à a et b.

7° Par les points M et M′ (*fig.* 12 *bis*) menons les tangentes, les normales et les rayons vecteurs ; le quadrilatère formé par les deux tangentes et les deux normales sera inscriptible ; il en sera de même du quadrilatère formé par les deux rayons vecteurs et les deux tangentes. On voit même que ces deux quadrilatères seront inscriptibles dans une même circonférence qui aura pour diamètre la droite qui joint le point d'intersection des deux normales au point d'intersection des deux tangentes.

Si maintenant on imagine que le point M′ se rapproche indéfiniment du point M jusqu'à venir coïncider avec lui, le point d'intersection des deux normales deviendra le centre de courbure ; en même temps la droite qui joint le pôle aux points d'intersection des deux tangentes se confondra avec le rayon vecteur du point M.

Donc la projection du rayon de courbure sur le rayon vecteur est égale à ce rayon vecteur lui-même. Donc on aura :

$$r = \rho \sin\theta, \quad \text{d'où} \quad \rho = r \times \frac{\frac{1}{m}}{\sqrt{1+\frac{1}{m^2}}}\ ; \ \rho = r\sqrt{1+m^2}.$$

Par conséquent, si du pôle on mène une perpendiculaire au rayon vecteur, cette perpendiculaire ira rencontrer la normale au centre de courbure, et la partie de la normale comprise entre ce point et le point M sera le rayon de courbure.

La distance r' du pôle au centre de courbure sera donnée par la proportion

$$r' : r :: \cos\theta . \sin\theta \quad \text{ou} \quad r' : r :: m : 1, \quad \text{d'où} \quad r' = mr;$$

ou, si on remplace r par sa valeur en fonction de φ,

$$r' = mke^{m\varphi}.$$

Ce qui fait voir que le lieu des centres de courbure ou la développée est une spirale logarithmique égale à la première, mais différemment placée.

8° Si, par un point M (*fig.* 13), on mène une tangente et le rayon vecteur du point M ; puis, par le pôle, une droite qui fasse avec le rayon vecteur un angle quelconque α, et qu'on prolonge cette droite jusqu'à la rencontre de la tangente en T. Si, par un autre point M', on mène encore une tangente et un rayon vecteur ; puis, par le pôle, une droite qui fasse avec ce rayon vecteur un angle égal à α, et qui déterminera sur la tangente un point T' ; le lieu des points.

T, T' sera une spirale logarithmique; car les triangles AMT, AM'T' étant semblables comme équiangles, les angles MTA, M'T'A sont égaux. Or la tangente MT est évidemment normale au lieu des points T. Donc cet angle MTA est le complément de l'angle sous lequel ce lieu géométrique coupe ses rayons vecteurs AT. Cet angle, sous lequel cette nouvelle spirale coupe ses rayons vecteurs, n'est plus égal à l'angle θ, mais à l'angle θ augmenté de l'excès de l'angle MAT sur un angle droit, si l'angle MAT est obtus, ou diminué de l'excès d'un angle droit sur l'angle MAT, si cet angle est aigu.

Cette spirale ne sera une développante de la première que dans un seul cas, celui où l'angle MAT est droit; et, dans ce cas, le lieu du point T est une spirale logarithmique égale à la première. Dans ce cas encore, le point T est l'extrémité de la sous-tangente.

Note Cette méthode ingénieuse est celle de Wallis, celle qui régnait avant l'invention des nouveaux calculs. Mais pourquoi marcher en arrière? Pourquoi rendre long et pénible ce qui est court et facile? Le calcul différentiel est chose élémentaire et aussi rigoureux que l'échafaudage perpétuel des limites; mais on ne l'enseigne pas. Cette négligence est la honte de l'enseignement collégial en France. Tm.

SOLUTION

d'un problème sur les arrangements.

PAR M. DROT,
Professeur au Collége de Poitiers.

---

1. Étant données plusieurs espèces de lettres $a, b, c \ldots . r, s$

et un nombre déterminé de lettres de chaque espèce, de manière que leur produit puisse être représenté par $a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots r^\rho s^\sigma$ trouver le nombre des arrangements de ces lettres n à n. (Le nombre total des lettres $\alpha + \beta + \gamma + \ldots + \rho + \sigma = m$.)

On adopte, pour les arrangements en question, la notation $(a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots r^\rho s^\sigma A_n)$. Cela posé, le nombre des arrangements qui ne contiennent pas a est évidemment $(b^\beta c^\gamma \ldots r^\rho s^\sigma A_n)$. Pour avoir ceux qui contiennent a une fois, on arrangera $n - 1$ à $n - 1$ les lettres $b^\beta c^\gamma \ldots r^\rho s^\sigma$, et dans chacun de ces arrangements, on placera a à toutes les places possibles au nombre de n; le nombre des arrangements en question sera donc $n(b^\beta c^\gamma \ldots r^\rho s^\sigma A_{n-1})$. Pour avoir les arrangements qui contiennent a deux fois, arrangeons $n - 2$ à $n - 2$ les lettres $b^\beta c^\gamma \ldots r^\rho s^\sigma$ et disposons dans chacun de ces arrangements, de toutes les manières possibles, les lettres a et a'; la lettre a pourra être placée à $n - 1$ places différentes; et en prenant un des résultats obtenus, la lettre a' pourra encore y être placée à n places différentes; donc, dans chacun des arrangements en question, il y aura $n(n - 1)$ manières de disposer les lettres a et a'. Supposons actuellement $a = a'$; en prenant un des arrangements précédemment formés, et en y permutant de toutes les manières possibles, c'est-à-dire de $1 \cdot 2$ manières, les deux lettres a et a', sans toucher aux autres lettres, on aura autant d'arrangements qui précédemment étaient différents et qui maintenant deviennent les mêmes. Donc, en résumé, le nombre de manières de disposer deux lettres semblables dans chacun des arrangements $n - 2$ à $n - 2$ de $b^\beta c^\gamma \ldots r^\rho s^\sigma$ se réduira à $\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$; donc le nombre total des arrangements qui contiennent a deux fois est représenté par $\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}(b^\beta c^\gamma \ldots r^\rho s^\sigma A_{n-2})$. On trouvera, par des raisonnements analogues, que le nombre des arrangements qui contiennent a trois fois est exprimé par $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}(b^{6}c^{\gamma}\ldots.r^{\rho}s^{\sigma}A_{n-3})$; que le nombre des arrangements qui contiennent a α fois est exprimé par $\frac{n(n-1)(n-2)\ldots.(n-\alpha+1)}{1.2.3\ldots.\alpha}\left(b^{6}c^{\gamma}\ldots.r^{\rho}s^{\sigma}A_{n-\alpha}\right)$. Donc on a la formule générale :

$$(a^{\alpha}b^{6}c^{\gamma}\ldots.r^{\rho}s^{\sigma}A_{n})=(b^{6}c^{\gamma}\ldots.r^{\rho}s^{\sigma}A_{n})+n(b^{6}c^{\gamma}\ldots.r^{\rho}s^{\sigma}A_{n-1})+$$
$$+\frac{n(n-1)}{1.2}(b^{6}c^{\gamma}\ldots.r^{\rho}s^{\sigma}A_{n-2})+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}(b^{6}c^{\gamma}\ldots.r^{\rho}s^{\sigma}A_{n-3})$$
$$+\ldots.+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots.(n-\alpha+1)}{1.2.3\ldots.\alpha}(b^{6}c^{\gamma}\ldots.r^{\rho}s^{\sigma}A_{n-\alpha}).$$

Cette formule ramène le problème proposé à d'autres du même genre, mais plus simples, sur lesquels on raisonnera de la même manière.

On observera 1° que si $\alpha > n$, on pourra évidemment le réduire à n sans rien changer; de manière que si $\alpha \geqq n$, $6 \geqq n$, $\gamma \geqq n \ldots.$, le problème se ramènera à celui des arrangements complets des lettres $a, b, c \ldots. r, s$ pris n à n.

2° Que si $\alpha=6=\gamma=\ldots=\sigma=1$, le problème devient un problème d'arrangements ordinaires.

3° Que si $6+\gamma+\ldots.+\rho+\sigma<n$, l'expression $(b^{6}c^{\gamma}\ldots.r^{\rho}s\ A_{n})=0$; de même pour les autres, dans les cas semblables.

4° Que si $n=\alpha$, l'expression $(b^{6}c^{\gamma}\ldots.r^{\rho}s\ A_{0})$ devra être considérée comme égale à 1.

On parviendra finalement à avoir à calculer des expressions telles que $s^{\sigma}A_{n}$, et une pareille expression revient, d'après la première remarque, si $\sigma \geqq n$, à $s^{n}A_{n}=1$; et si $\sigma<n$, elle est égale à 0, d'après la troisième remarque.

2. Examinons le cas particulier de $m=n$; alors, dans la formule générale, tous les termes du second membre disparaissent, excepté le dernier, et on a successivement :

$$(a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots r^\rho s^\sigma A_m) = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-\alpha+1)}{1.2.3\ldots\alpha}(b^\beta c^\gamma \ldots r^\rho s^\sigma A_{m-\alpha}),$$

$$(b^\beta c^\gamma \ldots r^\rho s^\sigma A_{m-\alpha}) = \frac{(m-\alpha)(m-\alpha-1)\ldots(m-\alpha-\beta+1)}{1.2.3\ldots\beta}(c^\gamma \ldots r^\rho s^\sigma A_{m-\alpha-\beta}),$$

$$(c^\gamma \ldots r^\rho s^\sigma A_{m-\alpha-\beta}) = \frac{(m-\alpha-\beta)(m-\alpha-\beta-1)\ldots(m-\alpha-\beta-\gamma+1)}{1.2.3\ldots\gamma}(\ldots r^\rho s^\sigma A_{m-\alpha-\beta-\gamma}),$$

. . . .

$$(r^\rho s^\sigma A_{m-\alpha-\beta-\gamma-\ldots}) = \\ = \frac{(m-\alpha-\beta-\gamma-\ldots)\ldots(m-\alpha-\beta-\gamma-\ldots-\rho+1)}{1.2.3\ldots\rho}(s^\sigma A_{m-\alpha-\beta-\gamma-\ldots\rho}),$$

$$(s^\sigma A_{m-\alpha-\beta-\gamma-\ldots\rho}) = \\ = (s^\sigma A_\sigma) = \frac{(m-\alpha-\beta-\gamma-\ldots-\rho)(m-\alpha-\beta-\gamma\ldots-\rho-1)\ldots(m-\alpha-\beta-\ldots-\rho-\sigma+1)}{1.2.3\ldots\sigma} \\ = \frac{\sigma(\sigma-1)(\sigma-2)\ldots1}{1.2.3\ldots\sigma} = 1\,;$$

d'où

$$(a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots r^\rho s^\sigma A_m) = \frac{1.2.3.4\ldots(m-1)m}{(1.2\ldots\alpha)(1.2\ldots\beta)\ldots(1.2\ldots\sigma)},$$ formule connue.

3. La question analogue pour les combinaisons se traite de la même manière ; seulement, dans la formule générale, tous les termes du second membre ont 1 pour coefficient. (Cette formule relative aux combinaisons m'avait été donnée autrefois et je l'ai étendue aux arrangements.)

NOTE

sur la convergence des séries.

I. La convergence des séries présente beaucoup d'analogie avec l'asymptotisme des courbes. En effet, lorsqu'une courbe a une asymptote, soit rectiligne, soit parabolique ou hyperbolique, cela signifie que les parties très-éloignées de l'origine se confondent sensiblement avec une droite, une parabole ou hyperbole de divers degrés, et peuvent être calculées comme telles. Il en est de même des séries. Lorsque des termes très-éloignés du premier se déduisent les uns des autres d'après une loi sensiblement la même qu'on observe dans une seconde série connue, on peut dire que la première série s'approche asymptotiquement de la seconde et en partage les caractères ; si donc celle-ci est convergente ou divergente pour certaines valeurs de la variable, la première série sera aussi convergente ou divergente pour ces mêmes valeurs.

II. Il s'agit donc de trouver des séries types bien connues qui puissent servir, par moyen de comparaison, à établir les caractères de convergence des autres séries. Le premier type qui s'offre naturellement, c'est la progression géométrique, convergente ou divergente, selon que le rapport est inferieur ou supérieur à l'unité. Si donc une série a chacun de ses termes respectivement moindre ou plus grand que le terme de même quantième d'une progression géométrique convergente ou divergente, il est évident que la série elle-même sera aussi convergente ou divergente.

Soit u_0, u_1, u_2 .... u_n + etc., la forme générale d'une série numérique, si l'on a, pour terme général, $u_n = \frac{a}{r^n \varphi(n)}$; a étant un nombre constant et r un nombre inférieur à l'unité; $\varphi(n)$ une fonction essentiellement croissante avec n; une telle série est convergente.

Exemple :

$$u_n = \frac{1}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,\ldots\, n} = \frac{1}{\varphi(n)};$$

de là

$$u_{n+m} = \frac{1}{(n+1)\,(u+2)\ldots(n+m)\,\varphi(n)};$$

or

$$\frac{1}{n+1 \ldots n+m} < \frac{1}{n^m};$$

donc les termes de cette série :

$$\frac{1}{\varphi(n)},\ \frac{1}{(n+1)\,\varphi(n)},\ \frac{1}{(n+1)\,(n+2)\,\varphi n},\ \text{etc.}$$

sont tous inférieurs aux termes correspondants de la progression géométrique convergente,

$$\frac{1}{\varphi n},\ \frac{1}{n\varphi(n)},\ \frac{1}{n^2\varphi(n)} + \text{etc.} \qquad \text{(A)}$$

Donc, la série qui a pour terme général $\frac{1}{\varphi(n)}$ est convergente; il est de plus évident que chacun de ses termes est moindre que la somme entière de la série (A), somme qui est égale à

$$\frac{1}{\varphi(n)} \cdot \frac{n}{n-1} = \frac{1}{1.2.3 \ldots n-1} \cdot \frac{1}{n-1} = u_{n-1} \cdot \frac{1}{n-1}.$$

Ainsi, en ajoutant les n premiers termes, le reste sera moindre que le produit du $n^{ème}$ terme par $\frac{1}{n-1}$: si l'on suppose $n = 11$, on aura $e = 2{,}7182818$, et l'erreur commise est moindre que

$$\frac{1}{1\,.\,2\,.\,3\ldots\,10\,.\,10} = \frac{1}{36288000} = 0{,}00000002\ ;$$

de sorte qu'elle n'altère pas la septième décimale (*).

III. 1° Théorème. Lorsque dans la série numérique

$$u_0,\ u_1 \ldots u_n + \text{etc.} \qquad \text{(A)}$$

chaque terme est inférieur à celui qui le précède, cette série (A) et la suivante

$$u_0,\ 2u_1,\ 4u_3,\ 8u_7,\ 16u_{15},\ 32u_{31} + \text{etc.} \qquad \text{(B)}$$

sont en même temps convergentes et divergentes (**) ; les indices sont une série récurrente ayant pour échelle de relation, $2, +1$.

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned} u_0 &= u_0, \\ 2u_1 &= 2u_1, \\ 4u_3 &< 2u_3 + 2u_2, \\ 8u_7 &< 2u_7 + 2u_6 + 2u_5 + 2u_4, \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Donc

$$u_0 + 2u_1 + 4u_3 + \text{etc.} < u_0 + 2(u_1 + u_2 + \ldots + \text{etc.})$$

Ainsi, si la série (A) est convergente, la série (B) l'est aussi.

On a encore :

$$\begin{aligned} u_0 &= u_0, \\ 2u_1 &> u_1 + u_2, \\ 4u_3 &> u_3 + u_4 + u_5 + u_6, \\ 8u_7 &> u_7 + u_8 + u_9 + \ldots\ u_{14}. \end{aligned}$$

(*) Cauchy, Cours d'analyse, 1821, p. 129.
(**) *Ibid.*, p. 135.

Donc

$$u_0 + 2u_1 + 4u_3 + \text{etc.} > u_0 + u_1 + u_2 + \ldots.$$

Si donc la série (A) est divergente, la série (B) est diver geute à fortiori ; donc aussi réciproquement.

IV. Exemple :

$$1 + \frac{1}{2^\mu} + \frac{1}{3^\mu} + \frac{1}{4^\mu} + \text{etc.} \qquad (A)$$

On aura pour (B) :

$$1 + 2^{1-\mu} + 4^{1-\mu} + 8^{1-\mu} + \text{etc.}$$

Cette série (B) est une progression géométrique convergente pour $\mu > 1$, et divergente dans le cas contraire. Ainsi (A) est convergente si $\mu > 1$, et divergente si $\mu = 1$ ou est < 1.

V. La progression $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} +$ etc. a été nommée *harmonique*, parce que les rapports entre deux termes consécutifs représentent des intervalles musicaux. Ainsi une corde de longueur 1 rendant un son,

celle de longueur $\frac{1}{2}$ rend l'octave de ce son.

$\frac{2}{3}$ la quinte.

$\frac{3}{4}$ la quarte juste.

$\frac{4}{5}$ la tierce majeure. (*V*. p. 12.)

$\frac{5}{6}$ la tierce mineure.

$\frac{8}{9}$ la seconde majeure.

On suppose, d'ailleurs, que les cordes ont même tension et même diamètre.

VI. Cette progression harmonique jouit de la propriété que trois termes consécutifs forment une *proportion harmonique*, qui s'énonce ainsi : La différence des deux premiers termes est à la différence des deux derniers, comme le premier est au dernier.

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{4}:\frac{1}{4}-\frac{1}{5}::\frac{1}{3}:\frac{1}{5}.$$

Quatre points A, B, C, D se succédant en ligne droite, si l'on a, entre les trois distances AB, AC, AD, la proportion

$$AC-AB:AD-AC::AB:AD,$$

les quatre points sont situés *harmoniquement*.

VII. Quoique la série harmonique soit divergente, la somme augmente très-lentement; ainsi Euler trouve que la somme des 1000 premiers termes est 7,4849708605503, et en prenant le premier million de termes; 14,3927262228657 (*); Euler parvient à ces résultats par des considérations fondées sur le calcul différentiel; mais on peut arriver, sans sortir des éléments, à une limite. En effet, la somme des termes, depuis $\frac{1}{a+1}$ jusqu'à $\frac{1}{na}$ compris, est renfermée entre $n-1$ et $\frac{n-1}{n}$; ainsi la somme de $\frac{1}{200}$ jusqu'à $\frac{1}{1000}$ est <4; en raisonnant de la même manière, on trouve que de 1 à $\frac{1}{200}$, la formule est aussi inférieure à 4; donc de 1 à $\frac{1}{1000}$ la somme est moindre que 8.

VIII. Lorsque r est un nombre entier pair, Euler a démontré que la limite de la série A, divisée par π^r, donne toujours un quotient rationnel; par exemple :

(*) *Institutiones calculi different.*, t. I, p. 446, édit. de Pétersbourg.

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\text{etc.}, = \frac{1}{1.2.3}\cdot\pi^2$$

$$1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\text{etc.}, = \frac{2^2}{1.2.3.4.5}\cdot\frac{1}{3}\cdot\pi^4$$

$$1+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}\text{ etc.}, = \frac{2^4}{1.2.3.4.5.6.7}\cdot\frac{1}{3}\,\pi^6.$$

Les puissances de π sont multipliées par deux facteurs ; la formation du premier est évidente ; le second facteur se forme à l'aide de certains nombres, dits Bernoulliens, du nom de leur auteur, Jacques Bernoulli ; la loi de ces nombres a été trouvée, la première fois, je crois, par Laplace. Ainsi, si l'on pouvait démontrer l'irrationalité de la limite de la somme des puissances réciproques paires des nombres naturels, l'irrationalité de π^u serait aussi démontrée.

IX. Lorsque μ est un nombre entier impair, la limite est encore inconnue ; on ne sait de quelle transcendante elle est dépendante. Il est probable qu'elle dépend d'une transcendante hyperbolique ou elliptique. En effet, soit la courbe hyperbolique (*fig.* 14) donnée par l'équation $y=\frac{1}{x^{1+q}}$; q étant positif ; O est l'origine ; OX, OY les axes des coordonnées, asymptotes. Soit $OO'=1$, et $OM=1$; on démontre facilement que l'aire asymptotique renfermée entre la courbe MM'M''... (*fig.* 14), l'ordonnée OM et l'axe O'ABC..., a pour limite $\frac{1}{q}$; prenons les distances OO', O'A, AB, BC, etc., égales chacune à l'unité, et menons les ordonnées AM', BM'', CM''', et achevons les rectangles O'AM'D, ABM''D', BCM'''D'', etc. ; on aura :

$$AM'=\frac{1}{2^{1+q}}\,;\ BN''=\frac{1}{3^{1+q}};\ CM'''=\frac{1}{4^{1+q}}\,;$$

les aires des rectangles seront exprimées par ces mêmes fractions; or l'aire asymptotique étant limitée, il s'ensuit que la somme des aires rectangulaires est aussi limitée; mais lorsque q est négatif, l'espace asymptotique a pour limite $+\infty$, et alors on démontre aisément que l'aire du rectangle est plus grande que la moitié du trapèze rectiligne O'AM'M; or la somme de ces trapèzes est évidemment infinie; donc la somme des rectangles est aussi infinie. Je dois cette seconde partie de la démonstration à l'obligeance de M. le professeur Bourdonnay-Duclésio, auteur d'une savante thèse mathématique sur la distribution de l'électricité sur la surface des corps conducteurs. Le théorème général est dû à M. Cauchy (*). Cela suffit pour faire voir la connexion entre la somme des puissances réciproques et les aires hyperboliques.

X. A l'aide du théorème que nous venons de citer, M. Bertrand prouve facilement (**) que les séries :

$$1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\ldots\frac{1}{n^\alpha}+\ldots \qquad (1)$$

$$1+\frac{1}{2\,(l2)^\alpha}+\frac{1}{3\,(l3)^\alpha}+\ldots\frac{1}{n(ln)^\alpha}+\ldots \qquad (2)$$

$$(\mathrm{A}) \quad 1+\frac{1}{2l2\,(ll2)^\alpha}+\frac{1}{3\log 3\,(ll3)^\alpha}+\frac{1}{nln.(lln)^\alpha}+\ldots \qquad (3)$$

$$1+\frac{1}{2l2ll2\,(lll2)^\alpha}+\ldots\frac{1}{nlnlln\,(llln)^\alpha}+\ldots \qquad (4)$$

sont toutes convergentes si α est >1, et divergentes si α est égal à 1 ou plus petit que 1; nous avons déjà considéré la première série; pour la seconde, il faut recourir à la courbe hyperbolique donnée par l'équation

$$y=\frac{1}{x\,(\log x)^\alpha};$$

(*) Exercices de mathématiques, seconde année, 1827, p. 221.

(**) Journal des Mathématiques, fév. 1842, p. 38.

et dont l'aire asymptotique est exprimée par $\frac{(lx)^{1-\alpha}}{1-\alpha}$, et ainsi des autres.

XI. Ces séries servent au même géomètre à établir des règles de convergence. Avant de les donner, nous rappellerons deux théorèmes de M. Cauchy (*) qui servent de point de départ

Théorème I. Si dans une série

$$U = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots u_n + u_{n+1} + \text{etc.}, \qquad (1)$$

tous les termes, à partir d'un certain rang, sont positifs; et si de très-grandes valeurs de n font converger le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ vers une limite R; la série sera convergente lorsqu'on aura $R < 1$, et divergente lorsqu'on aura $R > 1$ (Algèb. Fourcy, p. 522, 3[e] édit.). En effet, le rapport ayant une tendance à devenir constant, la série s'approche asymptotiquement d'une progression géométrique et en prend le caractère.

Théorème II. Si dans la même supposition, pour de très-grandes valeurs de n, $\sqrt[n]{u_n}$ converge vers une limite R; la série est convergente ou divergente, suivant qu'on aura $R < 1$ ou $R > 1$ (Algèb. de Fourcy, p. 524). Lorsqu'on a constamment $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \sqrt[n]{u_n}$, la série est une progression géométrique; car on aura ainsi $\frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} = \sqrt[n+1]{u_{n+1}}$, remplaçant dans le second nombre u_{n+1} par sa valeur tirée de la première équation, il vient : $\frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} = \sqrt[n]{u_n}$; on voit donc que lorsque $\sqrt[n]{u_n}$ s'approche d'une valeur fixe, la série

(*) Cours d'analyse, p. 132, 134.

converge encore vers une progression géométrique; et cette limite est identique à celle qui est donnée par le théorème précédent (*Cours d'analyse*, p. 134). Ainsi les deux théorèmes ne diffèrent que pour l'énoncé.

XII. Ce théorème est en défaut : 1° lorsque $R=1$; 2° lorsque R est tantôt au-dessus tantôt au-dessous de 1 ; ce qui arrive pour certaines séries que Legendre a désignées sous le nom de *séries semi-convergentes.*

Pour trouver les caractères à employer lorsque $R=1$, examinons (a) la série qui a pour terme général $\frac{\log u_n}{n}=\log\alpha$, α étant une constante; on en déduit $u_n=\alpha^n$; ainsi toute série qui pour de grandes valeurs de n, satisfait à cette équation, s'approche d'une progression géométrique et participe aux caractères de cette progression, comme il a déjà été dit ci-dessus; il n'y a du doute que lorsque $\log\alpha=0$, et remarquons que $\frac{\log u_n}{n}=-\frac{\log\frac{1}{u_n}}{n}$.

(b) La série qui a pour terme général $\frac{\log\frac{1}{u_n}}{\log n}=\alpha$; on en tire $u_n=\frac{1}{n^\alpha}$, ce qui est la première des séries (A); donc dans toute série où le rapport $\frac{\log\frac{1}{u_n}}{\log n}$ s'approche d'un nombre constant pour u très-grand, tend à s'identifier avec la première de (A); ainsi si $\alpha>1$, il y a convergence; et si $\alpha<1$, il y a divergence; il y a doute si $\alpha=1$ (*Cours d'analyse*, p. 137). On a : $\frac{\log\frac{1}{u_n}}{\log n}=\frac{n}{\log n}\cdot\frac{\log\frac{1}{u_n}}{n}=\alpha$; or, pour n infini $\frac{n}{\log n}$ est infini.

Donc, pour que α soit une quantité finie, il faut que $\dfrac{\log \frac{1}{u_n}}{n}$ soit nul. Par conséquent, le second caractère ne peut avoir lieu que lorsque le premier est en défaut.

Exemple. Soit la série

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\ldots\ldots\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\ldots.$$

Le rapport de deux termes consécutifs est $\dfrac{n+2}{n+3}$; la limite de ce rapport est $=1$; ainsi la première règle est insuffisante; la deuxième règle donne :

$$\frac{\log(n+1)(n+2)}{\log n}=\frac{\log n+1}{\log n}+\frac{\log n+2}{\log n}$$

pour $n=\infty$, la limite $=2$; donc $\alpha>1$, et la série est convergente.

En effet, elle est égale à 1, car on peut la mettre sous cette forme

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots\ldots=1.$$

(*c*) La série qui a pour terme général $\dfrac{\log\frac{1}{nu_n}}{\log ln}=\alpha$; on en tire $\log\dfrac{1}{nu_n}=\log(ln)^\alpha$; d'où $\dfrac{1}{nu_n}=(ln)^\alpha$; $u_n=\dfrac{1}{n\,(ln)^\alpha}$.

Ainsi lorsque le rapport $\dfrac{\log\frac{1}{nu_n}}{\log ln}$ tend à devenir constant, la série s'approche de la seconde des séries (A).

Or

$$\frac{\log\frac{1}{nu_n}}{lln}=\frac{ln}{\log ln}\cdot\frac{\log\frac{1}{nu_n}}{ln}=\frac{ln}{\log ln}\left[-1+\frac{\log\frac{1}{u_n}}{\log n}\right]$$

Lorsque n est infini le premier facteur est infini ; il faut donc que le second facteur s'approche de zéro ; ou que $\frac{\log \frac{1}{u_n}}{\log n}$ devienne égal à l'unité ; ainsi lorsque la troisième règle a lieu la seconde est nécessairement en défaut. Soit la série

$$1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{3}} + \ldots \frac{1}{n\sqrt[n]{n}} + \ldots$$

1[re] *Règle.* Rapport de deux termes consécutifs

$$\frac{n\sqrt[n]{n}}{(n+1)\sqrt[n]{n+1}}, \text{ fesant } n = \infty,$$

ce rapport devient égal à 1 ; ainsi cette règle n'est pas applicable.

2[me] *Règle.* $\frac{\log n\sqrt[n]{n}}{\log n} = \frac{n+1}{n}$; fesant $n = \infty$, ce rapport $= 1$; donc la deuxième règle n'est pas applicable.

3[me] *Règle.* $\log \frac{n\sqrt[n]{n}}{n \log n} = \frac{1}{n}$; fesant $n = \infty$, le rapport $= 0$, par conséquent $\alpha < 1$, et la série est divergente et à fortiori la série suivante

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \frac{1}{\sqrt[4]{4}} + \ldots \frac{1}{\sqrt[n]{n}}.$$

(d) Si le rapport précédent est égal à l'unité, il faut prendre le rapport $\frac{\log \frac{1}{n u_n l n}}{\log l l n}$, et ainsi de suite.

(*Voir* Lebesgue, t. IV, p. 66.)

THÉORÈMES ET PROBLÈMES.

107. Étant données deux sphères fixes, trouver la distance des deux centres, en ne se servant que de la régle et du compas.

108. Deux quadrilatères ABCD, A'B'C'D' étant inscrits dans la même conique; si les trois points d'intersection (AB, A'B'), (BC, B'C'), (CD, C'D') sont sur une même droite le point d'intersection (DA, D'A') sera sur la même droite (Plücker).

109. Un polygone de $2m + 4$ côtés étant inscrit dans une conique; les côtés opposés donnent $m + 2$ points d'intersection; si $m + 1$ de ces points sont sur une même droite, le point restant est sur la même droite.

110. Un polygone de $2m + 4$ côtés étant circonscrit à une conique; $m + 2$ diagonales passent par les sommets opposés; si $m + 1$ de ces diagonales se coupent en un même point, la diagonale restante passe par le même point.

111. Lorsqu'un corps pesant flottant est en équilibre dans un liquide, la distance du centre de gravité du corps, au centre de gravité de la masse liquide déplacée, est un maximum ou un minimum (Clausen).

ANNONCE.

M. Aristide Marre, connu de nos lecteurs (voy. t. III, p. 317), et qui s'applique avec ardeur à l'étude des mathématiques et des langues orientales, est occupé à traduire l'ouvrage classique de Boha-Eddin sur l'algèbre, qui donne une idee de l'état de cette science au douzième siècle. Nous en enrichirons les *Nouvelles Annales*. Il est à désirer que ce jeune homme, soldat au 71e de ligne, soit bientôt entièrement rendu aux lettres, où il pourrait aussi rendre au pays un genre de service qu'on ne saurait trop encourager, surtout depuis que nos relations avec l'Orient prennent de jour en jour plus d'importance. Tm.

RECTIFICATION ESSENTIELLE.

Les problèmes 109 et 110 (page 112) doivent être ainsi énoncés :

109. Un polygone de $4m+2$ côtés étant inscrit dans une conique, les côtés opposés donnent $2m+1$ points d'intersection ; si $2m$ de ces points sont sur une même droite, le point restant est sur la même droite.

110. Un polygone de $4m+2$ côtés étant circonscrit à une conique, $2m+1$ diagonales passent par les sommets opposés ; si $2m$ de ces diagonales passent par le même point, la diagonale restante passe par le même point.

En cherchant les démonstrations, j'ai trouvé le vice, d'ailleurs évident, de l'énoncé que j'ai copié, par inadvertance, dans Crell.

OBSERVATIONS

sur le mode actuel d'examen pour l'admission à l'école de Saint-Cyr.

PAR UN ABONNÉ.

Le nouveau mode de concours a eu un effet rétroactif assez fâcheux. Comme dans le midi de la France on ne s'attendait pas à subir les examens le 15 juillet, les professeurs ne s'étaient pas arrangés de manière à avoir terminé leurs cours à cette époque. De là, lorsqu'ils ont été assez tardivement instruits des nouvelles dispositions, la nécessité de se hâter ; inconvénient d'autant plus grave qu'il portait sur les parties les plus élevées du cours, la trigonométrie et la géométrie descriptive.

Examinons maintenant en elles-mêmes les nouvelles dispositions.

La création de vingt-sept commissions d'examen n'établit-elle pas une inégalité injuste entre les différents candidats ? Les unes ne seront-elles pas trop sévères, les autres trop indulgentes ? Je citerai un exemple du premier de ces excès, le plus à craindre dans une simple épreuve d'admissibilité. Dans une académie, à ma connaissance, un candidat a été exclu des épreuves orales, sous prétexte qu'il n'avait pas terminé sa composition de trigonométrie. Il avait cependant résolu le triangle qu'on lui avait donné, mais n'avait pas eu le temps d'en trouver la surface ; il s'était borné à indiquer la marche à suivre pour la trouver. On a cité un article du règlement qui, je crois, n'était pas fait pour la circonstance : n'est-ce pas là une sévérité outrée ?

Le choix des examinateurs est encore une cause d'inégalité entre les candidats. Ce sont des hommes honorables, mais pris dans le pays même, et ne pouvant, avec la meilleure volonté du monde, se soustraire tout à fait aux influences locales, aux nécessités de leurs positions. Ainsi, des professeurs ont eu à interroger leurs propres élèves. Or un élève habitué aux méthodes de son professeur, à la tournure de son esprit, familiarisé avec sa manière d'interroger, n'aura-t-il pas infiniment plus de chances de réussite qu'un candidat soumis à l'émotion inévitable d'un examen passé devant une personne étrangère ?

Enfin, dans une académie que je pourrais citer, l'un des candidats était le fils du président de la commission ; un autre, frère de l'examinateur. L'impartialité de ces personnes, que j'ai l'honneur de connaître particulièrement, ne fait pour moi l'objet d'aucun doute : mais cela est-il régulier ?

J'ignore quelles sont les intentions de l'administration pour cette année ; mais il est vivement à désirer qu'elle revienne à l'ancien mode, qui n'avait jusqu'à présent soulevé aucune opposition. On cherche aujourd'hui à tout perfectionner. Cette disposition d'esprit a son bon côté ; mais il ne faut pas qu'elle dégénère en manie. On a d'ailleurs beaucoup exagéré l'inconvénient qui résulte du trop grand nombre de candidats. Il n'y a guère que les candidats sérieux qui subissent toutes les épreuves ; les autres sont toujours éliminés, soit aux compositions, soit au premier examen.

Note. On dit qu'une commission a été nommée pour s'occuper de la révision du mode actuel d'examen pour Saint-Cyr.

THÉORÈME

sur les racines imaginaires.

THÉORÈME. $f(x)$ étant une fonction algébrique entière, si $fx(x-a)$ renferme $2k+1$ variations de plus que $f(x)$, alors celle-ci a *au moins* $2k$ racines imaginaires.

Démonstration. Conservons la notation indiquée t. II, p. 250 ; ainsi pour le polynôme fx, T désigne le nombre de termes ; t, nombre de termes manquants ; v, nombre total des variations ; v', nombre de variations répondant à des lacunes impaires ; v'', nombre de variations répondant à des lacunes paires ; p, nombre total des permanences ; p', nombre de permanences à lacunes impaires ; p'', nombre de permanences à lacunes paires; O, nombre de racines positives; N, nombre de racines négatives; I, nombre de racines imaginaires; z, nombre positif indéterminé. Les lettres grecques T, τ, φ, φ', φ'', π, π', π'', désignent les quantités analogues pour le polynôme $fx(x-a)$.

On a : $$\pi+\varphi+\tau=\mathrm{O}+\mathrm{N}+\mathrm{I}+1\,; \qquad (1)$$
car le polynôme $fx(x-a)$ a une racine positive de plus que le polynôme fx;

$\varphi=\nu+2k+1$, par hypothèse; $\pi=\pi'+\pi''$; $\mathrm{O}=\nu-z$;
$$\mathrm{N}=\varphi'+\pi''-z'\,;\quad \tau=\pi'+\varphi'+z''.$$
Substituant ces valeurs dans l'équation (1), il vient :
$$\pi'+\pi''+\nu+2k+1+\pi'+\varphi'+z''=\nu-z+\varphi'+\pi''-z'+\mathrm{I}+1\,;$$
d'où $$\mathrm{I}=2\pi'+2k+z''+z'+z.$$
Donc $$\mathrm{I}\geqq 2k+2\pi'. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Observation. Ce théorème est de M. Sturm.

Correction importante. Dans l'article sur les imaginaires (t. IV, p. 236), au lieu de *trois termes consécutifs*, il faut lire *trois premiers termes consécutifs*. Cette correction m'avait été indiquée immédiatement par le savant auteur de l'article; à mon grand regret, j'ai oublié de la mettre dans l'errata.

NOTE

sur la méthode d'approximation de Newton.

PAR M. LÉON ANNE,
Ancien élève de l'Ecole polytechnique.

—

Soit $f(x)=0$ une équation ayant une racine réelle a plus grande ou plus petite que α; posant $x=\alpha+y$, il vient :

$$f(\alpha+y)=f(\alpha)+yf'(\alpha)+y^2\frac{f''(\alpha)}{1.2}+\dots$$
$$\dots+\frac{y^m f^m(\alpha)}{1.2\dots m}=\varphi(y)=0.$$

Cette équation a pour racines les m restes qu'on obtient en retranchant de α chacune des m racines de $f(x)=0$. L'une d'elles est $(a-\alpha)$ et le résultat de sa substitution

$$f(\alpha)+(a-\alpha)f'(\alpha)+\frac{(a-\alpha)^2 f''(\alpha)}{1.2}+\dots+\frac{(a-\alpha)^m f^m(\alpha)}{1.2\dots m}$$

est identiquement nul.

La méthode de Newton, comme il est dit dans toutes les algèbres, suppose la différence $(a-\alpha)$ assez petite pour que l'ensemble des termes qui suivent les deux premiers puisse être négligé, et que

$$f(\alpha)+yf'(\alpha)=0$$

donne pour y une valeur 6 qui, ajoutée à α, forme un nombre $\alpha+6=\alpha'$ différant encore moins de a, c'est-à-dire

$$a-\alpha'<a-\alpha\,;$$

et enfin, appliquant les mêmes calculs et les mêmes hypothèses, non-seulement à α', mais encore aux résultats successifs, les quantités

$$\alpha=\alpha,$$
$$\alpha'=\alpha-\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)},$$
$$\alpha''=\alpha'-\frac{f(\alpha')}{f'(\alpha')},$$
$$\alpha'''=\alpha''-\frac{f(\alpha'')}{f'(\alpha'')},$$

convergent de plus en plus vers a.

Mais comme il existe un grand nombre de circonstances incompatibles avec de telles hypothèses, cette méthode est souvent en défaut et ne doit son emploi qu'à l'excessive simplicité de son application ; bien plus, si l'on exprime ces quantités en décimales, et en ne prenant qu'un nombre déterminé de décimales, le calcul pourra donner pour α', α'', α'''.... des nombres moins rapprochés que ces fractions dont on n'a pas ainsi la valeur exacte, et la méthode pourra devenir fautive uniquement par cette restriction.

Pour interpréter analytiquement les circonstances qui peuvent rendre cette méthode exacte ou fautive, il faut remarquer que résoudre l'équation $f(x) = 0$, c'est chercher à exprimer numériquement les abscisses des points d'intersection de la courbe $y = f(x)$ et de l'axe des x ; cette intersection peut se faire sous l'une des quatre directions des fig. 15 et 16.

Soit $oR = a$, $oA = \alpha$, $AB = f(\alpha)$, ou $AB_1 = f(\alpha)$. Au point B ou B_1 je mène la tangente BA' ou B_1A'; au point A' je mène une ordonnée A'B' ou $A'B_1'$, puis la tangente B'A'' ou $B_1'A''$, et ainsi de suite ; et l'on obtient une suite de pieds de tangentes A', A'', A'''.... s'approchant de plus en plus de R, et ces triangles donneront :

(*fig.* 15) $$AA' = \frac{AB}{\text{tang}\, BA'A} = \frac{f(\alpha)}{-f'(\alpha)},$$

ou bien $$AA' = \frac{AB_1}{\text{tang}\, B_1A'A} = \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}.$$

Comme ici $f(\alpha)$ et $f'(\alpha)$ sont de signes contraires, $-\dfrac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}$ est positif, et par suite :

$$\alpha' = \alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} = oA + AA' = oA',$$

ou (*fig.* 16) $$AA' = \frac{AB}{\text{tang}\, BA'A} = \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)},$$

ou bien $$AA' = \frac{AB_1}{\text{tang}\, B_1A'A} = \frac{f(\alpha)}{-f'(\alpha)}.$$

Ici $f(\alpha)$ et $f'(\alpha)$ sont de même signe, $-\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}$ est négatif, et par suite :

$$\alpha' = \alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} = oA - AA' = oA'.$$

Ainsi R sera la limite supérieure des points A', A'', A'''.... dans le premier cas, et sera dans le second cas leur limite inférieure.

Ces points A', A'', A'''.... ne dépasseront pas le point R si, dans toute l'étendue de l'arc BR, les ordonnées sont constamment décroissantes de B en R, ainsi que les coefficients d'inclinaison (abstraction faite du signe). Pour cela, il faut que $f'(x)$ n'admette de B en R ni maximum ni minimum, c'est-à-dire que l'arc BR n'ait ni sommets ni inflexions. Pour qu'une fonction soit croissante, il faut et il suffit que la dérivée reste positive ; puis une quantité négative est d'autant plus grande que sa valeur absolue est plus petite. Cela admis :

1° $f(x)$, $f'(x)$ et $f''(x)$ ne doivent pas changer de signe pour toute valeur de x comprise entre α et a.

2° De B en R (*fig.* 15) ou de R en B (*fig.* 16), $f'(x)$ augmente ; donc $f''(x)$ reste, comme $f(x)$, positif entre ces limites.

3° De B_1 en R (*fig.* 15) ou de R en B_1 (*fig.* 16), $f'(x)$ diminue ; donc $f''(x)$ reste, comme $f(x)$, négatif entre ces limites.

D'où il suit que la méthode ne sera pas en défaut :

1° Si l'on a deux nombres α, γ comprenant entre eux une racine de $f(x) = 0$ et une seule.

2° Si, pour toute valeur de x comprise entre α et γ, les fonctions $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ ne changent pas de signe. (Le théorème de M. Sturm permettra de déterminer toujours α et γ dans ces conditions.)

3° Si l'on prend pour première approximation de la racine de $f(x)=0$ celui des deux nombres dont la substitution dans $f(x)$ et $f''(x)$ donnera deux résultats de même signe.

On voit, d'après cela, que si les nombres α, α', α''.... convergent de plus en plus vers une certaine limite, cette limite est la racine a; il serait donc utile de reconnaître si en effet il y a convergence, c'est-à-dire de déterminer à chaque nouvelle opération une limite de l'erreur commise. On pourrait, à cet effet, substituer aux tangentes les cordes des arcs ayant le point R pour un de leurs points, comme l'indique M. Lefebure de Fourcy dans sa Géométrie analytique, ou bien des parallèles aux tangentes, ainsi qu'il suit.

Soit $oA=\alpha$ une limite inférieure, et soit oC une limite supérieure de $oR=a$; supposons que l'arc BD n'ait ni sommets ni inflexions, il est clair que si par le point D l'on mène DC′ parallèle à BA′, le point R sera compris entre A′ et C′; menant l'ordonnée C′D′ du point C′ et la parallèle D′C″ à la tangente B′A″, on aura deux nouveaux points A″, C″ plus rapprochés, et néanmoins comprenant entre eux le point R, et ainsi de suite; de sorte que, comparant ces deux constructions, on aurait :

$$oA=\alpha, \qquad oC=\gamma,$$

$$oA'=\alpha'=\alpha-\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}, \qquad oC'=\gamma'=\gamma-\frac{f(\gamma)}{f'(\alpha)},$$

$$oA''=\alpha''=\alpha'-\frac{f(\alpha')}{f'(\alpha')}, \qquad oC''=\gamma''=\gamma'-\frac{f(\gamma')}{f'(\alpha')},$$

$$oA'''=\alpha'''=\alpha''-\frac{f(\alpha'')}{f'(\alpha'')}, \qquad oC'''=\gamma'''=\gamma''-\frac{f(\gamma'')}{f'(\alpha'')},$$

et ainsi de suite; et l'erreur commise à chacune de ces approximations est évidemment moindre que $\gamma-\alpha$, $\gamma'-\alpha'$, $\gamma''-\alpha''$....

Ainsi on pourra prendre pour valeurs approximatives celles qui sont formées des décimales communes.

Il est clair que ce calcul serait identique, si la courbe avait l'une quelconque des quatre courbures dessinées fig. 15 et fig. 16.

Nous croyons utile aux élèves de leur faire connaître succinctement cette méthode, due, comme chacun sait, à l'illustre Fourier. Elle est exposée avec beaucoup d'étendue dans l'ouvrage posthume publié en 1831 sous le titre d'*Analyse des équations déterminées* ; il ne renferme que deux livres, dont le premier traite de la séparation des racines, et le second du calcul approché de ces racines selon le procédé newtonien perfectionné. Dans ce second livre, on trouve, pour le même objet, l'ingénieuse abréviation de la division ordonnée, qui a passé dans les traités élémentaires. Nous empruntons au même ouvrage l'exemple suivant, qui peut servir d'exercice (p. 209) :

$$x^3 - 2x - 5 = 0.$$

1re val. app. $x = 2{,}09$ à 0,01 près ; on ne sait si c'est en plus ou en moins.

2e $x = 2{,}0945$, à 0,001 *id.*

3e $x = 2{,}09455148$, moindre que la racine.

4e $x = 2{,}0945514815423265$, à moins d'une décimale du 16e ordre ; plus petit que la racine.

5e $x = 2{,}09455148154232659148238654057 93$.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 55 (t. I, p. 521),

sur le binôme de Newton.

PAR M. HENRI D'ANDRÉ,
élève de l'institution Laville.

Théorème. L'exposant du binôme de Newton étant de la forme $a^p - 1$ où a est un nombre premier et p un nombre entier positif quelconque, aucun coefficient du binôme n'est divisible par a ; si l'exposant est a^p, tous les coefficients, les deux extrêmes exceptés, sont divisibles par a.

Démonstration. 1er *cas.* Le coefficient du terme général d'un tel binôme est évidemment $\frac{(a^p-1)(a^p-2)\ldots.(a^p-n)}{1.2.3\ \ldots.\ n}$, nombre essentiellement entier. a étant un nombre premier, il est nécessaire de considérer seulement les facteurs divisibles par a.

Soit ka^r ou $k < a$ un des facteurs du dénominateur ; il existe dans le numérateur un facteur correspondant a^p-ka^r ; les deux facteurs sont donc divisibles par a^r et donnent des quotients non divisibles par a ; ôtant donc, haut et bas, les diviseurs a, on parvient au nombre entier $\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}}$, où ni le dividende, ni le diviseur ne contiennent comme facteur le nombre premier a ; donc ce nombre entier n'est pas divisible par a. C. Q. F. D.

2e *cas.* Le coefficient du terme général est :

$$\frac{a^p.a^p-1\ldots.a^p-n+1}{1.2.3\ldots.n}=\frac{a^p.a^p-1\ldots.a^p-n}{a^p-n.1.2\ldots.n}=\frac{\mathrm{L}a^p}{a^p-n};$$

or on vient de démontrer que L ne contient pas le facteur a, et a^p-n ne contient jamais autant de fois le diviseur a que a^p ; donc ce terme est divisible par a.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 83 (t. III, p. 83) ;

lieu relatif à une parabole.

PAR M. HENRI D'ANDRÉ,
élève de l'institution Laville.

—

Théorème. Une parabole variable ayant un foyer fixe et touchant constamment une conique fixe de même foyer, le sommet de la parabole variable décrit une conchoïde ayant pour directrice une circonférence sur laquelle se trouve le pôle (Chasles).

Démonstration. L'équation de la conchoïde s'obtient immédiatement en coordonnées polaires, en prenant pour pôle le point fixe, et pour axe le diamètre qui passe par ce point.

Si r est le rayon du cercle et d sa longueur constante, on a :

$$\rho = 2r\cos\varphi \pm d.$$

Je suppose que la conique fixe soit rapportée à un système d'axes rectangulaires ayant pour origine le foyer et dirigés l'un suivant le diamètre de la courbe, l'autre suivant l'ordonnée du foyer; alors comme la directrice est parallèle à l'axe des y, l'équation focale de cette conique sera :

$$(1) \qquad y^2 + x^2 = (ax + b)^2,$$

en désignant par $x = -\frac{b}{a}$ l'équation de la directrice.

L'équation de la parabole variable sera suivant le type général :

$$(2) \qquad y^2 + x^2 = (my + nx + p)^2,$$

avec la condition $m^2 + n^2 = 1$.

Je vais d'abord exprimer que ces deux courbes sont tangentes : pour cela il suffit de chercher l'équation qui aurait pour racines, les abscisses de leurs points d'intersection, et d'exprimer que cette équation a deux racines égales.

Conformément à la règle prescrite pour la résolution de deux équations du second degré à deux inconnues, je fais d'abord disparaître le carré de l'une des variables, et je résous par rapport à l'autre ; il est très-facile, dans ce cas particulier, d'atteindre ce but, en égalant les seconds membres des équations des deux courbes, et extrayant la racine carrée des deux membres. Il vient de cette manière :

$my+nx+p=\pm(ax+b)$; on en tire $y=\dfrac{(\pm a-n)x\pm b-p}{m}$.

Je porte dans l'équation (1) cette expression de y, ce qui donne, en développant et réduisant :

$(an\mp 1)^2x^2-2[abm^2-(\pm a-n)(\pm b-p)]\,x+(\pm b-p)^2-b^2m^2=0.$

La condition d'égalité des racines de cette équation est :

$[abm^2-(a-n)(\pm b-p)]^2-(an\mp 1)^2[(\pm b-p)^2-b^2m^2]=0.$

Effectuant les calculs et ayant égard à la relation $m^2+n^2=1$, on trouve finalement :

$$p(a^2-1)\pm 2b-2abn=0. \qquad (2)$$

Actuellement, le sommet se trouvant sur la courbe, les coordonnées doivent satisfaire à l'équation :

$$(my+nx+p)^2=y^2+x^2,$$

ou bien $$(y\sqrt{1-n^2}+nx+p)^2=y^2+x^2. \qquad (3)$$

Si on l'envisage comme résultant de l'intersection de la courbe avec la perpendiculaire abaissée du foyer sur la directrice, on aura encore :

$$y=\frac{m}{n}x\,; \qquad y=\frac{\sqrt{1-n^2}}{n}x. \qquad (4)$$

Or il est facile de voir que si je donne à p, par exemple, une valeur particulière, je tirerai de l'équation (2) une valeur correspondante pour n, et en les substituant dans les équations (3) et (4), j'obtiendrai un couple de valeurs de x et de y qui seront les coordonnées d'un point du lieu ; donc si j'élimine p et n entre les trois équations (2), (3) et (4), l'équation résultante en x et y sera vérifiée par tous les couples et par les seuls couples de valeurs de x et de y, qui, conjointement avec une valeur quelconque de p et de n, vérifient les trois équations ci-dessus ; mais ces couples de valeurs sont les coordonnées d'autant de points du lieu : donc l'équation en x et y sera vérifiée par les coordonnées de tous les points du lieu, et uniquement par ces seules coordonnées. Ce sera donc bien l'équation du lieu.

Pour effectuer l'élimination le plus simplement possible, je tire de l'équation (4) :

$$n = \frac{x}{\sqrt{y^2 + x^2}}; \quad \text{et par suite,} \quad m = \frac{y}{\sqrt{y^2 + x^2}}.$$

Si l'on substitue ces valeurs dans l'équation (3), il vient :

$$\left(\sqrt{y^2 + x^2} + p\right)^2 = y^2 + x^2;$$

d'où

$$p = \pm \sqrt{y^2 + x^2} - \sqrt{y^2 + x^2}.$$

Or p ne peut pas être nul ; car la directrice ne passe pas par le foyer ; la seule valeur admissible est donc :

$$p = -2\sqrt{y^2 + x^2}.$$

Il ne reste plus qu'à remplacer dans l'équation (2) n, p par leurs valeurs, et on trouve :

$$(a^2 - 1)(y^2 + x^2) = \mp b\sqrt{y^2 + x^2} + abx.$$

En passant aux coordonnées polaires, il vient :

$$(a^2 - 1)\rho^2 = \mp b\rho + ab\rho\cos\varphi.$$

J'ôte le facteur ρ, ce qui fait disparaître l'équation de l'origine, et je parviens enfin à l'équation

$$\rho = \frac{a}{a^2 - 1} b\cos\varphi \mp \frac{1}{a^2 - 1} b.$$

On voit donc que le sommet de la parabole variable décrit un limaçon de Pascal ayant pour directrice une circonférence dont le diamètre serait représenté par $\frac{a}{a^2 - 1} b$, et pour paramètre constant, $\frac{b}{a^2 - 1}$.

On pourrait exprimer ces quantités en fonctions des axes de la conique proposée ; mais on ne parvient pas à des valeurs remarquables.

Note. On peut parvenir à ce résultat d'une manière plus simple. Soit F le foyer d'une ellipse, pris pour origine ; F' le second foyer ; FF' l'axe des x et les coordonnées rectangulaires. L'équation de l'ellipse est : $a^2y^2 + b^2x^2 - 2b^2cx = b^4$; $a = \frac{1}{2}$ axe focal ; $b =$ petit axe ; $c^2 = a^2 - b^2$.

Soit M (y', x') un point de l'ellipse ; menons par F une parallèle à MF' et rencontrant en P la tangente en M ; soit MQ une perpendiculaire abaissée de M sur cette parallèle, et S le milieu de PQ ; la parabole, qui a S pour sommet et F pour foyer, touche l'ellipse en M ; faisons FS$=\rho$; SFF'$=\varphi$; il s'agit de trouver une relation entre ρ et φ ; faisons :

$$\text{FM} = z' = \frac{b^2 + cx'}{a} ; \quad \text{F'M} = z'' = \frac{a^2 + c^2 - cx'}{a} ;$$

les triangles semblables donnent pour les coordonnées de P :

$$x = \frac{z'(x' - 2c)}{z''} ; \quad y = \frac{y'z'}{z''}. \qquad (1)$$

La parallèle à MF' passant par l'origine a pour équation :

$$y = \frac{y'}{x' - 2c} x.$$

La perpendiculaire abaissée sur cette parallèle a pour équation :

$$y - y' = \frac{2c - x'}{y'} x.$$

Les coordonnées de Q, pied de la perpendiculaire, sont :

$$x = \frac{(x' - 2c)(z'^2 - 2cx')}{z''^2},$$

$$y = \frac{y'(z'^2 - 2cx')}{z''^2}. \qquad (2)$$

Donc les coordonnées du point S, milieu de PQ, sont :

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{b^2(x'-2c)}{z''^2}, \\ y &= \frac{b^2 y'}{z''^2}, \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

d'où

$$\rho^2 = \frac{b^4}{z''^2};\quad \rho = \frac{b^2}{z''};\quad \text{tang}\,\varphi = \frac{y'}{x'-2c};\quad \cos\varphi = \frac{x'-2c}{z''} = \frac{b^2 - az''}{cz''}.$$

Éliminant z'', il vient $\rho = a - c\cos\varphi$, équation du limaçon de Pascal. Ainsi C étant le centre de l'ellipse, on décrit une circonférence sur CF comme diamètre ; prenant F pour pôle, et le demi-axe focal pour ligne constante, on construit avec ces données le *limaçon* qui convient au lieu cherché.

L'équation, étant indépendante de b^2, a donc lieu aussi lorsque la conique fixe est une hyperbole.

Observation. Il est à désirer qu'on démontre géométriquement la propriété $\rho z'' = b^2$; cela abrégerait beaucoup le calcul. Tm.

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE DU PROBLÈME 103.

(V. t. IV, p. 560.)

PAR M. A. CROSSON,
Professeur au collége de Bourges.

—

Soient M et M′ (*fig.* 17) deux points voisins de la courbe demandée ; la ligne MM′ sera une sécante à cette courbe. Les deux angles AMB et AM′B étant égaux, on pourra faire passer une circonférence par les quatre points A, B, M′ et M ; et la ligne MM′ sera aussi une sécante à ce cercle. Concevons que le point M′ se rapproche indéfiniment du point M ;

d'une part la position limite de la sécante MM' à la courbe cherchée sera la tangente à cette même courbe au point M : d'autre part la position limite de la sécante MM' à la circonférence, sera la tangente au même point M à la position limite de cette circonférence, c'est-à-dire à la circonférence passant par les trois points P, M, Q. Ce qu'il fallait démontrer.

Si l'angle donné est droit, on aura une normale à la courbe décrite par le sommet, en joignant ce sommet au milieu de la corde qui joint les points de contact des côtés de cet angle.

NOTE

Sur le rapport de la circonférence au diamètre, et sur le calcul de radicaux superposés.

PAR M. A. CROSSON,
Professeur au collége de Bourges.

En partant des relations qui permettent, étant données les aires des polygones inscrit et circonscrit à un même cercle, de calculer les aires des polygones inscrit et circonscrit d'un nombre de côtés double, M. Catalan a fait voir (t. I, p. 191) que les aires des polygones successifs inscrits, sont les termes d'une suite telle que le carré de chaque terme est égal au double du cube du terme précédent, divisé par la somme faite de celui-ci et du terme précédent.

Si l'on représente par A, A', A'', les aires de trois polygones successifs inscrits; par B, B', B'' les aires des polygones semblables circonscrits, on sait qu'on a les relations :

$$A'^2 = AB, \qquad A''^2 = A'B',$$

$$B' = \frac{2AB}{A + A'}, \qquad B'' = \frac{2A'B'}{A' + A'}.$$

Éliminons B' et B entre les trois premières, on arrive à l'égalité $A''^2 = A' . \frac{2A'^2}{A+A'} = \frac{2A'^3}{A+A'}$.

Si on fait le même calcul sur les périmètres des polygones successifs inscrits et circonscrits, on arrive à ce résultat remarquable que les périmètres des polygones successifs inscrits suivent identiquement la même loi que les aires de ces mêmes polygones.

Désignons par P, P', P'' les périmètres de trois polygones successifs inscrits ; par Q, Q', Q'' les périmètres des polygones semblables circonscrits, on a les relations :

$$Q' = \frac{2PQ}{P+Q}, \quad Q'' = \frac{2P'Q'}{P'+Q'},$$
$$P'^2 = P.Q', \quad P''^2 = P'.Q''.$$

Éliminons Q' et Q'' entre les trois dernières, on obtient :

$$P''^2 = P' . \frac{P'+Q'}{2P'Q'},$$

et en remplaçant Q' par $\frac{P'^2}{P}$, on trouve : $P''^2 = \frac{2.P'^3}{P+P'}$.

Si on fait le calcul en partant de l'hexagone inscrit, on arrive facilement à la relation $2\pi = 6 . \frac{2}{a} . \frac{2}{b} . \frac{2}{c} \ldots\ldots$

En posant, pour abréger,

$$\sqrt{2+\sqrt{3}} = a, \quad \sqrt{a+2} = b, \quad \sqrt{b+2} = c, \text{ etc.}$$

Résultat de même forme que celui qu'a obtenu M. Catalan, en partant de l'aire du carré inscrit.

En s'arrêtant au $n^{ème}$ facteur, on aurait le périmètre du polygone inscrit, dont le nombre des côtés serait marqué par 6×2^n. Or on sait que $Q_m - P_m < \frac{1}{4^m}(Q-P)$; Q_m et P_m, désignant les périmètres des polygones obtenus en doublant successivement m fois le nombre des côtés des polygones dont les périmètres sont Q et P. Dans le cas qui nous occupe Q — P est < 1. Donc, en s'arrêtant au $n^{ème}$ facteur le périmètre du polygone obtenu différera de la circonférence de moins de $\frac{1}{4^n}$; et par conséquent on pourra calculer π à moins de $\frac{1}{2.4^n}$ près. (Voir t. IV, p. 156).

Quelques mots sur la manière d'effectuer ce calcul, et en général sur l'extraction de la racine carrée, des quantités qu'on ne peut évaluer qu'approximativement.

Théorème. Si on a un nombre quelconque de $2p+2$ ou de $2p+1$ chiffres, et qu'on supprime les p derniers chiffres, en les remplaçant par des zéros ; la racine carrée de ce dernier nombre obtenue à moins d'une demi-unité près, sera celle du nombre donné à moins d'une unité près. On peut même si l'on veut, augmenter le dernier chiffre significatif d'une unité.

Démonstration. Soit N le nombre proposé, $N \pm f.\,10^p$ sera le nombre mutilé, f représentant une fraction plus petite que l'unité. Soit a la racine carrée de ce dernier nombre obtenue à moins d'une demi-unité près ; alors on aura :

$$N \pm f.\,10^p = a^2 \pm f'a\ ;$$

f' représentant aussi un nombre plus petit que l'unité. De là on déduit :

$$N - a^2 = \pm f'.a \mp f.10^p.$$

Deux cas peuvent se présenter, ou bien le second membre est positif, ou il est négatif.

S'il est positif, on a $N - a^2 > 0$ ou $N > a^2$. D'ailleurs a est au moins égal à 10^p puisque la racine a $p+1$ chiffres ; de sorte qu'en supposant le cas le plus défavorable, où les fractions seraient égales à l'unité, $f'a + f.10^p$, est toujours moindre que $2a+1$. De l'inégalité $N-a^2 < 2a+1$ on tire aisément $N < (a+1)^2$. Le nombre donné étant compris entre a^2 et $(a+1)^2$; sa racine est donc bien a, à moins d'une unité près.

Si le second membre est négatif; on a d'abord $N-a^2 < 0$, et par conséquent $N < a^2$. D'ailleurs, pour peu que a dépasse 10^p d'une unité seulement, ce second membre est moindre en valeur absolue que $2a-1$; on a donc l'inégalité $N-a^2 > -2a+1$, et par conséquent $N > a^2 - 2a + 1$, ou bien $N > (a-1)^2$. N étant compris entre a^2 et $(a-1)^2$; ce sera donc aussi sa racine à une unité près.

Il résulte de là que si on veut calculer une expression de la forme $\sqrt{2+\sqrt{3}}$ à un millième près par exemple, je calculerai $\sqrt{3}$ à un millième près, on ajoutera 2 à la racine obtenue, et l'on calculera la racine du résultat à un demi-millième près, ce qui donnera la racine demandée, à moins d'un millième près.

Si l'on avait un plus grand nombre de radicaux superposés, on pourra toujours continuer le calcul de la même manière, extraire les racines carrées successives à un demi-millième près; ce qui donnera en dernier résultat la racine demandée à un millième près.

Ce théorème pourrait servir dans la construction des tables de logarithmes en arithmétique: on veut insérer 2^m-1, moyens géométriques entre 1 et 10 par exemple, on aurait la raison à un dix-millième près, en extrayant m racines carrées successives de 10 à un demi-dix-millième près.

(Voir Guilmin, t. I, p. 487, et t. IV, p. 124, 205).

Note. Il serait à désirer qu'on eût une théorie analytique de toutes les approximations usitées en arithmétique; surtout pour celles de Fourier et de M. Guy. Tm.

LOI DE LA DIFFÉRENCE

entre deux réduites de rang quelconque, dans les fractions continues.

PAR M. DORMOY,
élève en spéciales.

Considérons un nombre quelconque de réduites consécutives :

$$\frac{P}{P'}\quad\frac{Q}{Q'}\quad\frac{R}{R'}\quad\frac{S}{S'}\quad\frac{T}{T'}\quad\frac{V}{V'},$$

et proposons-nous de trouver les différences entre une quelconque d'entre elles, $\frac{Q}{Q'}$, par exemple, et toutes les suivantes.

Nommons r, s, t, v, les quotients incomplets correspondants aux réduites $\frac{R}{R'}\frac{S}{S'}\frac{T}{T'}\frac{V}{V'}$; si nous formons ces réduites suivant la loi établie à cet égard, nous aurons :

$$\frac{R}{R'}=\frac{Qr+P}{Q'r+P'}$$

$$\frac{S}{S'}=\frac{(Qr+P)s+Q}{(Q'r+P')s+Q'}=\frac{Qrs+Ps+Q}{Q'rs+P's+Q'}$$

$$\frac{T}{T'}=\frac{(Qrs+Ps+Q)t+Qr+P}{(Q'rs+P's+Q')t+Q'r+P'}=\frac{Qrst+Pst+Qt+Qr+P}{Q'rst+P'st+Q't+Q'r+P'}$$

$$\frac{V}{V'}=\frac{(Qrst+Pst+Qt+Qr+P)v+Qrs+Ps+Q}{(Q'rst+P'st+Q't+Q'r+P')v+Q'rs+P's+Q'}=$$

$$=\frac{Qrstv+Pstv+Qtv+Qrv+Pv+Qrs+Ps+Q}{Q'rstv+P'stv+Q'tv+Q'rv+P'v+Q'sr+P's+Q'}.$$

Supposons de plus que $\frac{Q}{Q'}$ soit une réduite de rang impair, elle sera alors plus petite que toutes les suivantes, et toutes les différences $\frac{R}{R'}-\frac{Q}{Q'}$, $\frac{S}{S'}-\frac{Q}{Q'}$,...... seront positives ; si nous eussions supposé que $\frac{Q}{Q'}$ fût une réduite de rang pair, elle eût été plus grande que toutes les suivantes, et les différences $\frac{R}{R'}-\frac{Q}{Q'}$..... eussent été les mêmes en valeur absolue, seulement le signe eût été changé.

Cela posé, nous avons successivement :

$$\frac{R}{R'}-\frac{Q}{Q'}=\frac{Qr+P}{Q'r+P'}-\frac{Q}{Q'}=\frac{(Qr+P)Q'-(Q'r+P')Q}{R'Q'}=$$
$$=\frac{Q'P-QP'}{R'Q'}=\frac{1}{R'Q'}$$
$$\frac{S}{S'}-\frac{Q}{Q'}=\frac{Qrs+Ps+Q}{Q'rs+P's+Q'}-\frac{Q}{Q'}=$$
$$=\frac{QQ'rs+PQ's+QQ'-QQ'rs-QP's-QQ'}{Q'S'}=$$
$$=\frac{(PQ'-QP')S}{Q'S'}=\frac{s}{Q'S'}$$
$$\frac{T}{T'}-\frac{Q}{Q'}=\frac{Qrst+Pst+Qt+Qr+P}{Q'rst+P'st+Q't+Q'r+P'}-\frac{Q}{Q'}=$$
$$=\frac{(PQ'-QP')st+1}{Q'T'}=\frac{st+1}{Q'T'}$$
$$\frac{V}{V'}-\frac{Q}{Q'}=\frac{Qrstv+Pstv+Qtv+Qrv+Pv+Qrs+Ps+Q}{Q'rstv+P'stv+Q'tv+Q'rv+P'v+Q'rs+P's+Q'}-\frac{Q}{Q'}=$$
$$=\frac{(st+1)v+s}{Q'V'}.$$

On continuerait de même pour les réduites suivantes.

Considérons les numérateurs des différences successives ; ces numérateurs sont :

$$1,\ s,\ st+1,\ (st+1)v+s,$$

et les quotients correspondants sont :

$$r,\ s,\ t,\ v.$$

On voit immédiatement que le numérateur de chaque différence est égal au précédent, multiplié par le quotient incomplet correspondant, plus le numérateur de la différence précédant de deux rangs.

Cette loi est identiquement la même que celle qui a été établie lors de la formation des réduites d'une quantité développée en fraction continue.

On voit alors qu'en nommant les quotients incomplets successifs $p, q, r, s, t, v, x, y, z\ldots$ les numérateurs des différences seront :

$$1, p, pq+1, (pq+1)r+p, [(pq+1)r+p]s+pq+1\ldots$$

Appliquons ceci à un exemple numérique ; étant donnée la fraction $\frac{86400}{20929}$, la première réduite est $\frac{4}{1}$, et les différents quotients incomplets successifs auxquels on est conduit lorsqu'on la développe en fraction continue sont, 4,7,1,3,1,16, 11,15 ; proposons-nous de trouver la différence entre la première réduite $\frac{4}{1}$, et toutes les autres.

Le numérateur de la 1[re] différence sera 1

2[e]	$1.1+0=1$
3[e]	$1.3+1=4$
4[e]	$4.1+1=5$
5[e]	$5.16+4=84$
6[e]	$84.1+5=89$
7[e]	$89.1+84=173$
8[e]	$173.15+89=2684$

Quant aux dénominateurs, ils sont égaux aux dénominateurs de la réduite dont on retranche, puisque le dénominateur de la réduite retranchée est l'unité ; or, si nous formons ces dénominateurs, nous avons successivement :

7, 8, 31, 39, 655, 694, 1349, 20929.

Donc enfin :

la différence entre la 1re réduite et la

2e est	$\frac{1}{7}$	6e est	$\frac{84}{655}$
3e	$\frac{1}{8}$	7e	$\frac{89}{694}$
4e	$\frac{4}{31}$	8e	$\frac{173}{1349}$
5e	$\frac{5}{39}$	9e	$\frac{2684}{20929}$

comme on peut s'en convaincre en effectuant directement le calcul.

Enfin pour vérifier cette loi, on peut encore considérer l'expression

$$\frac{R}{R'}-\frac{Q}{Q'}=\frac{Qr+P}{Q'r+P'}-\frac{Q}{Q'}=\frac{1}{Q'R'},$$

y changer r en $r+\frac{1}{s}$, et passer ainsi de $\frac{R}{R'}$ à $\frac{S}{S'}$:

$$\frac{S}{S'}-\frac{Q}{Q'}=\frac{Q\left(r+\frac{1}{s}\right)+P}{Q'\left(r+\frac{1}{s}\right)+P'}-\frac{Q}{Q'}=\frac{Qrs+Ps+Q}{Q'rs+P's+Q'}-\frac{Q}{Q'}=\frac{s}{Q'S'}$$

On continuerait de même pour les autres réduites, donc....

Pour passer de $\frac{S}{S'}-\frac{Q}{Q'}$ à $\frac{T}{T'}-\frac{Q}{Q'}$, il suffisait encore de changer dans l'expression de la différence s en $s+\frac{1}{t}$, et l'on aurait eu : $\frac{T}{T'} - \frac{Q}{Q'} = \frac{s + \frac{1}{t}}{Q'S'} = \frac{st+1}{Q'T'}$, ce qui vérifie encore le résultat énoncé. Mais la première marche était celle qui se présentait tout d'abord à l'esprit, c'est par suite la plus logique, mais on voit qu'elle est loin d'être la plus simple.

Note. Entre deux réduites consécutives de même parité, par exemple entre $\frac{Q}{Q'}$ et $\frac{S}{S'}$, on peut insérer $s-1$ fractions *supplémentaires* qui jouissent des mêmes propriétés que les réduites, ces fractions sont :

$$\frac{Q+R}{Q_1+R_1};\ \frac{Q+2R}{Q_1+2R_1};\ \frac{Q+3R}{Q_1+3R_1}\ldots\frac{Q+(s-1)R}{Q_1+(s-1)R_1};$$

déjà employées par Huyghens, les fractions supplémentaires sont utiles dans plusieurs questions ; entre autres dans la simplification de π ; dans le problème de l'intercalation ; dans le nombre des dents des rouages pour certains mécanismes d'horlogerie. Lagrange s'en est occupé, et nous ignorons pourquoi on ne dit rien de ces fractions importantes dans les traités élémentaires. Tm.

LIEU GÉOMÉTRIQUE

relatif à l'intersection de deux coniques.

PAR M. MENTION,
élève en spéciales.

Problème. Deux courbes du second degré passant par trois points, trouver le lieu géométrique du quatrième point d'intersection lorsque leurs axes principaux sont donnés de direction.

Solution. Soient M, N, P les trois points donnés ; je prends pour origine des coordonnées l'un de ces points, N par exemple, et pour axes les lignes qui joignent ce point aux deux autres. Soit β l'ordonnée du point qui est sur l'axe des y ; α l'abcisse de celui qui est sur l'axe des x.

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0$$

étant l'équation du second degré, nous obtiendrons l'équation générale des courbes passant par les trois points en posant :

$$\beta = -\frac{D}{A}, \quad \alpha = -\frac{E}{C}, \text{ d'où } D = -A\beta, \quad E = -C\alpha;$$

posant alors $\dfrac{B}{2A} = m$, $\dfrac{A}{C} = n$, l'équation sera :

$$y^2 + 2mxy + nx^2 - \beta y - n\alpha x = 0.$$

Considérons donc maintenant deux courbes du second degré passant par les trois points :

$$y^2 + 2mxy + nx^2 - \beta y - n\alpha x = 0,$$
$$y^2 + 2m'xy + n'x^2 - \beta y - n'\alpha x = 0.$$

Si nous appelons α et α' les angles que les axes principaux de ces courbes font avec l'axe des x, on devra avoir $\alpha = \alpha' + 90°$, ou $2\alpha = 2\alpha' + 180$, ou tang $2\alpha =$ tang $2\alpha'$, ce qui introduirait encore le cas $\alpha = \alpha'$, cas où ils seraient encore parallèles; cherchons donc tang 2α et tang $2\alpha'$, afin de les égaler. Or, lorsque les courbes du second degré sont telles que leurs équations sont privées du terme xy, l'axe de la courbe est parallèle aux axes des coordonnées, ces coordonnées étant rectangulaires; rapportons donc la courbe

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0$$

à un système de coordonnées rectangulaires, on obtiendra :

$$(A + C\cos^2\theta - B\cos\theta)\,y^2 + (B\sin\theta - 2A\sin\theta\cos\theta)\,xy +$$
$$+ C\sin^2\theta x^2 + (Dy + Ex + F)\sin^2\theta = 0,$$

de sorte que maintenant on a :

$$\operatorname{tang} 2\alpha = \frac{-B'}{A' - C'} = \frac{B\sin\theta - 2C\sin\theta\cos\theta}{B\cos\theta - A - C\cos 2\theta},$$

et si nous remplaçons B par $2m$, A par 1, C par n :

$$\operatorname{tang} 2\alpha = \frac{2m\sin\theta - n\sin 2\theta}{2m\cos\theta - 1 - n\cos\theta},$$

nous devrons avoir : $\operatorname{tang} 2\alpha = \operatorname{tang} 2\alpha'$, ou

$$\frac{2m\sin\theta - n\sin 2\theta}{2m\cos\theta - n\cos 2\theta - 1} = \frac{2m'\sin\theta - n'\sin 2\theta}{2m'\cos\theta - n'\cos 2\theta - 1}$$

d'où

$$(2m\sin\theta - n\sin 2\theta)(2m'\cos\theta - n'\cos 2\theta - 1) =$$
$$= (2m'\sin\theta - n'\sin 2\theta)(2m\cos\theta - n\cos 2\theta - 1),$$

ou $\quad 4mm'\sin\theta\cos\theta - 2m'n\sin 2\theta\cos\theta - 2mn'\sin\theta\cos 2\theta +$
$$+ nn'\cos 2\theta\sin 2\theta - 2m\sin\theta + n\sin 2\theta =$$
$$= 4mm'\sin\theta\cos\theta - 2mn'\sin 2\theta\cos\theta - 2m'n\sin\theta\cos 2\theta +$$
$$+ nn'\cos 2\theta\sin 2\theta - 2m'\sin\theta + n'\sin 2\theta.$$

Réduisant et supprimant le facteur $2\sin\theta$, qui n'est pas nul :

$$2m'n\cos^2\theta + mn'\cos 2\theta + m - n\cos\theta =$$
$$= 2mn'\cos^2\theta + m'n\cos 2\theta + m' - n'\cos\theta,$$

ou $\quad (m'n - mn')(2\cos^2\theta - \cos 2\theta) + m - m'$
$$- (n - n')\cos\theta = 0\,;$$

d'où, enfin,

$$m'n - mn' + m - m' - (n - n')\cos\theta = 0. \qquad (k)$$

Éliminons donc m et m' entre cette équation et celle des deux courbes. Or, si je multiplie la première équation de la courbe par m', la seconde par m, et si je retranche, j'obtiens :

$$y(m'-m)(y-\beta)+(m'n-mn')(x-\alpha)x=0.$$

Remplaçant $m'n-mn'$ par sa valeur tirée de l'équation (k),

$$y(m'-m)(y-\beta)+[(n-n')\cos\theta-(m-m')x](x-\alpha)=0\,;$$

d'où $(m'-m)[y(y-\beta)+x(x-\alpha)]+(n-n')\cos\theta\, x(x-\alpha)=0.$

Or, en retranchant les équations des deux courbes, on trouve :

$$m-m'=\frac{(n-n')(\alpha-x)}{2y}.$$

Donc, enfin, l'équation du lieu sera :

$$[y(y-\beta)+x(x-\alpha)]+x\cos\theta=0\,;$$
$$y(y-\beta)+x(x-\alpha)+2xy\cos\theta=0\,;$$
$$y^2+2xy\cos\theta+x^2-\beta y-\alpha x=0\,;$$

cercle qui passe par les trois points donnés. Donc les quatre points se trouvent sur une circonférence, et on en conclut que si les axes de deux courbes du second degré sont constamment perpendiculaires ou parallèles à des droites données, les quatre points d'intersection sont sur une circonférence.

Si l'on n'eût cherché ce problème que dans le cas de la parabole, on eût obtenu le même résultat plus simplement.

Car on arrive, en posant

$$Ay^2+Bxy+\frac{B^2}{4A}x^2+Dy+Ex+F=0$$

pour équation des paraboles, à

$$y^2+2mxy+m^2x^2-\beta y-m^2\alpha x=0,$$

pour équation des paraboles passant par les trois points, de sorte que si on prend une autre parabole

$$y^2 + 2m'xy + m'^2x^2 - \beta y - m'^2\alpha x = 0.$$

(On remarquera que $m = \frac{B}{2A}$, c'est-à-dire l'inclinaison de l'axe de la courbe sur l'axe des x.)

Donc il faudra exprimer que m et m' satisfont à la condition

$$1 + mm' - (m + m')\cos\theta = 0.$$

Or remarquons que dans ces deux équations, m est dans l'une ce que m' est dans l'autre; de sorte que m et m nous sont donnés par cette première équation, et on en tire :

$$m + m' = -\frac{2xy}{x^2 - \alpha x}; \quad mm' = \frac{y^2 - \beta y}{x^2 - \alpha x};$$

d'où

$$1 + \frac{y^2 - \alpha y}{x^2 - \alpha x} + \frac{2xy\cos\theta}{x^2 - \alpha x} = 0 \text{ ou } y^2 + 2xy\cos\theta + x^2 - \beta y - \alpha x =$$

Note. Soit l'équation de la conique passant par les trois points $\qquad y^2 + 2mxy + nx^2 - \beta y - n\alpha x = 0.$

Le système des axes principaux est :

$$y^2(m - \cos\gamma) + xy(n - 1) + n\cos\gamma - m = 0 \text{ (t. I, p. 496)}.$$

Les axes devant rester parallèles à eux-mêmes, on a donc

$$\frac{n-1}{m - \cos\gamma} = p; \quad \frac{n\cos\gamma - m}{m - \cos\gamma} = q;$$

p et q étant des quantités constantes; on tire de ces équations $n = 1$, $m = \cos\gamma$; substituant ces valeurs dans l'équation, on trouve $y^2 + 2\cos\gamma\, xy + x^2 - \beta y - \alpha x = 0$, équation d'un cercle, lieu géométrique du point cherché.

Ainsi, la conique qui passe par les quatre sommets d'un quadrilatère inscriptible a des axes principaux d'une direction constante; ce qui d'ailleurs est évident *à priori*. En effet, en vertu du théorème sur les segments, dans chacune de ces coniques les diagonales du quadrilatère sont parallèles à des diamètres *égaux* ; donc les directions des axes principaux divisent les angles des diagonales en parties égales. Donc ces directions sont constantes. Tm.

NOTE

sur les racines imaginaires.

Remarque. Ce qui suit est une réponse à une question adressée par un abonné. Nous engageons les élèves à nous communiquer les difficultés qu'ils peuvent rencontrer. La publicité des réponses est un moyen d'être utile à tous, et de plus elle provoque la discussion, et, s'il y a lieu, des observations critiques sur les explications.

Pour remonter à l'origine du symbole imaginaire, il est nécessaire d'avoir recours à quelque préambule.

La *résolution* des équations est l'objet principal de l'algèbre. Lorsqu'on a autant d'équations que d'inconnues, l'élimination apprend à les réduire à l'équation où ne figure qu'une inconnue, et cette équation peut toujours être mise sous la forme d'une équation dont un membre est un polynôme entier en x (l'inconnue) et dont l'autre membre est zéro. De sorte que la résolution des équations algébriques est ramenée à découvrir les valeurs de x qui annulent un polynôme donné. Or il est de principe que lorsque dans un produit un des facteurs est nul, quels que soient d'ailleurs les autres facteurs, tous *entiers*, le produit est toujours nul. On est donc naturellement conduit à chercher à décomposer le polynôme en facteurs de moindre degré possible, et par conséquent, s'il y a moyen, en facteurs du premier degré. Ainsi la résolution des équations dépend en dernière analyse de la décomposition des polynômes en facteurs. Les algébristes sont parvenus à démontrer qu'il y a trois classes de polynômes.

1^{re} *classe.* Polynômes décomposables en autant de facteurs du premier degré qu'il y a d'unités dans l'exposant du degré.

2^e *classe.* Polynômes décomposables en facteurs du premier degré et en facteurs du deuxième degré, eux-mêmes indécomposables.

3^e *classe.* Polynômes décomposables seulement en facteurs du deuxième degré indécomposables.

On sait, de plus, que les polynômes de degré pair peuvent renfermer les trois classes ; mais la troisième classe est exclue des polynômes de degré impair.

Ensuite tout facteur du premier degré peut se mettre sous la forme $x - a$, où a est rationnel ou irrationnel ; et tout facteur du second degré *indécomposable* est nécessairement de la forme $(x - \alpha)^2 + \beta^2$, α et β étant des nombres rationnels ou irrationnels.

Ces deux genres de facteurs ne jouent pas le même rôle dans la résolution des équations ; le premier genre de facteurs résolvent le polynôme en posant $x = a$; ce sont les vraies solutions dans le véritable sens du mot. Pour les seconds facteurs, il n'en est pas ainsi. Il faut remplacer partout x^2 par $2\alpha x - \alpha^2 - \beta^2$, et opérer ce remplacement jusqu'à ce que le polynôme soit réduit à un polynôme du premier degré de la forme $Ax + B$, et on aura alors identiquement $A = 0$ et $B = 0$.

Par exemple, x^5 dônnera d'abord $(2ax - \alpha^2 - \beta^2)^2 x = 4a^2x^3 - 4a(\alpha^2 + \beta^2)x^2 + (\alpha^2 + \beta^2)^2 x = 4x^2 [a^2 - 4a(\alpha^2 + \beta^2)] + (\alpha^2 + \beta^2)^2 x$. On remplace de nouveau x^2 par $2\alpha x - \alpha^2 - \beta^2$, et ainsi de suite. On voit donc que les facteurs du deuxième degré fournissent d'autres genres de solution. Ces facteurs ne fournissent pas de solutions proprement dites, puisqu'aucune valeur ne répond à x ; il s'agit de savoir si on ne pour rait abréger l'opération si longue de la substitution par x^2 et la ramener à une substitution par x seulement. On y parvient au moyen de la convention suivante : le facteur du second degré $(x-\alpha)^2-\beta^2$ est décomposable en deux facteurs $(x-\alpha+\beta)$ et $x-\alpha-\beta$. On décompose de même $(x-\alpha)^2+\beta^2$ en deux facteurs $x-\alpha+\beta\sqrt{-1}$ et $x-\alpha-\beta\sqrt{-1}$. Le signe $\sqrt{-1}$, qu'on prononce *racine moins un*, indique que, dans la multiplication, on doit poser $\beta\sqrt{-1}\,.-\beta\sqrt{-1}=+\beta^2$. Quoiqu'on prononce *racine moins un*, il n'y a là ni racine, ni unité négative : c'est purement un signe qui porte pour nom ces trois mots-là. L'avantage de cette notation consiste en ce qu'au lieu de remplacer x^2, on peut mettre $x=\alpha+\beta\sqrt{-1}$ dans le polynôme, et ayant égard à la convention, le polynôme renferme deux parties : l'une sans le signe $\sqrt{-1}$ et l'autre avec ce signe, et chacune s'annule d'elle-même. On aurait pu adopter tout autre signe et toute autre dénomination ; c'est l'*analogie* qui a déterminé ce choix. De même que $\beta\sqrt{1}\,.\,\beta\sqrt{1}=\beta^2$, on a $\beta\sqrt{-1}\,.\,\beta\sqrt{-1}=-\beta^2$. La première équation a un sens logique ; la seconde a un sens symbolique qui devient logique, en la rattachant à la décomposition en facteurs. Lorsque $\beta=1$, alors $1\sqrt{-1}\,.\,1\,.\sqrt{-1}=-1$; et comme on supprime ordinairement l'unité lorsqu'elle entre comme facteur, on écrit $\sqrt{-1}\,.\sqrt{-1}=-1$; dans cette équation, il faut toujours sous-entendre l'unité omise ; car la multiplication de deux signes est une extravagance.

De même, quand le polynôme a un facteur $x-\alpha$, qu'on appelle α une racine, parce qu'elle annule le polynôme ; on a, par *analogie*, donné le nom de racine à $\alpha+\beta\sqrt{-1}$, lorsque $x-\alpha-\beta\sqrt{-1}$ est facteur ; et pour distinguer ce genre de racines, on les a surnommées *racines imaginaires* ; elles ont toutefois cette signification *réelle*, qu'elles indiquent l'existence de facteurs du second degré indécomposables, comme sont les nombres premiers en arithmétique. Lorsque le polynôme a plusieurs de ces facteurs, par exemple quatre, $(x-\alpha+\beta\sqrt{-1})(x-\alpha-\beta\sqrt{-1})(x-\gamma+\delta\sqrt{-1})$ $(x-\gamma-\delta\sqrt{-1})$; ce produit peut s'exécuter de six manières différentes, et le résultat est toujours le même, pourvu qu'on reste fidèle à la convention $\beta\sqrt{-1}\,.\,\gamma\sqrt{-1}=-\beta\gamma$.

On donne quelquefois aux racines imaginaires d'autres formes symboliques. Ainsi on a :

$$\alpha=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}.\cos\varphi\,;\quad \beta=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}.\sin\varphi\,;$$

d'où $\alpha+\beta\sqrt{-1}=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}(\cos\varphi+\sin\varphi\sqrt{-1})=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}.e^{\varphi\sqrt{-1}}$.

Le facteur $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ pris positivement se nomme le *module* ou, selon Gauss, le *norme* de chacune des deux racines $\alpha\pm\beta\sqrt{-1}$, dites racines *conjuguées*. Les relations des imaginaires avec les lignes trigonométriques ont donné lieu à l'idée de représenter les *directions* par des imaginaires : on en parlera dans une autre occasion.

On a quelquefois des signes, tels que $\sqrt[4]{-1}$, provenant de l'équation $x^4+1=0$; mais on sait toujours ramener ces sortes de racines au type unique $\alpha+\beta\sqrt{-1}$.

M. Gauss représente $\sqrt{-1}$ par la lettre italique i, ce qui est plus commode, $\alpha\sqrt{-1}=\alpha i$. Tm.

PROBLÈME D'OPTIQUE.

PAR MM. WOESTYN ET VAUQUELIN,
Élèves de l'École normale.

Soit une droite AB (*fig.* 18), donnée de grandeur et de position dans un plan horizontal. Considérons le point A comme un élément de la surface de ce plan horizontal. Soit alors une droite BC située dans le plan vertical qui passe par AB. En faisant glisser sur BC une lumière d'intensité constante, il y a une position M du point lumineux pour lequel l'éclairement produit en A est le plus grand possible. On demande le lieu des points M satisfaisant à cette condition, quand la droite BC prend toutes les positions possibles autour du point B dans le plan vertical.

Nous traiterons la question en coordonnées polaires. Soit donc A le pole, AB l'axe polaire. Je pose :

$$\mathrm{MAB} = \omega; \quad \mathrm{MBA} = \theta; \quad \mathrm{AM} = \rho; \quad \mathrm{AB} = \alpha.$$

En représentant par 1 la quantité de lumière qu'envoie le point lumineux à l'unité de distance, et sur une surface sur laquelle le rayon tombe perpendiculairement, la quantité de lumière reçue par le point A sera :

$$\frac{\sin\omega}{\rho^2}. \qquad (1)$$

Telle est l'expression qu'il faut rendre maximum.

Le triangle AMB donne :

$$\frac{\rho}{\alpha} = \frac{\alpha\sin\theta}{\sin(\omega+\theta)} = \frac{\alpha\sin\theta}{\sin\omega\cos\theta+\sin\theta\cos\omega} = \frac{\alpha}{\sin\omega\cot\theta+\cos\omega},$$

d'où :
$$\rho = \frac{\alpha}{\sin\omega\cot\theta+\cos\omega}. \qquad (2)$$

L'expression (1) devient alors :

$$\frac{\sin\omega(\sin\omega\cot\theta+\cos\omega)^2}{\alpha^2}.$$

Et comme α^2 est constant, il suffit de rendre maximum l'expression $\sin\omega\,(\sin\omega\cot\theta+\cos\omega)^2$. Pour cela il faut égaler à 0 la dérivée de cette expression, ce qui donne en faisant les réductions :

$$(\sin\omega\cot\theta+\cos\omega)\,(3\cos\omega\sin\omega\cot\theta+1-3\sin^2\omega)=0. \qquad (3)$$

En donnant à θ une valeur particulière, cette équation fera connaître ω, et par suite l'équation (2) donnera ρ, de sorte que le point M sera déterminé, et si l'on élimine θ entre (2) et (3), on aura l'ensemble de tous les points M qui satisfont à la condition demandée. Or l'équation (3) donne :

$$\cot\theta = -\frac{\cos\omega}{\sin\omega} \quad \text{et} \quad \cot\theta = \frac{3\sin^2\omega - 1}{3\sin\omega\cos\omega}.$$

La première valeur donnant toujours pour ρ une valeur infinie est inadmissible, et la seconde donne :

$$\rho = \frac{3a\cos\omega}{2};$$

équation d'un cercle qui passe au point A, et dont le diamètre est $\frac{3a}{2}$.

Ce cercle répond bien aux points qui donnent un éclairement maximum. Car, en cherchant la seconde dérivée de $\frac{\sin\omega}{\rho}(\sin\omega\cot\theta + \cos\omega)^2$, et en y mettant la valeur de

$$\cot\theta = \frac{3\sin^2\omega - 1}{3\sin\omega\cos\omega},$$

cette seconde dérivée se réduit à : $-\frac{2}{3}\frac{1+\sin^2\omega}{\sin\omega\cos^2\omega}$.

Or, pour avoir tous les points de la courbe, il suffit de faire varier ω depuis 0° jusqu'à 180°, et dans cet intervalle le sinus est toujours positif. Donc, la seconde dérivée est négative, et par conséquent, il y a maximum.

Note. Le point B étant fixe et la droite BC quelconque, le lieu du point M est une sphère, passant par le point A, ayant son centre sur AB, et pour diamètre $\frac{3a}{2}$. Tm.

SOLUTION ANALYTIQUE DU PROBLÈME 103.
(t. IV, p. 560 et t. V, p. 127).

PAR MM. WOESTYN ET VAUQUELIN,
Elèves de l'École normale.

Un angle constant étant circonscrit à une courbe plane géométrique, la tangente au lieu géométrique du sommet, menée par un des sommets est aussi tangente au cercle qui passe par ce sommet et les deux points de contact correspondants.

Soit $y=f(x)$ l'équation de la courbe plane donnée, qu'on sache ou non trouver cette équation. Nous supposons d'ailleurs les axes dans une position quelconque, mais rectangulaire.

Soient x', y'; x'', y'' les coordonnées de deux points A et B de la courbe donnée. On a les équations :

$$\left.\begin{aligned} y' &= f(x') \\ y'' &= f(x'') \end{aligned}\right\} \qquad (a)$$

De plus soient AM, BM (*fig.* 19) les tangentes à la courbe donnée aux points A et B, et soit AMB l'angle constant de ces tangentes; on a, en désignant par x, y les coordonnées du point M, les relations :

$$\left.\begin{aligned} \frac{y-y'}{x-x'} &= f'(x') \\ \frac{y-y''}{x-x''} &= f'(x'') \end{aligned}\right\} \qquad (b)$$

Et en désignant par m la tangente de l'angle AMB :

$$m=\frac{f'(x'')-f'(x')}{1+f'(x')f'(x'')},$$

ou

$$m + mf'(x')f'(x'') = f'(x'') - f'(x'). \qquad (1)$$

Les équations (b) deviennent en chassant les dénominateurs, et en ayant égard aux équations (a) :

$$f'(x')(x - x') = y - f(x'), \qquad (2)$$
$$f'(x'')(x - x'') = y - f(x''). \qquad (3)$$

En éliminant x' et x'' entre les équations (1), (2), (3), on aurait une relation entre x et y qui serait le lieu géométrique des points M, et de cette relation on pourrait tirer le coefficient angulaire de la tangente MT. Ce coefficient est, comme on sait, $\frac{dy}{dx}$, x étant la variable indépendante, et y la fonction de x donnée par l'équation du lieu des points M. Cette équation ne pourra en général s'obtenir que quand on connaîtra la forme de la fonction (f), mais on peut calculer $\frac{dy}{dx}$ sans connaître cette équation.

En effet, au moyen des équations (1), (2), (3), chacune des quantités x', x'', y peut être considérée comme fonction de la variable indépendante x; car trois équations entre trois inconnues suffisent en général pour déterminer chacune de ces inconnues. On peut prendre les dérivées de chaque membre des équations (1), (2), (3) sous ce point de vue, et exprimer que la dérivée du premier membre égale celle du second.

L'équation (1) donne :

$$mf'(x'')f''(x')\frac{dx'}{dx} + mf'(x')f''(x'')\frac{dx''}{dx} =$$
$$= f''(x'')\frac{dx''}{dx} - f''(x')\frac{dx'}{dx},$$

ou

$$\frac{dx'}{dx}f''(x')\left[mf'(x'')+1\right] + \frac{dx''}{dx}f''(x'')\left[mf'(x')-1\right] = 0.$$

En remplaçant m par sa valeur, les binômes

$$mf'(x'')+1, \quad mf'(x')-1,$$

deviennent respectivement :

$$\frac{1+(f'(x'')^2}{1+f'(x')f'(x'')}; \quad -\frac{1+[f'(x')]^2}{1+f'(x')f'(x'')}.$$

De sorte que l'équation précédente devient :

$$\frac{dx'}{dx}f''(x')\,[1+(f'(x')^2)]-\frac{dx''}{dx}f''(x'')\,[1+f'(x')^2]=0. \qquad (4)$$

L'équation (2) donne :

$$f''(x')\,\frac{dx'}{dx}\,(x-x')+f'(x')\left(1-\frac{dx'}{dx}\right)=\frac{dy}{dx}-f'(x')\,\frac{dx'}{dx}$$

d'où

$$f''(x')\,\frac{dx'}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{dx}-f'(x')}{x-x'}.$$

L'équation (3) donne de la même manière :

$$f''(x'')\,\frac{dx''}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{dx}-f'(x'')}{x-x''}.$$

Portant ces valeurs dans (4), on a :

$$\frac{\dfrac{dy}{dx}-f'(x')}{x-x'}\left\{1+[f'(x'')]^2\right\}-\frac{\dfrac{dy}{dx}-f'(x'')}{x-x''}\left\{1+f'(x')^2\right\}=0;$$

ou

$$\frac{dy}{dx}\left\{(x-x'')[1+[f'(x'')^2]-(x-x')[1+f'(x')^2]\right\}=$$
$$=(x-x'')f'(x')\,[1+f'(x'')^2]-(x-x')f'(x'')\,[1+f'(x')^2].$$

Ainsi :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(x-x'')\,f'(x')[1+f'(x'')^2]-(x-x')f'(x'')[1+f'(x'')^2]}{(x-x'')\,[1+f'(x'')^2]-(x-x')\,[1+f'(x')^2]}=$$
$$=\frac{(x-x'')f'(x')\,[1+f'(x'')^2]-(x-x')\,f'(x'')\,[1+f'(x'')^2]}{(x-x'')\,[f'(x'')^2]-(x-x')[f'(x')^2]+x'-x}$$

Il s'agit maintenant d'avoir le coefficient angulaire de la tangente au cercle au point M.

Pour cela C étant le centre du cercle, il faut chercher le coefficient angulaire de la droite CM.

Pour avoir les coordonnées du centre, il suffit de prendre le point d'intersection des deux lignes EC, DC menées perpendiculairement aux droites MA et MB en leurs milieux.

Les équations de ces normales sont :

$$\left.\begin{aligned} Y-\beta &= -\frac{1}{f'(x')}(X-\alpha), \\ Y-\beta' &= -\frac{1}{f'(x'')}(X-\alpha), \end{aligned}\right\}\text{avec}\left\{\begin{aligned} \alpha &= \frac{x+x'}{2};\ \beta=\frac{y+y'}{2}; \\ \alpha' &= \frac{x+x''}{2};\ \beta'=\frac{y+y''}{2}. \end{aligned}\right.$$

Les équations de ces normales donnent par leur combinaison, les coordonnées du point C, on a successivement :

$$f'(x')\,Y+X=\beta f'(x')+\alpha,$$
$$f'(x'')\,Y+X=\beta' f'(x'')+\alpha',$$
$$Y\,[f'(x'')-f'(x')]=\beta' f'(x'')-\beta f'(x')+\alpha'-\alpha,$$
$$X\,[f'(x'')-f'(x')]=(\beta-\beta')f'(x')f'(x'')+\alpha f'(x'')-\alpha' f'(x'.)$$

Le coefficient angulaire de CM étant $\dfrac{Y-y}{X-x}$,

On tire des deux équations précédentes le rapport :

$$\frac{Y-y}{X-x}=\frac{\beta' f'(x'')-\beta f'(x')+\alpha'-\alpha-y[f'(x'')-f'(x')]}{(\beta-\beta')f'(x')f'(x'')+\alpha f'(x'')-\alpha' f'(x')-x[f'(x'')-f'(x)]}$$
$$=\frac{(\beta'-y)f'(x'')-(\beta-y)f'(x')+\alpha'-\alpha}{(\beta-\beta')f'(x')f'(x'')+(\alpha-x)f'(x'')-(\alpha'-x)f'(x')}.$$

Or

$$\beta-\beta'=\frac{y'-y''}{2},\quad \alpha-\alpha'=\frac{x'-x''}{2},\quad \alpha-x=\frac{x'-x}{2},\quad \alpha'-x=\frac{x''-x}{2},$$
$$\beta-y=\frac{y'-y}{2},\quad \beta'-y'=\frac{y''-y}{2}.$$

Ainsi :

$$\frac{Y-y}{X-x}=\frac{(y''-y)f'(x'')-(y'-y)f'(x')+(x''-x')}{(y'-y'')f'(x')f'(x'')+(x'-x)f'(x'')-(x''-x)f'(x')}.$$

En se rappelant que $y'=f(x')$ et que $y''=f(x'')$, les équations (2) et (3) donnent :

$$y-y'=f'(x')(x-x')\,;\quad y-y''=f'(x'')(x-x'')\,;$$
$$y'-y''=f'(x'')\,(x-x'')-f'(x')\,(x-x').$$

d'où

$$\frac{Y-y}{X-x}=\frac{-f'(x'')^2(x-x'')+f'(x')^2(x-x')+x''-x'}{(x-x'')f'(x')[1+f'(x'')^2]-(x-x')f''(x)[1+f'(x')^2]}.$$

Or, la tangente au cercle étant perpendiculaire au rayon, le coefficient angulaire de cette tangente sera :

$$\frac{(x-x'')f'(x')[1+f'(x'')^2]-(x-x')f''(x)[1+f'(x')^2]}{(x-x'')f'(x'')^2-f'(x')^2(x-x')+x'-x''}\,;$$

valeur précisément égale à celle de $\frac{dy}{dx}$, trouvée précédemment. Ainsi, le théorème est démontré.

RECUEIL DE FORMULES ET DE VALEURS

relatives aux fonctions circulaires et logarithmiques.

(Suite, voir p. 79.)

—

21. Sinus arc égal au rayon = 0,84147098480514.
    Cosinus id. = 0,54030230584341.

22. Arc égal à son cosinus = $42°\,20'\,47''\,14'''$, etc.
    Longueur de cet arc = 0,7390847.
    Se trouve par la règle de fausse position et des parties proportionnelles.

23. Arc égal au double de son sinus = $54°\,18'\,6''\,52'''\,43^{\text{IV}}\,33^{\text{V}}$.
    Sinus de cet arc = 0,8121029.
    Cosinus de cet arc = 0,5335143.

24. Arc de demi-segment équivalent à un $\frac{1}{8}$ du cercle $= 66°$ $10'\ 23''\ 37'''$.

Sinus de cet arc $= 0{,}9147711$.

Cosinus de cet arc $= 0{,}4039718$.

Obs. Se résout au moyen du probl. 22.

25. Arc de segment équivalent au $\frac{1}{3}$ du cercle $= 149°\,16'\,27''$.

Corde de cet arc $= 1{,}9285340$.

26. Arc égal à son sinus plus le cosinus plus le rayon $= 138°\,11'\,53''$.

Sinus $= 0{,}6665578 = \frac{2}{3}$ presque.

Cosinus $+$ rayon $= 1{,}7454535$.

Obs. Par fausse position et parties proportionnelles.

27. Arc égal à la moitié de sa tangente $= 66°\,46'\,54''\,14'''$.

Tangente de cet arc $= 2{,}3311220$.

28. Arc égal au rayon divisé par le sinus de la moitié de l'arc $= 84°\,53'\,38''\,51'''$.

Obs. Il sert à résoudre ce problème : Mener par l'extrémité d'un cadran, une corde qui retranche un arc égal à cette corde prolongée jusqu'au rayon qui passe par l'autre extrémité du cadran.

29. Arcs égaux à leurs tangentes $90° - 90°$.

$3.90° - 12°\,32'\,48''$.

$5.90° - \ \ 7°\,22'\,32$.

$7.90°\ldots.$

$\vdots$

$19.90°\ldots.$

(*Voir* t. I, p. 245.)

30. $\Sigma_1^{m-1} \sin n\theta \sin n\varphi = \dfrac{\sin m\theta \sin(m-1)\theta - \sin m\varphi \sin(m-1)\theta}{2(\cos\theta - \cos\varphi)}.$

(Journ. de l'Éc. Polyt., cah. 18, p. 419, formule de Lagrange.) (V. t. III, p. 526).

Σ est relatif à n.

31. $\sin nx = 2\sin x[\cos x + \cos 3x + \cos 5x \ldots + \cos(n-1x)]$; n pair.

$\sin nx = \sin x + 2\sin x[\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x + \ldots \cos(n-1)x]$; n impair.

32. $\operatorname{Tang} x = x + \frac{1}{2}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + \frac{1382}{155925}x^{11} + \frac{21844}{6081075}x^{13} + \ldots$

$\operatorname{Tang} x = Ax + Bx^3 + Cx^5 + Dx^7 + Ex^9 + Fx^{11} + Gx^{13} + \ldots$

Loi; $3B = A^2$; $5C = 2AB$; $7D = 2AC + B^2$; $9E = 2(AD + BC)$; $11F = 2(AE + BD) + C^2$; $13G = 2(AF + BE + CD)$; $15H = 2(AG + BF + CE) + D^2$, etc.

33. $\frac{13\sqrt{146}}{50} = \frac{1}{2} \cdot \frac{13}{5}\sqrt{1 + \left(\frac{11}{5}\right)^4} = 3{,}141591955 = \pi$ à un millionième près.

34. $\frac{501 + 80\sqrt{10}}{240} = 3{,}1415926536 = \pi$ à un billionième près.

35. $x = \cos x - \sin x$; $x = 26^\circ\, 9'\, 45'',615$;

$x = \cos x + \sin x$; $x = 72^\circ\, 7'\, 11'',324$;

$x = \cot x$; $x = 49^\circ\, 17'\, 35'',79$;

$x = \operatorname{coséc} x$; $x = 63^\circ\, 50'\, 14'',385$.

36. $\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{9} \ldots\ldots$ (Wallis.)

(Suite.)

NOTICE SUR L'ÉLIMINATION.

Suite. (V. t. I, p. 125.)

FONTAINE, VANDERMONDE, LAPLACE.

—

9. Considérées en elles-mêmes, les formules de Cramer, indépendamment de leur application primitive, jouent un

grand rôle dans la théorie combinatoire, dans la théorie des nombres, dans la résolution générale des équations, dans le calcul aux différences finies, et dans l'intégration d'une certaine classe d'équations différentielles, et renferment même le contenu de beaucoup de théorèmes géométriques : aussi ces formules se sont-elles présentées à tous ceux qui ont cherché la forme générale soit des racines des équations algébriques, soit des intégrales des équations différentielles. Au premier rang parmi ces géomètres, dans l'ordre de date, il faut compter Fontaine (*). Calculateur intrépide, profond dans l'art combinatoire, il a signalé le premier une belle identité dont il tire un grand parti (**). Cette identité consiste en ceci : soient huit quantités quelconques, x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4 ; pour abréger, nous représentons, avec Vandermonde, par [1, 2] le binôme $x_1y_2 - x_2y_1$, et ainsi des autres. Cette notation admise, l'identité peut s'écrire ainsi :

$$[1,2]\,[3,4] + [1,4]\,[2,3] = [1,3]\,[2,4].$$

10. La même identité peut se traduire en langage géométrique. En effet, les huit quantités représentant les coordonnées rectangulaires de quatre points situés sur un même plan, chaque binôme est le double de l'aire d'un triangle, ayant pour sommets l'origine et deux de ces points. De là ce théorème : Si d'un point O situé dans le plan du quadrilatère ABCD, on mène des droites aux quatre angles, on a :

$$\mathrm{OAB} \times \mathrm{OCD} \pm \mathrm{OBC} \times \mathrm{OAD} = \mathrm{OAC} \times \mathrm{OBD}.$$

Par OAB on entend l'aire du triangle OAB et ainsi des autres.

On prend le signe supérieur quand le point O est en dehors

(*) Fontaine (des Bertins, Alexis), né à Claveison (Drôme), vers 1705, mort en 1771.

(**) Traité de Calcul différentiel et intégral, p. 90, in-4., 1770.
C'est un recueil de mémoires; celui que nous citons est de 1748.

du quadrilatère, et le signe inférieur quand le point O est dans l'intérieur du quadrilatère.

Vandermonde.

11. Un des génies les plus abstraits du dernier siècle, Vandermonde, élève de Fontaine (*), a eu l'ingénieuse idée de prendre la question à rebours. Au lieu de chercher directement la résolution générale de n équations du premier degré à n inconnues, il a entrepris de démontrer que la formule de Cramer convient à ces équations. Dans cette vue, il change et améliore encore la notation de son devancier. Chaque coefficient est désigné par deux chiffres superposés ; le supérieur indique le quantième de l'équation, et l'inférieur la place de l'inconnue dans l'équation. Ainsi $\frac{5}{3}$ désigne le coefficient de la troisième inconnue dans la cinquième équation. Bien entendu que les inconnues conservent toujours respectivement la même place que dans la première équation.

12. Pour former le dénominateur, il a recours à une méthode récurrente, différente de celle de Bezout, mais susceptible de s'écrire d'une manière fort abrégée (**).

Dans cette notation, il fait usage d'un genre de combinaisons que les Allemands désignent sous le nom de combinaisons *cycliques* : ce sont les arrangements *circulants* de M. Cauchy. Ils se présentent fréquemment dans la théorie des fonctions symétriques des racines et servent à la résolution générale des équations binômes ; il est utile de les connaître. Pour fixer les idées, supposons 4 éléments à combiner, que nous représentons par les nombres 1, 2, 3, 4 ; ils donnent 24 arrangements. Écrivons le premier arrangement 1, 2, 3, 4 autour

(*) Vandermonde, né à Paris en 1735, mort le 1er janvier 1796; les prénoms de Vandermonde ne sont indiqués dans aucune notice biographique.

(**) Mém. de l'Acad. des Sc., 1772, 2e partie, p. 516.

d'une circonférence ; en commençant par 2 et circulant, on obtient l'arrangement 2341 ; partant de 3, on a 3412, et puis 4123 ; ensuite on retombe sur le premier arrangement 1234. On a ainsi un premier groupe :

1234
2341
3412
4123

Écrivons maintenant sur la circonférence 1324 et opérant de même, on obtient le second groupe :

1324
3241
2413
4132

En général, on écrit successivement sur la circonférence les six arrangements qui se terminent à droite par 4 ; chacun fournit un groupe circulant de 4 arrangements, et en tout 24 arrangements, et, comme il est facile de voir, essentiellement différents. Par conséquent, on a ainsi les arrangements possibles décomposés en six groupes. Si on avait 5 objets à combiner, on conçoit qu'on écrive circulairement les 24 arrangements terminés à droite par 5 ; chacun fournit un groupe de 5 arrangements, et ainsi de suite.

13. Cela posé, rappelons que $\overset{\alpha}{a}$ désigne le coefficient de l'inconnue qui occupe la place a dans l'équation du rang α. Voici, d'après cette convention, la notation de Vandermonde :

$$\frac{\alpha\,|\,\beta}{a\,|\,b} = \frac{\alpha}{a}\cdot\frac{\beta}{b} - \frac{\alpha}{b}\cdot\frac{\beta}{a} \tag{1}$$

$$\frac{\alpha\,|\,\beta\,|\,\gamma}{a\,|\,b\,|\,c} = \frac{\alpha}{a}\cdot\frac{\beta\,|\,\gamma}{b\,|\,c} + \frac{\alpha}{b}\cdot\frac{\beta\,|\,\gamma}{c\,|\,a} + \frac{\alpha}{c}\cdot\frac{\beta\,|\,\gamma}{a\,|\,b} \tag{2}$$

$$\frac{\alpha|\beta|\gamma|\delta}{a|b|c|d} = \frac{\alpha}{a}\cdot\frac{\beta|\gamma|\delta}{b|c|d} - \frac{\alpha}{b}\cdot\frac{\beta|\gamma|\delta}{c|d|a} + \frac{\alpha}{c}\cdot\frac{\beta|\gamma|\delta}{d|a|b} - \frac{\alpha}{d}\cdot\frac{\beta|\gamma|\delta}{a|b|c} \tag{3}$$

et ainsi de suite.

On voit 1° que les lettres grecques conservent un ordre invariable ; 2° que les lettres latines suivent un ordre circulant ; 3° lorsque le nombre des lettres est pair, les termes sont alternativement positifs et négatifs ; si le nombre des lettres est impair, les termes de la formule sont tous positifs. C'est en ce point que ce procédé se rattache à celui de Cramer.

Si on traduit ces formules selon la notation usitée, elles deviennent :

$$\frac{\alpha \mid \beta}{a \mid b} = ab' - a'b,$$

$$\frac{\alpha \mid \beta \mid \gamma}{a \mid b \mid c} = a(b'c'' - b''c') + b(c'a'' - c''a') + c(a'b'' - a''b').$$

14. Ensuite Vandermonde établit cette proposition fondamentale : en changeant mutuellement deux lettres du même alphabet, la fonction représentée par abréviation ne fait que changer de signe.

Cette proposition est basée sur deux autres, qu'il démontre péniblement. Nous préférons la démonstration plus claire, plus facile de Laplace, que nous donnons ci-dessous.

15. Un corollaire important découle de cette proposition : Si deux lettres du même alphabet deviennent égales, la formule devient identiquement nulle. En effet, en changeant entre elles ces deux lettres devenues égales, la formule restera évidemment la même, et toutefois elle doit changer de signe, d'après la proposition fondamentale (14) ; or une quantité ne peut conserver sa valeur, en changeant de signe, que lorsqu'elle est nulle.

A l'aide de corollaires, on démontre ensuite facilement, comme nous verrons plus bas, que les formules de Cramer résolvent complétement les équations du premier degré.

16. En combinant ensemble les équations (2) et (3), Vandermonde exprime la formule avec quatre lettres en produits

de formules en deux lettres. A cet effet, il remplace $\dfrac{\beta \mid \gamma \mid \delta}{b \mid c \mid d}$ par sa valeur tiréee de l'équation (2), et ainsi des autres. Cette décomposition facilite les calculs numériques.

Laplace.

17. Dans un mémoire intitulé : Recherches sur le calcul intégral et sur le système du monde, et qui contient la base des méthodes d'approximation développées depuis dans la Mécanique céleste, l'illustre géomètre est amené à résoudre n équations linéaires à n inconnues (*). « Les géomètres, » dit-il, ont donné pour cet objet des règles générales, mais » comme elles ne me paraissent avoir été jusqu'ici démon- » trées que par induction, et que, d'ailleurs, elles sont im- » praticables pour peu que le nombre des équations soit con- » sidérable, je vais reprendre de nouveau cette matière et » donner quelques procédés plus simples que ceux qui sont » déjà connus. »

Laplace ne cite que Cramer et Bezout, sans faire aucune mention du travail de Vandermonde, qui a précédé le sien, quoique imprimé dans le même volume. Il est extrêmement probable que Laplace n'a pas pris connaissance du mémoire de son confrère : on sait, d'ailleurs, que les analystes français lisent peu les ouvrages les uns des autres. Ceci nous explique également comment la résolution de l'équation du onzième degré à deux termes, la plus importante découverte de Vandermonde, soit restée ignorée jusqu'à ce qu'elle ait attiré l'attention de Lagrange, après la découverte similaire de M. Gauss.

18. Laplace adopte la notation et la méthode récurrente

(*) Mémoires de l'Acad. des Sciences, 2e partie, p. 294. C'est le deuxième mémoire de Laplace, le premier est inséré dans le Recueil des Savants étrangers, t. VII.

de Bezout : il nomme *variation* ce que Cramer appelle *dérangement*. Il montre d'abord que la règle de Bezout retombe dans celle de Cramer. Cela est évident pour les deux permutations $+ab - ba$; en écrivant dans ces deux termes la lettre c la dernière, le nombre de variations dans chacun d'eux reste le même, aussi conservent-ils le même signe qu'ils avaient ; mais si, dans ces termes, on écrit la lettre c l'avant-dernière, le nombre de leurs variations est augmenté d'une unité, et suivant la règle, ils changent de signe ; car un nombre ne peut augmenter de l'unité sans changer de parité. Si l'on écrit la lettre c l'antépénultième, le nombre de variations augmente de deux unités ; alors le premier signe du terme reparaît, et ainsi de suite pour un plus grand nombre de facteurs. En général, tous les termes dont le nombre de variations sera nul ou pair auront le signe $+$ et les autres le signe $-$. D'ailleurs le nombre de termes est, suivant les deux méthodes, égal à $1.2.3 \ldots . n-1, n$ s'il y a n lettres ; et tous ces termes sont différents les uns des autres. Donc les formules qu'on obtient par les deux procédés sont identiques. Il suffit donc de s'en tenir à la méthode de Bezout.

19. Supposons, pour fixer les idées, qu'il y ait 10 lettres ; pour connaître le signe d'un terme, il faudra compter le nombre de *variations* relativement à la première lettre à gauche, ensuite relativement à la seconde lettre, jusqu'à la pénultième inclusivement, et ajouter tous ces nombres. Si la première lettre restant à sa place, on permute les autres d'une manière quelconque ; il est évident que le nombre de variations dépendant de la première lettre n'a pas changé ; car elle sera toujours suivie de lettres plus avancées et moins avancées qu'elle dans l'alphabet, dans un autre ordre, mais toujours dans le même nombre ; et si l'on rend fixes les deux premières lettres, quelque permutation qu'on fasse entre les

huit dernières, le nombre de variations dépendantes des deux lettres fixes ne change pas, et ainsi de suite. Il en est de même si l'on rend fixes les lettres à droite.

20. En général, le nombre des lettres étant n, si on rend fixes les p premières lettres et les q dernières d'un terme, quelque permutation qu'on fasse entre les $n-p-q$ lettres intermédiaires, le nombre de variations provenant des lettres fixes reste toujours le même. Le changement dans le nombre total des variations ne peut provenir que des lettres mobiles.

21. Donc, si on rend mobiles seulement deux lettres adjacentes, il est évident que leur échange de place amènera ou une variation en plus ou en moins ; le nombre total de variations changera donc de parité ; par conséquent, suivant la règle, le signe du terme changera.

22. Reprenons l'exemple du § 19. Soit un terme de 10 facteurs et où la lettre quelconque d occupe la septième place, et la lettre f la première place. Admettons que le terme a le signe $+$; si on insère la lettre d entre la sixième et la cinquième vers la droite, il y aura une variation de plus ou de moins, en vertu de (21), le terme prendra le signe $-$; si on place maintenant la lettre d entre la cinquième et la quatrième, le terme reprendra le signe $+$, et ainsi de suite. En général, quand une lettre fait un nombre pair de mouvements, soit vers la droite, soit vers la gauche, le signe du terme ne change pas ; autrement, il change. Ainsi, lorsque la septième lettre d sera arrivée avant la première f, elle aura fait six mouvements successifs vers la gauche ; par conséquent le signe ne change pas. Dans cette position, la première lettre f est devenue la seconde ; elle n'aura besoin que de faire cinq mouvements vers la droite pour arriver à la septième place, qu'occupait primitivement la lettre d. Il y aura donc un changement de signe ; et généralement, lorsque deux lettres échangent leurs places dans un terme, si l'une

fait p mouvements vers la droite, l'autre fera $p-1$ mouvements vers la gauche ; or l'un de ces deux nombres p, $p-1$ est nécessairement impair. Ainsi, par suite de cet échange, le terme change de signe.

23. Laplace donne le nom de *résultante* à la somme des permutations de n lettres prises n à n, les signes des termes étant déterminés d'après la règle de Cramer. Il suit du paragraphe précédent que, lorsque dans une résultante on échange deux lettres entre elles, on obtient une seconde résultante égale à la première prise avec un signe opposé.

C'est le théorème de Vandermonde (14) avec son corollaire (15).

24. Ensuite Laplace passe à la résolution des équations du premier degré, et procède de la même manière que Vandermonde. Un seul exemple suffit pour montrer la marche de la démonstration générale.

Soient les trois équations

$$a'x + b'y + c'z = d',$$
$$a''x + b''y + c''z = d'',$$
$$a'''x + b'''y + c'''z = d'''.$$

Formons la résultante (abc), on aura :

$$(abc) = a'(b''c''' - c''b''') + a''(c'b''' - b'c''') + a'''(b'c'' - c'b'').$$

Si, dans cette résultante, on écrit b partout où est a, sans mettre a à la place de b, elle s'annule ; de même, quand on remplace a par c, et cela en vertu du corollaire (15) ; donc si on multiplie la première équation par $b''c'''-c''b'''$; la seconde, par $c'b'''- b'c'''$; la troisième par $b'c''- c'b''$, et qu'on les ajoute ensemble, les coefficients de y et z sont identiquement nuls. Il ne reste que x dont on trouve la valeur, conforme à celle qui est indiquée par la méthode Cramer.

25. M. Gergonne est le premier qui, dans ses Annales, ait

donné une exposition élémentaire de la démonstration de Laplace t. XII, p. 281-1821. Depuis, divers auteurs ont admis cette exposition dans leurs ouvrages, et, comme d'ordinaire, sans déclarer l'emprunt. M. Gergonne appelle *inversion* le *dérangement* de Cramer, la *variation* de Laplace.

26. Le mémoire de Laplace est terminé par des considérations sur les moyens de décomposer les *résultantes* en facteurs plus simples; ces moyens sont les mêmes que ceux de Vandermonde (16). Une observation très-ingénieuse du même géomètre, sur les indices considérés comme des exposants, a donné naissance à la belle théorie des *fonctions alternées* de M. Cauchy et à sa démonstration des formules de Cramer.

(*Suite*). Tm.

SUR LA RÉSOLUTION

d'une certaine classe d'équations à plusieurs inconnues du premier degré.

(1re suite, voir page 67.)

—

II. Soit le système de m équations

$$\begin{aligned}
&x_1 + 0.x_2 + x_3 + \ldots\ldots\; x_m = b^{(0)},\\
&a_1 x_1 + x_2 + a_3 x_3 + \ldots\ldots\; a_m x_m = b^{(1)},\\
&a_1^2 x_1 + 2a_1 x_2 + a_3^2 x_3 + \ldots\; a_m^2 x_m = b^{(2)},\\
&\vdots\\
&a_1^n x_1 + n a_1^{n-1} x_2 + a_3^n x_3 + \ldots\; a_m^n x_m = b^{(n)},\\
&\vdots\\
&a_1^{m-1} x_1 + m-1.a_1^{m-2} x_2 \ldots\; a_m^{m-1} x_m = b^{(m-1)}.
\end{aligned}$$

$x_1, x_2 \ldots.\ x_m$ sont m inconnues; $a_1, a_3 \ldots.\ a_m$ sont $m-1$ quantités *négales*; les seconds membres sont des quantités données quelconques; les coefficients de x_2 sont les dérivées respectives des coefficients de x_1, par rapport à a_1. Cela posé, soient k, k', k'' .... $k^{(m-2)}$, $m-1$ constantes indéterminées, et faisons comme ci-dessus :

$$k + k'a + k''a^2 \dots k^{(m-2)}a^{m-2} + a^{m-1} = \varphi(a) ;$$

on aura :

$$x_1\varphi(a_1) + x_2\varphi'(a_1) + x_3\varphi(a_3) \dots + x_m\varphi(a_m) = kb^{(0)} + k'b^{(1)} + k''b^{(2)} \dots + b^{(m-1)}.$$

Faisons $f(a) = (a-a_1)^2(a-a_3)(a-a_4)\dots(a-a_m) = a^m + P^{m-1}a\dots$ déterminons k, k',... $k^{(m-2)}$, de telle sorte que fa et φa aient en commun les $m-1$ racines a_1, a_3, a_4 .... a_m; on a donc :

$$\varphi(a) = \frac{f(a)}{a - a_1} = a^{m-1} + (P + a_1)a^{m-2} + \dots ;$$

ainsi k, k'.... $k^{(m-2)}$ se trouvent déterminés, et l'on trouve :

$$x_2 = \frac{kb^{(0)} + \dots b^{(m-1)}}{\varphi'(a_1)} ;$$

or $(a-a_1)\varphi a = f(a)$; prenant les dérivées, $\varphi a + (a-a')\varphi' a = f'(a)$;

d'où l'on tire $\qquad \varphi'(a) = \dfrac{f'(a) - \varphi a}{a - a_1}$;

faisant $a = a_1$, il vient $\varphi'(a_1) = \dfrac{0}{0}$, et d'après la méthode connue,

$$\varphi'(a_1) = f''(a_1) \text{ ; donc } x_2 = \frac{kb^{(0)} \dots b^{(m-1)}}{f''(a_1)}$$

Connaissant x_2, on fait passer les termes où ils se trouvent dans le second membre, et on est ramené à un système d'équations déjà traitées.

III. Si les coefficients de x_2 étaient les dérivées premières, et les coefficients de x_3 les dérivées secondes des coefficients de x_1, on ferait $f(a) = (a - a_1)^3(a - a_4)(a - a_5) \dots a - a_m$; et raisonnant de la même manière, on trouvera la valeur de x_3; et transportant ces termes dans les seconds membres, on a ramené au système d'équations précédent.

IV. On voit donc comment il faut procéder lorsque les coefficients d'une inconnue sont les dérivées de l'inconnue précédente.

Observation. Ce genre d'équations se présente dans l'intégration de l'équation linéaire, à coefficients constants, lorsque l'équation auxiliaire a des racines égales.

V. Soit le système suivant de n équations du premier degré entre les inconnues $x_1, x_2 \dots x_n$:

$$\begin{aligned}
&\frac{x_1}{a_1-\alpha_1}+\frac{x_2}{a_1-\alpha_2}+\dots\frac{x_n}{a_1-\alpha_n}=1,\\
&\frac{x_1}{a_2-\alpha_1}+\frac{x_2}{a_2-\alpha_2}+\dots\frac{x_n}{a_2-\alpha_n}=1,\qquad\text{(A)}\\
&\vdots\\
&\frac{x_1}{a_n-\alpha_1}+\frac{x_2}{a_n-\alpha_2}+\dots\frac{x_n}{a_n-\alpha_1}.
\end{aligned}$$

$a_1 \dots a_n$ sont n quantités connues, mais *inégales*; de même les n quantités $\alpha_1 \dots \alpha_n$.

Faisons $F(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n)$,

$f(x)=(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)$;

$F(x)-f(x)$ est de degré $n-1$, et par conséquent $\dfrac{Fx-fx}{fx}$ peut se décomposer, par la méthode des dérivées, en fonctions rationnelles (*V.* t. IV, p. 296) ; on a donc l'identité :

$$\frac{F(x)-fx}{F(x)}=\frac{f(\alpha_1)}{F'(\alpha_1)}\cdot\frac{1}{x_1-\alpha_1}-\frac{f(\alpha_2)}{F'(\alpha_2)}\cdot\frac{1}{x_2-\alpha_2}+\dots$$

Faisant successivement $x=a_1$; $x=a_2 \dots x=a_n$, on obtient les n identités :

$$\begin{aligned}
1&=\frac{-f(\alpha_1)}{F'(\alpha_1)}\,\frac{1}{a_1-\alpha_1}-\frac{f(\alpha_2)}{F'(\alpha_2)}\,\frac{1}{a_2-\sigma_2}+\dots\\
1&=-\frac{f(\alpha_1)}{F'(\alpha_1)}\,\frac{1}{a_2-\alpha_2}-\frac{f(\alpha_2)}{F'(\alpha_2)}\,\frac{1}{a_2-\alpha_2}+\dots\\
&\vdots\\
1&=-\frac{f(\alpha_1)}{F'(\alpha_1)}\,\frac{1}{a_n-\alpha_1}+\dots
\end{aligned}$$

Donc les valeurs $x_1 = -\frac{f(\alpha_1)}{F'(\alpha_1)}$; $x_2 = -\frac{f(\alpha_2)}{F'(\alpha_2)}$, etc. satisfont au système des équations (A).

Si, parmi les quantités $\alpha_1, \alpha_2 \ldots . \alpha_n$, il y en a d'égales, on fait la décomposition en fractions rationnelles, comme pour le cas des facteurs multiples, et le reste comme ci-dessus.

Observation. Ce genre d'équations se présente dans la théorie des surfaces homofocales, expression hybride, qu'on pourrait remplacer par *biconfocales*. L'élégant procédé d'élimination est dû à M. le professeur Jacques Binet. (*Suite*).

NOTE

relative à l'intégration d'une équation différentielle.

PAR M. HUET,

Licencié ès sciences mathématiques, et professeur de mathématiques au collége de Toulon.

L'équation différentielle

$$\frac{d^2y}{dx^2} + f(x)\frac{dy}{dx} + \varphi(y)\frac{dy^2}{dx^2} = 0,$$

déjà intégrée par M. Liouville (*) par un procédé très-remarquable, peut encore s'intégrer immédiatement de la manière suivante.

Divisons par $\frac{dy}{dx}$, et multiplions par dx, elle devient :

$$\frac{\frac{d^2y}{dx}}{\frac{dy}{dx}} + f(x)\,dx + \varphi(y)\,dy = 0;$$

(*) Voyez les Leçons de calcul différentiel et intégral, par M. l'abbé Moigno, tome II, page 672.

équation dans laquelle les variables sont séparées.

Intégrant une première fois, il vient :

$$\log \frac{dy}{dx} + \int f(x)dx + \int \varphi(y)dy + c = 0.$$

Passant aux nombres

$$\frac{dy}{dx} = ce^{\int f(x)\,dx} . e^{\int \varphi(y)\,dy}$$

d'où l'on tire :

$$e^{-\int \varphi(y)dy} dy = ce^{\int f(x)dx} dx,$$

et par suite :

$$\int e^{-\int \varphi(y)dy} dy = c\int e^{\int f(x)dx} dx + c'$$

qui est l'intégrale cherchée.

THÉORÈMES ET PROBLÈMES

—

111. Soit M un point pris sur une courbe plane, et MO le rayon de courbure en ce point; considérons M comme l'extrémité du petit axe d'une ellipse, et ayant en ce point même rayon de courbure MO; quel est le lieu des foyers de cette ellipse? (Lancret.)

112. Soit M un point pris sur une courbe plane ; et N un point sur la tangente en M à la courbe; par N menons une sécante sous un angle *donné*; et soit P un des points d'intersection ; prenons sur la sécante un point Q sur le prolongement de NP, tel que l'on ait $NQ = \frac{\overline{MN}^2}{NP}$; quel est le lieu du point Q, N se mouvant sur la tangente, et déterminer la position du point Q lorsque N se confond avec M (Maclaurin.)

113. Étant donnée une progression arithmétique de n termes ; la moitié de n fois le dernier terme est toujours comprise entre la somme de tous les termes, et cette somme diminuée du dernier terme ; démontrer cette proposition par la géométrie (Maclaurin).

114. Dans un triangle dont la base est donnée de grandeur et de position, et dont la différence des deux autres côtés divisée par la médiane intermédiaire est égale à $\sqrt{2}$; le sommet mobile décrit une lemniscate de Bernoulli, et qui est aussi une cassinoïde.

115. Etant donnés dans le même plan, deux cercles et un point fixe ; mener deux tangentes parallèles, chacune à un cercle ; de telle sorte que le rapport des distances du point fixe aux deux parallèles soit donné ; par la géométrie élémentaire et par la géométrie analytique lorsque les cercles sont remplacés par deux coniques quelconques.

116. Un hexagone sphérique étant inscrit dans une courbe cono-sphérique, l'intersection des côtés opposés donne six points situés sur le même grand cercle.

117. Un hexagone sphérique étant circonscrit à une courbe cono-sphérique, les trois grands cercles qui passent par les sommets opposés ont le même diamètre en commun.

On appelle *cono-sphérique*, la ligne d'intersection d'une sphère et d'un cône du second degré, concentriques.

118. Si on élève à la même puissance positive les trois côtés d'un triangle rectangle, la somme des puissances des côtés est plus grande que la puissance de l'hyperbole lorsque l'exposant de la puissance est moindre que 2, et moins grande si cet exposant surpasse 2.

ANNONCES.

—

La vraie théorie des quantités négatives et des quantités prétendues imaginaires, dédiée aux amis de l'évidence; par C. V. Mourey.—Paris, Bachelier, libraire; et chez l'auteur, rue des Quatre-Vents, n° 8, 1828. In-8°, x, 144 p., 3 pl.

Cet ouvrage remarquable, sur lequel M. Lefébure de Fourcy a le premier attiré l'attention, est devenu extrêmement rare. Parmi les géomètres de Paris, M. de Fourcy est, à ma connaissance, le seul qui en possède un exemplaire, qu'il a eu l'obligeance de me communiquer. Nous en donnerons une analyse détaillée. Les personnes qui ont des renseignements à donner sur la vie de l'auteur sont priées de m'en faire part.

Gnomonique graphique et analytique, ou l'art de tracer les cadrans solaires; par Born, officier d'artillerie (Lafère, 1821). — Paris, Bachelier, 1846, in-8° de 132 p., 6 pl.

Cours complet de mathématiques à l'usage des aspirants à toutes les écoles du gouvernement, renfermant les connaissances exigées pour l'admission aux écoles polytechnique, normale, navale, militaire de St.-Cyr, forestière, des arts et manufacture et des beaux-arts; par M. Auguste Blue, professeur de mathématiques, ancien élève de l'école polytechnique, tome I, arithmétique et algèbre élémentaire. — Paris, Carilian-Gœury et Victor Dalmont. 1844, in-8° de 480 pages. (Il sera rendu compte de ces deux ouvrages).

GRAND CONCOURS (année 1845).

Mathématiques élémentaires.

Fig. 22. Soient dans un même plan deux cercles qui ne se coupent point ; O et O′ leurs centres, AB et A′B′ leurs diamètres, qui tombent tous deux sur la droite qui passe par les deux centres :

1° On demande de prouver qu'il existe sur cette droite deux points C et D, tels que le produit de leurs distances au centre de chaque cercle, est égal au carré du rayon de ce cercle ; c'est-à-dire tels qu'on a $OC \times OD = \overline{OA}^2$ et $O'C \times O'D = \overline{O'A'}^2$.

2° Soit comme dans la figure, le cas où l'un des cercles (O) tombe en dedans de l'autre (O′) ; on peut d'un point P pris sur le diamètre AB du cercle intérieur élever à ce diamètre, une perpendiculaire qui rencontre les deux cercles en m et m' :

Or, si l'on considère les distances de ces points à l'un ou à l'autre des deux points C et D, ci-dessus déterminés, et par exemple, au point C ;

On demande de prouver que le rapport de ces distances est constant, quelle que soit la position du point P, et que le carré de ce rapport est égal au rapport des distances du point C aux centres des deux cercles ; c'est-à-dire qu'on a

$$\frac{\overline{Cm}^2}{\overline{Cm'}^2} = \frac{CO}{CO'}.$$

PREMIER PRIX

PAR M. L.-J.-F. BONNEL,
né à Romenay (Saône et Loire), le 22 juin 1826.
(Collége Stanislas. — Classe de M. Abel Transon.)

Pour répondre à la première partie de cette question, je vais supposer un instant que les deux points C et D existent : de l'existence de ces deux points, je chercherai à déduire quelque relation entre les distances de ces deux points aux centres de chaque cercle ; et l'examen de cette relation devra me donner la condition d'existence des deux points C et D. Il ne restera plus qu'à examiner si cette condition correspond à quelqu'une des conditions de l'énoncé.

Supposons donc le problème résolu : soit x, la distance du point C au point O ; y la distance du point D au même point O : appelons d, la distance qui sépare les deux centres OO'.

D'après la nature même des deux points C et D, nous devons avoir

$$(1) \qquad xy = r^2,$$

en désignant par r le rayon du cercle intérieur (O) ; et

$$(2) \qquad (d+x)(d+y) = R^2,$$

en désignant par R le rayon du cercle (O').

Dans l'équation (2) remplaçant y par sa valeur tirée de la première, nous aurons :

$$(d+x)\left(d+\frac{r^2}{x}\right) = R^2.$$

Le développement du produit indiqué donne :

$$\frac{d^2x+dx^2+dr^2+r^2x}{x} = R^2$$

ou bien, multipliant les deux membres par x, et ordonnant par rapport à x, on obtient :

$$dx^2 + x(d^2 + r^2 - R^2) + dr^2 = 0. \quad (3)$$

La résolution de cette équation nous donne pour valeur de x

$$x = \frac{R^2 - d^2 - r^2 \pm \sqrt{(R^2 - d^2 - r^2)^2 - 4d^2r^2}}{2d} \quad (4)$$

Remarquons alors que pour que les deux valeurs de x soient réelles, il faut et il suffit que

$$(R^2 - d^2 - r^2)^2 - 4d^2r^2 \text{ soit } > 0.$$

Or, les deux valeurs de x ne sont autre chose que les distances des deux points C et D au centre O : car l'équation (3) divisée par d, devient :

$$x^2 + x\left(\frac{d^2 + r^2 - R^2}{d}\right) + r^2 = 0,$$

expression dans laquelle le terme tout connu r^2 est le produit des deux racines de l'équation. Nous poserons donc la condition

$$(R^2 - d^2 - r^2)^2 - 4d^2r^2 > 0.$$

Mais cette condition se transforme successivement en cette autre

$$(R^2 - d^2 - r^2 - 2dr)\ (R^2 - d^2 - r^2 + 2dr) > 0$$

ou $$[R^2 - (d + r)^2]\ [R^2 - (d - r)^2] > 0,$$

ou $(R - d - r)\ (R + d + r)\ (R - d + r)\ (R + d - r) > 0.$ (5)

Or, si l'on fait attention à cette formule, on voit que d la distance des centres n'étant jamais moindre que 0, les deux facteurs $(R + d + r)$ et $(R + d - r)$ ne seront jamais plus petits que 0 ; leur produit sera donc toujours positif ; et pour que le produit total le soit, il faudra que celui des deux autres facteurs restants soit lui-même positif ; il faudra donc que l'on ait :

$$(R-d-r)\ (R-d+r) > 0.$$

Pour satisfaire à cette condition, il faut, et il suffit que l'on ait à la fois

$$\left.\begin{array}{l} R-d-r>0 \\ R-d+r>0 \end{array}\right\} \quad (1)$$

et

$$\left.\begin{array}{l} R-d-r<0 \\ R-d+r<0 \end{array}\right\} \quad (2)$$

ou ce qui revient au même pour la condition (1)

$$d < R+r$$

et

$$d < R-r ;$$

et pour la condition (2) :

$$d > R+r$$

et

$$d > R-r.$$

C'est-à-dire que la distance des centres des deux cercles doit être à la fois plus petite ou plus grande que la somme et que la différence des rayons.

Mais, d'après l'énoncé même de la question, les cercles donnés ne se touchant point, sont tels que ces conditions sont exactement remplies ; donc, dans le cas où les deux cercles ne se coupent point, l'existence des deux points demandés est bien établie.

Si l'on suppose que d devienne égal à $R+r$ ou $R-r$; le produit indiqué dans la formule (5) devient égal à 0 ; le radical de la formule (4) s'évanouit. Les deux valeurs de x deviennent égales entre elles, et égales à r. Dans le premier cas, où $d=R+r$, c'est-à-dire où les cercles sont tangents extérieurement, chacune des valeurs de x est négative, et se trouve égale à $-r$. Dans le second cas, qui est celui où les cercles sont tangents intérieurement, les valeurs de x

sont l'une et l'autre positives, et égales à r. Les points C et D se confondent alors, et se trouvent placés tous les deux au point de contact même des cercles. Leur produit du reste est toujours r^2.

Remarque générale. Toutes les discussions, et tous les résultats qui viennent d'être établis dans la supposition

$$x = \mathrm{OC}, \quad \text{et} \quad y = \mathrm{OD},$$

se retrouveraient parfaitement dans les hypothèses

$$\mathrm{O'C} = x \quad \text{et} \quad y = \mathrm{O'D}.$$

La seconde partie de la question consiste à prouver que le rapport de $\mathrm{C}m$ à $\mathrm{C}m'$ est un rapport constant, et que le carré de ce rapport est égal à $\frac{\mathrm{CO}}{\mathrm{CO'}}$. Or, remarquons qu'en prolongeant $\mathrm{C}m$ en $\mathrm{C}m''$ et $\mathrm{C}m'$ en $\mathrm{C}m'''$, nous obtenons deux triangles $\mathrm{C}mm'$ et $\mathrm{C}m''\mathrm{C}m'''$ qui sont semblables, et qui nous donnent $\frac{\mathrm{C}m}{\mathrm{C}m'} = \frac{\mathrm{C}m''}{\mathrm{C}m'''}$. On a aussi d'autre part, à cause des perpendiculaires CE et CF qui se trouvent partagées respectivement dans les cercles (O) et (O') en deux parties égales par les droites mm'', $m'm'''$,

$$\mathrm{C}m : \mathrm{CE} :: \mathrm{CE} : \mathrm{C}m''$$

et

$$\mathrm{C}m' : \mathrm{CF} :: \mathrm{CF} : \mathrm{C}m'''$$

Divisant ces deux proportions terme à terme, on obtient :

$$\frac{\mathrm{C}m}{\mathrm{C}m'} : \frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{CF}} :: \frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{CF}} : \frac{\mathrm{C}m''}{\mathrm{C}m'''},$$

d'où :

$$\left(\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{CF}}\right)^2 = \frac{\mathrm{C}m}{\mathrm{C}m'} \times \frac{\mathrm{C}m''}{\mathrm{C}m'''}. \text{ Mais } \frac{\mathrm{C}m}{\mathrm{C}m'} = \frac{\mathrm{C}m''}{\mathrm{C}m'''};$$

donc on a :

$$\left(\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{CF}}\right)^2 = \left(\frac{\mathrm{C}m}{\mathrm{C}m'}\right)^2 \text{ ou } \frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{CF}} = \frac{\mathrm{C}m}{\mathrm{C}m'};$$

donc le rapport de Cm à Cm' est constant.

De plus, le carré de ce rapport est égal à $\frac{\mathrm{CO}}{\mathrm{CC}'}$. En effet, nous venons de voir que $\left(\frac{Cm}{Cm'}\right)^2 = \left(\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{CF}}\right)^2$.

Or, $\overline{\mathrm{CE}}^2 = \mathrm{OC.CD}$, car, en vertu de la propriété

$$\mathrm{OC} \times \mathrm{OD} = \overline{\mathrm{OE}}^2,$$

le point F se trouve sur un cercle décrit sur OD comme diamètre. En vertu d'une propriété analogue des points C et D, on aura :

$$\overline{\mathrm{CE}}^2 = \mathrm{O'C.CD};$$

donc :

$$\left(\frac{\overline{Cm}}{\overline{Cm'}}\right)^2 = \frac{\mathrm{OC.CD}}{\mathrm{O'C.CD}} = \frac{\mathrm{OC}}{\mathrm{O'C}};$$

donc enfin, le carré du rapport de $\overline{Cm}$ à $\overline{Cm'}$ est bien égal à $\frac{\mathrm{OC}}{\mathrm{O'C}}$. C. Q. F. D.

Il est à remarquer que cette seconde partie de la question suppose un théorème que je n'ai point démontré, lequel consisterait à prouver que les deux triangles Cmm' et $Cm'''m''$ sont semblables. Mais on peut donner du même fait une démonstration un peu différente, que j'ai vue depuis le concours, et que je vais exposer.

Posons pour un instant $\mathrm{PO}' = z$, et exprimons le rapport $\frac{\overline{Cm'}^2}{\overline{Cm}^2}$ en fonction de cette inconnue auxiliaire. Nous aurons successivement les expressions suivantes :

$$\frac{\overline{Cm'}^2}{\overline{Cm}^2} = \frac{\overline{Pm'}^2 + \overline{\mathrm{PC}}^2}{\overline{Pm}^2 + \overline{\mathrm{PC}}^2} = \frac{\mathrm{R}^2 - z^2 + (z+d+x)^2}{r^2 - (z+d)^2 + (z+d+x)^2};$$

ou, en développant et simplifiant les opérations indiquées :

$$\frac{\overline{Cm'}^2}{\overline{Cm}^2}=\frac{R^2+x^2+d^2+2zd+2zx+2dx}{r^2+x^2+2zx+2dx}.$$

Or, si dans cette expression on remplace x^2 par sa valeur tirée de l'équation : $x^2+x\left(\frac{d^2+r^2-R^2}{d}\right)+r^2=0$, on obtiendra en réduisant :

$$\frac{\overline{Cm'}^2}{\overline{Cm}^2}=\frac{x\frac{(R^2+d^2-r^2+2dz)}{d}+R^2+d^2-r^2+2dz}{x\frac{(R^2+d^2-r^2+2dz)}{d}};$$

ou

$$\frac{\overline{Cm'}^2}{\overline{Cm}^2}=1+\frac{d}{x}=\frac{x+d}{x};$$

Mais $x+d=CO'$ et $x=OC$; donc, on aura bien :

$$\frac{\overline{Cm'}^2}{\overline{Cm}^2}=\frac{O'C}{OC}.\quad \text{C. Q. F. D.}$$

MÉMOIRE

sur la théorie des résidus dans les progressions géométriques.

PAR M. E. PROUHET,
Professeur au collége royal d'Auch.

—

1. Pour bien faire comprendre l'objet de ce mémoire, nous allons rappeler quelques théorèmes, et définir quelques locutions dont nous ferons un continuel usage.

Soit :

$$a,\ a^2,\ a^3,\ a^4,\ldots a^n,\ a^{n+1},\ldots$$

une progression indéfinie comprenant les puissances entières et positives de l'entier a; si on divise tous ses termes par le nombre P premier avec a, on obtiendra une certaine suite de résidus, dont l'unité fera nécessairement partie. Si a^n est le premier terme de la progression qui donne le résidu 1, tous les résidus précédents seront différents entre eux; au delà, ils se reproduiront dans le même ordre. On sait d'ailleurs que n sera un diviseur de *l'indicateur* de P, c'est-à-dire du nombre qui indique combien il y a d'entiers inférieurs et premiers à P.

2. Nous appellerons *période de* a *par rapport à* P, l'ensemble des résidus fournis par les termes a, a^2, a^3,....a^n; *système de périodes*, l'ensemble des périodes de tous les nombres inférieurs et premiers à P; le nombre P sera dit la *base* du système.

Voici par exemple, toutes les périodes du système dont la base est 13.

1,											
2,	4,	8,	3,	6,	12,	11,	9,	5,	10,	7,	1.
3,	9,	1.									
4,	3,	12,	9,	10,	1.						
5,	12,	8,	1.								
6,	10,	8,	9,	2,	12,	7,	3,	5,	4,	11,	1.
7,	10,	5,	9,	11,	12,	6,	3,	8,	4,	2,	1.
8,	12,	5,	1.								
9,	3,	1.									
10,	9,	12,	3,	4,	1.						
11,	4,	5,	3,	7,	12,	2,	9,	8,	10,	6,	1.
12,	1.										

3. La formation d'un pareil tableau n'offre pas de difficulté. On obtient chaque résidu en multipliant le précédent par le nombre qui engendre la période, et supprimant tous les multiples de la base contenus au produit. On peut cepen-

dant n'employer que l'addition, en procédant de la manière suivante :

Soit proposé par exemple, de trouver la période de 3 dans le système dont la base est 25. A cet effet j'écris ces deux lignes :

Coefficients

1,2,3, 4, 5, 6, 7, 8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,21,22,23,24.

Résidus

3,6,9,12,15,18,21,24,2, 5, 8,11,14,17,20,23, 1, 4, 7,10,13,16,19,22.

La première renferme tous les nombres inférieurs à 25 ; la seconde se forme en ajoutant successivement 3 à lui-même, et retranchant 25 de la somme s'il y a lieu. Cela fait, le second terme de la période sera le résidu 9 correspondant au coefficient 3 ; le deuxième terme sera le résidu 2 correspondant au coefficient 9 ; le troisième terme sera le résidu 6 correspondant au coefficient 2, et ainsi de suite. De cette manière on obtient pour la période de 3 par rapport à 25, les nombres :

3,9,2,6,18,4,12,11,8,24,22,16,23,19,7,21,13,14,17,1.

Au reste, on n'aura besoin de former directement que la moitié des périodes du système ; car si la somme de deux nombres est égale à la base, il est facile de voir que les termes de même rang de leurs périodes sont égaux si ce rang est pair ; et donnent une somme égale à la base, si ce rang est impair.

Nous verrons plus loin d'autres moyens de simplifier la formation d'un système de périodes.

4. Nous appellerons *racine primitive de* P *par rapport à* n, tout nombre qui, dans le système P engendrera une période de n termes.

Nous appellerons plus simplement *racine primitive du système* ou *de la base* P, la racine primitive de P par rapport à (P), c'est-à-dire tout nombre dont la période comprendra tous les entiers inférieurs et premiers à la base.

Ces définitions comprennent comme cas particulier la définition d'Euler, et concordent avec celle de M. Poinsot, sauf le point de vue spécial auquel nous nous plaçons.

Enfin, une période sera dite *complète*, quand elle renfermera tous les nombres inférieurs et premiers à la base.

5. Cela posé, l'objet de ce mémoire est l'étude détaillée et complète autant que possible des différents systèmes de périodes. Les théorèmes que nous démontrerons ne sont pas nouveaux; à quelques développements près, ils se trouvent dans l'ouvrage de Legendre, mais séparés et déduits de théories différentes. Nous avons cru utile de les réunir et de les déduire les uns des autres d'une manière uniforme. Ce travail aura en outre l'avantage de faciliter aux jeunes lecteurs de ce journal, l'accès de la théorie des nombres, partie difficile et encore peu cultivée des mathématiques, et sur laquelle paraît aujourd'hui reposer l'avenir de la science.

N. B. — Dans tout ce qui va suivre P désignera constamment la base d'un système de périodes, et p un nombre premier.

§ I. *Propriétés générales des systèmes de périodes* (*).

6. *Théorème. Dans toute période* (l'unité non comprise), *les termes à égale distance des extrêmes sont associés par rapport à la base.*

Soit n le nombre des termes de la période de a, en sorte que l'on ait

$$a^n = \dot{\mathrm{P}} + 1,$$

deux termes également éloignés de a et de a^{n-1}, seront (m étant $< n$)

$$a^m \qquad a^{n-m}.$$

(*) Cette théorie des résidus a été créée par Euler (Voir N. comm. Pétrop., t. V.

Le produit de ces deux puissances étant a^n et par conséquent $\dot{P}+1$, le produit de leurs résidus sera aussi $\dot{P}+1$. Donc ces résidus sont associés. C. Q. F. D.

Corollaire 1[er]. *Dans toute période d'un nombre impair de termes* (l'unité comprise), *le produit de tous les résidus est* $\dot{P}+1$.

Car si on laisse de côté le résidu 1, il reste un nombre pair de termes associés deux à deux. Le produit des résidus pouvant se décomposer en $\frac{n-1}{2}$ facteurs de la forme $\dot{P}+1$, sera aussi $\dot{P}+1$.

Corollaire 2. *Le produit des résidus d'une période d'un nombre pair de termes est* $\dot{P}-1$, *quand la base est une puissance ou le double d'une puissance d'un nombre premier impair.*

Car, si on néglige l'unité, il reste un nombre impair de termes associés deux à deux, à l'exception de celui du milieu qui doit être un associé double. Or, d'après l'hypothèse, P ne peut avoir que deux associés doubles 1 et P—1. Le terme du milieu ne peut être 1 ; autrement la période commencerait plus tôt qu'on ne l'a supposé. Donc ce terme sera P—1. Donc le produit des résidus sera $(\dot{P}+1)(\dot{P}-1)=\dot{P}-1$, C. Q. F. D.

Corollaire 3. *Quand la base est une puissance ou le double d'une puissance d'un nombre premier impair, dans toute période d'un nombre pair de termes, les résidus qui occupent le même rang dans chaque demi-période, donnent une somme égale à la base.*

En effet on a, comme nous venons de le voir,

$$a^{\frac{n}{2}}=\dot{P}-1$$

D'où l'on réduit aisément

$$a^{\frac{n+1}{2}} + a = \dot{P}$$
$$a^{\frac{n+2}{2}} + a^2 = \dot{P}$$
$$a^{\frac{n+3}{2}} + a^3 = \dot{P}$$
$$\dots\dots\dots$$

C. Q. F. D.

Corollaire 4°. Un associé double ne peut pas faire partie d'une période d'un nombre impair de termes.

7. *Théorème. Deux associés par rapport à la base ont des périodes inverses l'une de l'autre.*

Si on désigne par a' l'associé de a par rapport à P, on doit avoir d'après le théorème précédent

$$a^{n-1} = \dot{P} + a'$$

en élevant les deux membres de cette égalité aux puissances 1, 2, 3... n, et supprimant dans l'exposant de a tous les multiples de n, on aura

$$a^{n-1} = \dot{P} + a'$$
$$a^{n-2} = \dot{P} + a'^2$$
$$\dots\dots\dots$$
$$a^0 = \dot{P} + a'^n.$$

Donc les résidus formés par

$$a^{n-1}, a^{n-2}, a^{n-3}\dots\dots$$

Sont respectivement ceux fournis par

$$a', a'^2, a'^3, \dots \quad \text{C. Q. F. D.}$$

Ce théorème simplifie la construction d'un système de périodes, puisque la période d'un nombre se déduit sans calcul de celle de son associé.

Théorème. Lorsque la somme de deux nombres est un multiple de la base, leurs périodes renferment le même nom-

bre de termes ou bien la période de l'une renferme deux fois plus de termes que la période de l'autre.

Soient a et a' les deux nombres proposés ; n et n' les nombres de termes de leurs périodes, n n'étant pas plus grand que n'. On aura d'après l'hypothèse :

$$a' = \dot{P} - a$$

d'où

$$a'^n = \dot{P} + (-1)\, a^n$$

et comme

$$a^n = \dot{P} + 1$$

$$a'^n = \dot{P} + (-1)^n$$

Par conséquent si n est pair, on aura $n' = n$; et si n est impair, $n' = 2n$. C. Q. F. D.

On voit par là que n et n' ne peuvent pas être tous les deux impairs et que c'est seulement dans le cas de n pair que les deux périodes peuvent avoir le même nombre de termes.

9. *Théorème. Lorsque le produit de deux nombres augmenté de l'unité est un multiple de la base, leurs périodes se composent d'un même nombre de termes ou bien la période de l'un renferme deux fois plus de termes que la période de l'autre.*

Soient a et a' les deux nombres proposés et a'' l'associé de a par rapport à P. On aura

$$aa' + 1 = \dot{P}$$

$$aa'' - 1 = \dot{P}$$

d'où on tire

$$a(a' + a'') = \dot{P}$$

et comme a est premier avec P il en résulte

$$a' + a'' = \dot{P}$$

Le théorème précédent est donc applicable à a' et a''. Mais a et a'' ont même nombre de termes à leurs périodes (7). Donc, etc.

10. *Problème. Une période étant donnée, trouver la période engendrée par chacun de ses résidus.*

Soit b le résidu de rang m dans la période de a, en sorte que

$$a^m = \dot{P} + b$$

Soit x l'exposant de la puissance à laquelle on doit élever b pour obtenir le résidu 1. On aura

$$a^{mx} = \dot{P} + 1$$

Il faut donc que $mx = \dot{n}$ et par conséquent la plus petite valeur de x propre à satisfaire à la relation

$$b^x = \dot{P} + 1$$

s'obtiendra en cherchant la plus petite valeur de x propre à satisfaire à la relation

$$m^x = \dot{n}$$

Pour trouver ce nombre désignons par d le p. g. c. d. entre m et n et posons

$$m = dm',\ n = dn';$$

mn' sera divisible par n et ce sera évidemment le plus petit multiple de m jouissant de cette propriété. Donc le nombre des termes de la période de b sera n'. On pourra donc énoncer la règle suivante :

Un résidu de rang m *dans une période de* n *termes engendre une période dont le nombre des termes s'obtient en divisant* n *par le p. g. c. d. de* m *et* n.

Reste maintenant à obtenir les termes mêmes de la période de b : il suffira pour cela de prendre les résidus de la période de a de m en m comme si ces nombres étaient écrits circulairement, car on a $b^2 = \dot{0} + a^{2m}$; $b^3 = \dot{P} + a^{3m}$, etc.

Corollaire. Si m est premier avec n, $d=1$; $n'=n$. Donc :

Dans toute période de n *termes un résidu dont le rang est indiqué par un nombre premier avec* n, *engendre une période de* n *termes :* ou suivant une autre manière de s'exprimer, *est racine primitive de* P *par rapport à* n.

Remarque 1re. Si dans un système il existe une période n, il en existera au moins $i\ (n)$.

Remarque 2^e. Une période complète suffit pour obtenir sans calcul toutes les autres périodes du système.

11. *Théorème. Si* m *est premier avec* i (P), *les résidus obtenus en divisant par* P *tous les nombres inférieurs et premiers à* P *élevés à la même puissance* m ? *sont différents.*

Supposons que a^m et b^m donnent le même résidu, on aura

$$a^m - b^m = \dot{P}$$

soit b' l'associé de b par rapport à P.

Multiplions les deux membres de l'équation par b'^m, nous aurons :

$$(ab')^m - 1 = \dot{P}$$

Puisque m est premier avec i(P), cette égalité ne peut subsister à moins que

$$ab' - 1 = \dot{P}$$

mais on a

$$bb' - 1 = \dot{P}$$

il en résulterait

$$(a - b)b' = \dot{P}$$

égalité impossible puisque b' est premier avec P et $a-b$ moindre que P.

§ II. *Des systèmes de périodes dont la base est un nombre premier.*

12. *Théorème. Lorsque la base est un nombre premier* p, *la somme des* m^{es} *puissances des résidus d'une période de* n *termes est divisible par la base quand* m *n'est pas un multiple de* n.

Soit a un nombre qui dans le système p engendre une période de n termes. Les résidus de la période élevés à la m^e puissance donnent les mêmes restes que les termes de la progression

$$a^m,\ a^{2m},\ a^{3m},\ \ldots\ldots\ a^{nm}$$

dont la somme

$$a^m \frac{a^{mn}-1}{a^m-1}$$

est divisible par p, puisque $a^{mn}-1=\dot{p}$ et que a^m-1 ne peut être $\dot{p}$ quand m n'est pas $\dot{n}$. Donc la somme S_m des m^{es} puissances des résidus est aussi divisible par p. C. Q. F. D.

Quand $m=n$, la somme n'est plus divisible par p; mais comme alors chaque terme est $\dot{p}+1$, on a

$$S_n=\dot{p}+n.$$

13. *Corollaire. Les sommes de produits* 2 *à* 2, 3 *à* 3, ... $(n-1)$ *à* $(n-1)$ *des résidus d'une période de* n *termes sont divisibles par* p.

En effet, si P_1, P_2, ... P_{n-1}, désignent ces sommes de produits, on aura, k étant $\leqq n-1$

$$S_k-P_1S_{k-1}+P_2S_{k-2}-\ldots\ldots\pm P_{k-1}S_1\mp kP_k=o$$

De cette égalité et du théorème précédent, on déduit $kP_k=\dot{p}$. Mais k est inférieur à n et par conséquent premier à p : donc

$$P_k=\dot{p}.$$

Cette relation cesse d'avoir lieu si on fait $k=n$, mais il résulte du n° 6 (corol. 1er et 2e) qu'on a dans ce cas

$$P_n=\dot{p}+(-1)^n.$$

14 *Théorème. Si* a *produit une période de* n *termes et si le nombre des termes de la période de* b *est* n *ou un diviseur de* n, b *sera un des termes de la période de* a.

Retranchons de b tous les termes de la période de a et multiplions toutes ces différences entre elles : leur produit B est un polynome en b dont le premier terme b^n est $\dot{p}+1$ et dont le dernier $(-1)^nP_n=(-1)^n\left\{\dot{p}-(-1)^n\right\}$ est $\dot{p}-1$.

Les termes intermédiaires ayant pour coefficients $-P_1$, $+P_2$, ... $\pm P_{n-1}$ sont $\dot{p}$ d'après le corollaire précédent. Donc

$$B = \dot{p} + b^n + (-1) P_n = \dot{p}.$$

Ainsi, p divise B et par conséquent un des facteurs de B; mais tous ces facteurs sont $< p$. Donc, l'égalité précédente ne peut subsister à moins que l'un de ces facteurs ne soit nul, ou que b ne soit égal à l'un des termes de la période de a. C. Q. F. D.

Corollaire 1er. *Quand la base est un nombre premier, toutes les périodes d'un même nombre de termes renferment les mêmes nombres dans un ordre différent.*

Car si a et b engendrent tous deux une période de n termes, b sera un résidu de la période de a et n'aura à sa période que des termes faisant partie de la période de a. (10)

Corol. 2e. *Quand la base est un nombre premier, il ne peut pas y avoir plus de* i (n) *périodes de* n *termes.*

Car tout générateur d'une période de n termes ne pourra être qu'un résidu occupant dans la période de a un rang marqué par un nombre premier avec n... (10, corol.). Il n'y aura donc pas plus de périodes de n termes qu'il n'y a d'entiers inférieurs et premiers à n.

15. Théorème. *Quand la base est un nombre premier* p, *si* n *est un diviseur de* p — 1, *le nombre des périodes de* n *termes est* i (n).

On sait que le nombre des termes d'une période ne peut être qu'un diviseur de $p-1$ et que si n, n', n'', ... désignent les diviseurs de ce nombre on a

$$i(n) + i(n') + i(n'') + \ldots\ldots = p - 1.$$

Comme le nombre total des périodes doit être égal à $p-1$, s'il n'y avait pas i (n) périodes de n termes il faudrait qu'il y eût plus de i (n') périodes de n' termes, ou plus de i (n'') périodes de n'' termes, etc., ce qui est contraire au théorème précédent.

Corollaire 1er. *Dans tout système dont la base est un nombre premier* p, *le nombre des racines primitives est* i (p — 1).

Corollaire 2e. Si a est une racine primitive, les termes de sa période seront dans un ordre différent de l'ordre naturel, les nombres 1, 2, 3,... $p-1$. De là et du n° 12 on déduit ce théorème :

La somme des m*es* *puissances des termes de la progression* 1, 2, 3.... (p — 1), *est* $\dot{p}$, *quand* p *est premier et que* m *n'est pas* $\dfrac{\cdot}{p-1}$ (*).

Corollaire 3e.

$$1, 2, 3 \ldots (p-2)(p-1)+1=\dot{p} \text{ (n° 6, corol.)}.$$

C'est dans cette égalité que consiste *le théorème de Wilson.*

16. Nous avons vu qu'on pouvait déduire d'une période complète, toutes les autres périodes d'un système. Le tableau suivant renfermant les demi-périodes complètes des systèmes dont la base est un nombre premier inférieur à 29, pourra donc, entre ces limites, tenir lieu de tableau analogue à celui du n° 2.

base.	*demi-période complète.*										
5	2,	4,									
7	3,	2,	6,								
11	2,	4,	8,	5,	10,						
13	2,	4,	8,	3,	6,	12,					
17	3,	9,	10,	13,	5,	15,	11,	16,			
19	2,	4,	8,	16,	13,	7,	14,	9,	18,		
23	5,	2,	10,	4,	20,	8,	17,	16,	9,	22.	

(*) Voir t. I, p. 176. Ce théorème est encore une conséquence fort simple de celui établi au n° 11. En effet, d'après ce dernier les puissances $1, 2^m, 3^m, \ldots (p-1)^m$ divisées par p donnent pour restes dans un ordre différent de l'ordre naturel tous les nombres inférieurs à p. On a donc

$$S_m = \dot{p} + S_1,$$

et comme $S_1 = \dfrac{p(p-1)}{2} = \dot{p}$, on en conclut $S_m = \dot{p}$

La seconde partie de chacune de ces périodes s'obtiendra en retranchant de la base les termes de la première. (6, cor. 3.)

Note. Nous ajouterons ici, comme sujet d'exercice, les énoncés de quelques théorèmes d'Euler, et dont la démonstration ne présente pas de difficulté sérieuse.

Théorème. Si dans la période des résidus on trouve γ et γs premiers avec p, on y trouve aussi s.

Théorème. Si α est un résidu et a un non-résidu, $a\alpha$ est aussi un non-résidu. Tm.

SOLUTION DU PROBLÊME 107 (p. 112).

PAR M. PERRINOT,
professeur agrégé au collége royal de La Rochelle.

—

Problème. Étant données deux sphères fixes, trouver la distance des deux centres en ne se servant que de la règle et du compas.

Solution (fig. 20). Je cherche d'abord le rayon de l'une des sphères O, puis je décris à sa surface une circonférence de grand cercle, sur laquelle je marque deux points A, A′, aux extrémités d'un même diamètre. Fixant un des points du compas en A, je trace sur l'autre sphère, avec un intervalle quelconque, une circonférence de petit cercle dont il est facile de trouver le pôle P; les deux points A, P, sont avec le centre O′ de la sphère, sur une même droite AO′ dont je connais la longueur égale à AP+PO′. On déterminera pareillement la distance A′O′. Connaissant ainsi les trois longueurs AA′, AO′, A′O′, je construis le triangle AO′A′, puis j'obtiens la distance demandée, en prenant la ligne qui va du sommet O′ au milieu du côté opposé.

Le point B d'intersection de la sphère O et de la ligne des centres, est le point de contact de deux circonférences décrites de A, A′ comme pôles avec des intervalles AB, A′B que l'on déterminera en prenant, sur la médiane OO′, une longueur OB égale au rayon. Le point d'intersection B′, sur l'autre sphère, se déterminera de même au moyen des pôles P, P′, et des distances PB′, P′B′.

La connaissance des points B, B′, peut servir à résoudre la question suivante : Tracer sur deux sphères fixes les courbes de contact de ces sphères et du cône tangent à la fois à l'une et à l'autre, car B et B′ sont les pôles des cercles de contact.

VALEUR DE LA FRACTION $\dfrac{3.5.9.17\ldots}{2.4.8.16\ldots}$

le numérateur et le dénominateur étant des produits indéfinis.

PAR M. A. VACHETTE,
licencié ès sciences mathématiques et physiques.

Cette fraction peut s'écrire :

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2^3}\right)\left(1+\frac{1}{2^4}\right)\ldots\ldots$$

Et si on la compare au produit des m facteurs $x+a$, $x+b$, $x+c$,... dont la valeur est :

$$x^m+S_1x^{m-1}+S_2x^{m-2}+\ldots\ldots+S x_n^{m-n}+\ldots\ldots$$

On pourra l'écrire :

$$1+S_1+S_2+\ldots\ldots+S_n+\ldots\ldots$$

S_n étant la somme de tous les produits n à n des facteurs $\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3} \ldots\ldots$

Occupons-nous donc de trouver S_n.

Le premier de ces produits est :

$$p = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{2^3} \ldots\ldots \frac{1}{2^{n-2}} \cdot \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \frac{1}{2^n};$$

si on remplace alternativement $\frac{1}{2^n}$ par $\frac{1}{2^{n+1}}$, $\frac{1}{2^{n+2}}$, ... puis $\frac{1}{2^{n-1}}$ par les mêmes facteurs, puis $\frac{1}{2^{n-2}}$,..... puis $\frac{1}{2}$; on aura tous les produits où entrent $n-1$ des n premiers facteurs, avec le premier produit où ils entrent tous. Désignons par s la somme de ces produits.

Si on prend le produit des n facteurs qui suivent le premier produit, il est égal à $p \times \frac{1}{2^n}$; si on y remplace $\frac{1}{2^{n+1}}$ alternativement par $\frac{1}{2^{n+2}}, \frac{1}{2^{n+3}}, \ldots$ puis $\frac{1}{2^n}$ par les mêmes facteurs, puis $\frac{1}{2^{n-1}}, \ldots$ puis $\frac{1}{2^2}$, on aura les mêmes produits que dans la somme s, multipliés chacun par $\frac{1}{2^n}$; ce sont tous les produits où entrent $n-1$ des n facteurs qui suivent le premier. La somme de ces produits est $s \cdot \frac{1}{2^n}$.

En continuant de même on obtiendra une 3^e^ somme égale à $s \cdot \frac{1}{2^{2n}}$, une 4^e^ égale à $s \cdot \frac{1}{2^{3n}} \ldots$ et ainsi de suite à l'infini.

Donc la somme totale

$$S_n = s\left(1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{2n}} + \ldots\right) = s\,\frac{1}{1 - \frac{1}{2^n}} = s\,\frac{2^n}{2^n - 1}$$

Il ne s'agit plus que de trouver s. Cette somme s est composée des n sommes partielles

$$s_n = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^2}\cdot\frac{1}{2^3}\cdots\cdot\frac{1}{2^{n-1}}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n+1}+}\cdots\right)=\frac{1}{2^{1+2+\cdot+(n-1)}}\cdot\frac{1}{2^{n-1}}$$

$$s_{n-1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^2}\cdot\frac{1}{2^3}\cdots\frac{1}{2^{n-2}}\left(\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+2}}+\cdots\cdots\right)\frac{1}{2^n}$$

$$s_{n-2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^2}\cdots\cdots\frac{1}{2^{n-3}}\left(\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+2}}+\cdots\cdots\right)\frac{1}{2^{n-1}}\cdot\frac{1}{2^n}$$

. . . .

$$s_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+2}}+\cdots\cdots\right)\frac{1}{2^3}\cdot\frac{1}{2^4}\cdots\cdots\frac{1}{2^n}$$

$$s_1 = \left(\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+2}}+\cdots\cdots\right)\frac{1}{2^2}\cdot\frac{1}{2^3}\cdots\cdots\frac{1}{2^n}$$

A partir de s_{n-1}, toutes les sommes ont un facteur commun entre parenthèses ; et pour passer de la somme s_{n-k} à la somme s_{n-k-1} il faudra supprimer avant la parenthèse le facteur $\frac{1}{2^{n-k-1}}$, introduire après la parenthèse le facteur $\frac{1}{2^{n-k+1}}$; ce qui donne définitivement $s_{n-k-1} = \frac{1}{2^2}\cdot s_{n-k}$. Donc on aura :

$$s_{n-1}+s_{n-2}+\cdots\cdots+s_1 = s_{n-1}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^{2(n-2)}}\right)$$

Or $$s_{n-1} = \frac{1}{2^{1+2+3+\cdots\cdots+(n-2)}}\cdot\frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{2n+\frac{(n-1)(n-2)}{2}}} = \frac{1}{2^{\frac{n+n+2}{2}}}$$

$$s_{n-1}+s_{n-2}+\cdots+s_1 = \frac{2^{2(n-1)}-1}{2^{\frac{n^2+5n-4}{2}}}$$

$$s = \frac{1}{2^{\frac{n^2+n-2}{2}}}+\frac{2^{2(n-1)}-1}{2^{\frac{n^2+5n-4}{2}}} = \frac{2^{2n-1}+2^2(n-1)-1}{2^{\frac{n^2+5n-4}{2}}} = \frac{3.2^{3(n-1)}-1}{2^{\frac{n^2+5n-4}{2}}}$$

$$S_n = \frac{3.2^{2(n-1)}}{(2^n-1)\,2^{\frac{n^2+3n-4}{2}}}$$

et pour $n = 1$ on trouve $S_1 = 1$ ce que devait être.

La somme cherchée est donc :

$$2+\frac{3.2^2-1}{3.2^3}+\frac{3.2^4-1}{7.2^7}+\frac{3.2^6-1}{15.2^{12}}+\frac{3\ 2^8-1}{31.2^{18}}+\ldots\ldots$$

$$=2+3\left(\frac{1}{3.2}+\frac{1}{7.2^3}+\frac{1}{15.2^6}+\frac{1}{31.2^{10}}+\frac{1}{63.2^{15}}+\ldots\ldots\right)$$

$$-\left(\frac{1}{3.2^3}+\frac{1}{7.2^7}+\frac{1}{15.2^{12}}+\frac{1}{31.2^{18}}+\ldots\ldots\ldots\ldots\right)$$

et elle est convergente; car chacune des parenthèses a ses termes respectivement moindres que ceux d'une progression par quotient décroissante à l'infini.

Il est clair qu'au lieu de $\frac{1}{2}$, on pourrait avoir la fraction $\frac{1}{q}$, q étant plus grand que 1 ; on aurait des formules tout à fait semblables aux précédentes.

$$S_n=\frac{(q+1)\,q^{2(n-1)}-1}{(q^n-1)\,q^{\frac{n^2+3n-4}{2}}}.$$

Note. Ce problème se rattache à la théorie qu'Euler a créée pour la partition des nombres (*Introd. in analys.* t. II, p. 258) ; voici sa marche.

Soit :

$$Z=(1+xz)(1+x^2z)(1+x^3z)\ldots\ldots(1+x^4z)\ldots\ldots$$
$$=1+P_1z+P_2z^2+P_3z^3+\ldots\ldots P_nz^n+\ldots\ldots$$

P_1, P_2....P_n... sont des fonctions de x seulement qu'il s'agit de déterminer ; changeons z en xz, il vient :

$$Z_1=\frac{Z}{1+xz}=1+P_1xz+P_2x^2z^2+\ldots P_nx^4z^n$$

ou

$$1+P_1z+P_2z^2+\ldots\ldots=(1+xz)(1+P_1xz+P_2x^2z^2+\ldots\ldots)$$

La théorie des coefficients donne :

$$P_1=\frac{x}{1-x}\,;\ P_2=\frac{x^3}{(1-x)(1-x^2)}\ldots P_n=\frac{x^{\frac{n(n-1)}{1.2}}}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots(1-x^4)}\,;$$

faisons $x=\frac{1}{q}$; $q>1$; il vient :

$$\left(1+\frac{z}{q}\right)\left(1+\frac{z}{q^2}\right)\left(1+\frac{z}{q^3}\right)\ldots=1+$$

$$\frac{z}{q-1}+\frac{z^2}{(q-1)(q^2-1)}+\ldots\frac{z^4}{(q-1)\ldots(q^n-1)}+\ldots$$

série convergente ; en effet $P_{n+1}=P_n\frac{z}{q^{n+1}-1}$; or, lorsque

$$\frac{z}{q^{n+1}-1}<\frac{1}{2}\text{; ou } q^{n+1}>2z+1,$$

un terme devient plus petit que la moitié du précédent.

Faisons $z=1$; $q=2$, on obtient :

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^3}\right)\ldots=1+$$

$$+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.3}+\frac{1}{1.3.7}+\frac{1}{1.3.7.15}+\frac{1}{1.3.7.15.31}+\frac{1}{1.3.7.15.31.63}.$$

Ce développement diffère de celui qu'on a trouvé ci-dessus par la méthode combinatoire. La valeur est comprise entre 2 et $2\frac{2}{5}$, il suffit de comparer avec la progression $\frac{1}{3}:\frac{1}{18}:\frac{1}{108}$.

On sait que les coefficients du développement de la fraction rationnelle $\frac{x^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^n)}$, indiquent de combien de manières on peut décomposer le nombre n en parties, par voie d'addition.

Le produit de tous les nombres impairs divisé par tous les nombres pairs, donne le quotient fini $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ (Wallis). Si on efface parmi tous les nombres pairs les puissances de 2, et parmi les nombres impairs ces puissances augmentées d'une unité, le reste est encore un quotient fini compris entre

$$2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \text{ et } \frac{12}{5}\sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

Tm.

SOLUTIONS DE PROBLÈMES,

Sur l'ellipse, le triangle et le tétraèdre, proposés par M. Brassine (IV, p. 139),

PAR M. C. DROUETS,
élève du collége royal militaire de La Flèche.

—

1. Si on joint successivement les deux foyers F, F′ d'une ellipse à deux points conjugués m', m'', on aura deux triangles; et il est aisé de trouver que la somme des carrés de leurs aires est constante. Si on évalue les tangentes des demi-angles Fm'F′, Fm''F′, on aura, en désignant ces angles par α et α', $\operatorname{tang}^2\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tang}^2\frac{\alpha'}{2}=$ constante. Si on désigne par χ_1 et χ_2 les abscisses des points où les tangentes conjuguées vont couper le grand axe de l'ellipse, on aura la relation $\frac{1}{\chi_1^2}+\frac{1}{\chi_2^2}=$ constante. Soit $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$ l'équation de l'ellipse rapportée à son centre et à ses axes; $y=\delta x$, $y=\delta_1 x$ les équations de deux diamètres conjugués, on aura $\delta\delta_1=-\frac{b^2}{a^2}$ et on obtiendra pour les coordonnées des deux points conjugués :

$$m\left\{\begin{aligned} x_1 &= \pm\frac{ab}{\sqrt{a^2\delta^2+b^2}} \\ y_1 &= \pm\frac{ab\delta}{\sqrt{a^2\delta^2+b^2}} \end{aligned}\right. \qquad m''\left\{\begin{aligned} x^2 &= \pm\frac{ab}{\sqrt{a^2\delta_1^2+b^2}} \\ y^2 &= \pm\frac{ab\delta_1}{\sqrt{a^2\delta_1^2+b^2}} \end{aligned}\right.$$

Les triangles ont pour mesures c_1y_1 et c_1y_2; donc la somme de leurs carrés est $c^2(y_1^2+y_2^2)$. En substituant y_1 et y_2 et réduisant, on trouve $2a^2\delta^2\delta_1^2+b^2(\delta^2+\delta_1^2)$ facteur commun aux deux termes de la fraction, et en le supprimant il vient b^2c^2 pour la constante cherchée.

Si au point m' on mène la normale, on sait qu'elle fait des angles égaux avec les deux rayons vecteurs Fm' et F$'m'$; donc, l'angle de cette normale avec un de ces deux rayons est donc la moitié de l'angle Fm' F$''$ ou α. Le coefficient angulaire de la normale est $\frac{a^2y_1}{b^2x^1}$, celui du rayon m'F $\frac{y_1}{x_1-c}$. L'angle de ces deux droites étant $\frac{\alpha}{2}$, on a, toute réduction faite, tang $\frac{\alpha}{2}=\frac{cy_1}{b^2}$; donc, en élevant au carré tang$^2\,\frac{\alpha}{2}=\frac{c^2y_1^2}{b^4}$, et alors la distinction du rayon sera inutile, car les valeurs ne différeraient que par le signe de c; de même, pour le second point m'', on aura tang$^2\,\frac{\alpha'}{2}=\frac{c^2y^2_2}{b^4}$. Donc, la somme des carrés des tangentes est $\frac{c^2y_1^2+c^2y^2_2}{b^4}$, le numérateur, d'après le problème précédent, est égal à b^2c^2; donc tang$^2\frac{\alpha}{2}+$ tang$^2\frac{\alpha^1}{2}=\frac{b^2c^2}{b^4}=\frac{c^2}{b^2}$.

La tangente au point x_1y_1 est $a^2y_1y+b^2x^1x=a^2b^2$. Pour $y=0$ on aura $\text{A}=\frac{a^2}{x_1}$; de même pour la tangente conjuguée, c'est-à-dire celle qui est menée au point conjugué x_2y_2, on aura $x_1=\frac{a^2}{x_2}$, donc la somme proposée $\frac{1}{\chi^2}+\frac{1}{\chi_1^2}=\frac{x_1^2+x^2_2}{a^4}$.

Substituant x_1^2 et x_2^2 et réduisant, on trouve $a^2(\delta^2+\delta^2_1)+2b^2$ facteur commun; et en le supprimant il viendra :

$$\frac{1}{\chi^2}+\frac{1}{\chi_1^2}=\frac{b^2}{a^2b^2}=\frac{b}{a^2}.$$

2. Pour les problèmes suivants proposés par M. Brassine,

je rappellerai que si dans un triangle ABC on mène une sécante AD et qu'on désigne par m et n des lignes ou des nombres proportionnels à BD et DC, on aura :

$$m\overline{AC}^2 + n\overline{AB}^2 = (m+n)\,\overline{AD}^2 + n\,\overline{BD}^2 + m\overline{DC}^2 \quad (\textit{fig. } 23).$$

Cela posé, je vais chercher la valeur de la somme des carrés des distances d'un point quelconque m aux trois sommets d'un triangle ABC. Le point m pouvant ne pas être dans le plan du triangle.

Le théorème précédent appliqué aux deux triangles mAB, mIC, on aura :

$$\overline{mA}^2 + \overline{mB}^2 = 2\overline{AI}^2 + 2\overline{mI}^2 \qquad (\textit{fig. } 24).$$
$$\overline{mC}^2 + 2\overline{mI}^2 = 3\overline{mG}^2 + 2\overline{GI}^2 + \overline{GC}^2.$$

Ajoutant membre à membre :

$$\overline{mA}^2 + \overline{mB}^2 + \overline{mC}^2 = 3\overline{mG}^2 + 2\overline{AI}^2 + 2\overline{GI}^2 + \overline{GC}^2.$$

Or, dans le triangle AGB on a $\overline{AG}^2 + \overline{BG}^2 = 2\overline{AI}^2 + 2\overline{GI}^2$;

donc $\quad \overline{mA}^2 + \overline{mB}^2 + \overline{mc}^2 = 3\overline{mG}^2 + [\overline{AG}^2 + \overline{BG}^2 + \overline{Gc}^2].$

Supposons maintenant que le point m soit le centre o du cercle circonscrit, alors le premier membre de cette dernière égalité sera $3R^2$. On aura :

$$D^2 = R^2 - \frac{\overline{AG}^2 + \overline{BG}^2 + \overline{CG}^2}{3}.$$

Exprimons actuellement $\overline{AG}^2 + \overline{BG}^2 + \overline{CG}^2$ en fonction des côtés a, b, c.

Dans le triangle ABC on a :

$$a^2 + b^2 = \frac{c^2}{2} + 2\overline{CI}^2; \quad \text{or} \quad \overline{CI} = \frac{3}{2}\,\overline{CG};$$

d'où $$2a^2 + 2b^2 - c^2 = 9\overline{CG}^2;$$

De même $2a^2+2c^2-b^2=9\overline{GB}^2$, $2b^2+2c^2-a^2=9\overline{CA}^2$.

Ajoutant membre à membre :

$$3(a^2+b^2+c^2)=9\overline{AG}^2+\overline{BG}^2+\overline{CG}^2;$$

donc $$\overline{AG}^2+\overline{BG}^2+\overline{CG}^2=\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2).$$

On a donc ainsi : $D^2=R^2-\dfrac{a^2+b^2+c^2}{9}.$

Si m est le centre du cercle inscrit o,

$$\Delta^2=\overline{Go'}^2=\left[\frac{\overline{Ao'}^2+\overline{Bo'}^2+\overline{Co'}^2}{3}\right]-\frac{a^2+b^2+c^2}{9}.$$

Soient P, Q, R les pieds des perpendiculaires abaissées du centre o' sur les côtés, on aura :

$$\overline{o'A}^2=r^2+\overline{AP}^2=r^2+(\overline{p-a})^2$$
$$\overline{o'B}^2=r^2+\overline{BQ}^2=r^2+(\overline{p-b})^2$$
$$\overline{o'C}^2=r^2+\overline{CR}^2=r^2+(\overline{p-c})^2$$

Donc $\Delta^2=r^2+\dfrac{(p-a)^2+(p-b)^2+(p-c)^2}{3}-\dfrac{a^2+b^2+c^2}{9}$

Soit SABC (*fig.* 25) un tétraèdre donné ; g le centre de gravité de ABC ; G le centre de gravité du tétraèdre ; m un point quelconque. Le point m par rapport à la base ABC, puis dans le triangle Smg, donne les deux égalités :

$$\overline{mA}^2+\overline{mB}^2+\overline{mC}^2=3\overline{mg}^2+\frac{a^2+b^2+c^2}{3}$$

$$\overline{mS}^2+3\overline{mg}^2=4\overline{mG}^2+3Gg^2+\overline{SG}^2.$$

Ajoutant membre à membre :

$$\overline{mA}^2+\overline{mB}^2+\overline{mC}^2+\overline{mS}^2=4\overline{mG}^2+SG^2+3\overline{Gg}^2+\frac{a^2+b^2+c^2}{3}$$

or $$3\overline{Gg}^2+\frac{a^2+b^2+c^2}{3}=AG^2+\overline{BG}^2+\overline{CG}^2.$$

donc

$$\overline{mA}^2+\overline{mB}^2+\overline{mC}^2+\overline{mS}^2=4\overline{mG}^2+(\overline{AG}^2+\overline{BG}^2+\overline{CG}^2+\overline{SG}^2).$$

Soient l, l', l'', l''' les longueurs des droites menées d'un sommet au centre de gravité de la face opposée, on aura :

$$AG=\frac{3}{4}l,\ \overline{BG}=\frac{3}{4}l',\ \overline{CG}=\frac{3}{4}l'',\ \overline{SG}=\frac{3}{4}l''';$$

donc

$$\overline{mA}^2+\overline{mB}^2+\overline{mC}^2+\overline{mS}^2=4mG^2+\frac{9}{16}(l^2+l'^2+l''^2+l'''^2).$$

Soient d, e, f les arêtes SA, SB, SC, on aura :

$$d^2+e^2+f^2=3\overline{Sg}^2+\frac{a^2+b^2+c^2}{3}.$$

Donc la somme des arêtes $\Sigma a^2=3Sg^2+\frac{4}{3}(a^2+b^2+c^2)$.

Or $Sg=4Gg$, d'ailleurs : $\overline{AG}^2+\overline{BG}^2+\overline{CG}^2=3\overline{Gg}^2+\frac{a^2+b^2+c^2}{3}$;

$$\overline{SG}^2+\overline{AG}^2+\overline{BG}^2+CG^2=3\overline{Gg}^2+9\overline{Gg}^2+$$
$$\frac{a^2+b^2+c^2}{3}=12\overline{Cg}^2+\frac{a^2+b^2+c^2}{3};$$

$$\frac{\Sigma a^2}{16}=3\overline{Gg}^2+\frac{a^2+b^2+c^2}{12};\quad \frac{AG^2+BG^2+CG^2+Gs^2}{4}=$$
$$3Gg^2+\frac{a^2+b^2+c^2}{3}.$$

Donc, l'égalité supérieure deviendra :

$$mA^2+mB^2+mC^2+mS^2=4\overline{mG}^2+\frac{1}{4}\Sigma a^2.$$

Donc maintenant, si on suppose que m soit le centre de la sphère circonscrite, on aura :

$$\overline{mG}^2=D^2=R^2-\frac{\Sigma a^2}{16};\qquad \text{C. Q. F. D.}$$

3. Appelons G le centre de gravité d'un contour polygonal

de m côtés égaux ; par ce point, menons une droite quelconque et prenons sur cette droite deux points M et M' que nous joindrons aux sommets du polygone, on aura :

$$\Sigma D^2 - \Sigma D'^2 = m\left(\overline{MG}^2 - \overline{M'G}^2\right).$$

Soient A, B, C... les sommets du polygone donné, $2a$ la valeur d'un côté : pour trouver le centre de gravité du contour, on prendra les milieux P, Q, R des côtés et le centre de gravité du système de ces points.

Or, dans le triangle mAB, on aura :

$$\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 = 2a^2 + 2\overline{mP}^2 ;$$

dans le triangle suivant :

$$\overline{MB}^2 + \overline{MC}^2 = 2a^2 + a\overline{MQ}^2,$$

et ainsi de suite, ajoutant membre à membre, chaque distance étant répétée comme commune à deux triangles. On aura :

$$2\Sigma D^2 = 2ma^2 + 2\Sigma mP^2 \text{ ou } \Sigma D^2 = ma^2 + \Sigma mP^2.$$

Or il est démontré, page 230 de la Statique de Poinsot, que l'on a : $m.\Sigma\,\overline{mP}^2 = \Sigma d^2 + m^2\left(\overline{MG}^2\right)$. En appelant Σd^2 la somme des carrés des distances mutuelles des points P, Q, R, etc.

Donc $\Sigma D^2 = ma^2 + \dfrac{\Sigma d^2}{m} + m\overline{MG}^2$.

Pour un autre point M' quelconque :

$$\Sigma D'^2 = ma^2 + \frac{\Sigma d^2}{m} + m\overline{M'G}^2,$$

car le nombre des côtés et les distances des sommets n'auront pas changé.

Donc $\Sigma D^2 - \Sigma D'^2 = m\left(\overline{MG}^2 - \overline{M'G}^2\right)$.

On voit même qu'il n'est pas nécessaire que les trois points M, G, M' soient en ligne droite.

SOLUTION DE LA QUESTION 96 (t. IV, p. 260).

PAR UN ÉLÈVE
du collége royal militaire de La Flèche.

—

Si dans l'angle de deux droites prises pour axes de coordonnées, on inscrit une ligne polygonale régulière, ayant l'origine pour centre, on aura entre les abscisses à l'origine $x', x'', x'''\ldots x^{(n)}$ des côtés du polygone et l'ordonnée Y du premier sommet à partir de l'axe des x la relation :

$$\frac{1}{Y}=\frac{1}{x'}+\frac{1}{x''}+\frac{1}{x'''}+\ldots+\frac{1}{x^{(n)}}.$$

Soit n le nombre des côtés de la ligne polygonale comprise dans l'angle des axes. Je désigne par θ (*fig.* 26), la $2n^{ème}$ partie de l'angle des axes; si de l'origine j'abaisse sur les milieux des côtés des perpendiculaires et que je prolonge ces côtés jusqu'à leur rencontre avec l'axe des x, j'obtiendrai des triangles rectangles dont les hypoténuses seront

$$x',\ x'',\ x''',\ldots x^{(n)},$$

et qui auront tous un côté de l'angle droit commun, savoir la distance de l'origine aux côtés du polygone ; je la désigne par r; ces triangles me donneront :

$$\frac{1}{x'}=\frac{\cos\theta}{r}$$

$$\frac{1}{x''}=\frac{\cos 3\theta}{r}$$

$$\frac{1}{x'''}=\frac{\cos 5\theta}{r};$$

posant pour abréger :

$$S = \frac{1}{x'} + \frac{1}{x''} + \frac{1}{x'''} + \ldots + \frac{1}{x^{(n)}}; \quad \frac{1}{x^{(n)}} = \frac{\cos(2n-1)\theta}{r};$$

et ajoutant ces égalités membre à membre, j'aurai :

$$(A) \quad rS = \cos\theta + \cos 3\theta + \cos 5\theta + \ldots + \cos(2n-1)\theta.$$

D'un autre côté évaluant r en fonction de Y, on a :

$$r = \frac{Y \sin 2n\theta}{2\sin\theta};$$

Remplaçant r par sa valeur dans l'équation (A) elle devient :

$$SY = \frac{2\sin\theta}{\sin 2n\theta}\left[\cos\theta + \cos 3\theta + \cos 5\theta + \ldots + \cos(2n-1)\theta\right].$$

Je vais prouver que le second membre de cette égalité n'est autre chose que l'unité.

Pour cela je me sers des formules générales :

$$\cos x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}$$

$$\sin x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}},$$

e, étant le nombre dont le logarithme hyperbolique est 1.

On a donc :

$$\frac{2\sin\theta}{\sin 2n\theta} = \frac{2\left(e^{\theta\sqrt{-1}} - e^{-\theta}\right)\sqrt{-1}}{e^{2n\theta\sqrt{-1}} - e^{-2n\theta\sqrt{-1}}}.$$

$$\cos\theta + \cos 3\theta + \ldots + \cos(2n-1)\theta =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\begin{array}{l} e^{\theta\sqrt{-1}} + e^{3\theta\sqrt{-1}} + \ldots\ldots + e^{(2n-1)\theta\sqrt{-1}} \\ + e^{-\theta\sqrt{-1}} + e^{-3\theta\sqrt{-1}} + \ldots + e^{-(2n-1)\theta\sqrt{-1}} \end{array}\right.;$$

donc

$$\frac{2\sin\theta\,[\cos\theta+\cos 3\theta+\ldots+\cos(2n-1)\theta]}{\sin 2n\theta}=$$

$$=\frac{\left(e^{\theta\sqrt{-1}}-e^{-\theta\sqrt{-1}}\right)\left\{\begin{array}{l} e^{\theta\sqrt{-1}}+e^{3\theta\sqrt{-1}}+\ldots+e^{(2n-1)\theta\sqrt{-1}} \\ +e^{-\theta\sqrt{-1}}+e^{-3\theta\sqrt{-1}}+\ldots+e^{-(2n-1)\theta\sqrt{-1}}\end{array}\right.}{e^{2n\theta\sqrt{-1}}-e^{-2n\theta\sqrt{-1}}}$$

Je multiplie $\left\{\begin{array}{l} e^{\theta\sqrt{-1}}+e^{3\theta\sqrt{-1}}+\ldots+e^{(2n-1)\theta\sqrt{-1}} \\ +e^{-\theta\sqrt{-1}}+e^{-3\theta\sqrt{-1}}+\ldots+e^{-(2n-1)\theta\sqrt{-1}}\end{array}\right.$

par $e^{\theta\sqrt{-1}}-e^{-\theta\sqrt{-1}}$. J'ai :

$$\left\{\begin{array}{llll} +e^{2\theta\sqrt{-1}} & +e^{4\theta\sqrt{-1}} & +\ldots\ldots+e^{2(n-1)\theta\sqrt{-1}} & +e^{2n\theta\sqrt{-1}} \\ +\ 1 & +e^{-2\theta\sqrt{-1}}+ & \ldots\ldots\ldots\ldots & +e^{-2(n-1)\theta\sqrt{-1}} \\ -\ 1 & -e^{-2\theta\sqrt{-1}}- & \ldots\ldots\ldots\ldots & -e^{2(n-1)\theta\sqrt{-1}} \\ -e^{-2\theta\sqrt{-1}} & -e^{-4\theta\sqrt{-1}}- & \ldots\ldots\ldots\ldots & -e^{-2n\theta\sqrt{-1}} \end{array}\right.$$

il est facile de voir que tous les termes se détruisent à l'exception de $e^{2n\theta\sqrt{-1}}-e^{2n\theta\sqrt{-1}}$,

donc :

$$\frac{2\sin\theta[\cos\theta+\cos 3\theta+\ldots+\cos(2n-1)\theta]}{\sin 2n\theta}=\frac{e^{2n\theta\sqrt{-1}}\cdot e^{-2n\theta\sqrt{-1}}}{e^{2n\theta\sqrt{-1}}-e^{-2n\theta\sqrt{-1}}}=1$$

donc enfin : $SY=1$.

ou $$\frac{1}{x_{\prime}}+\frac{1}{x_{\prime\prime}}+\frac{1}{x_{\prime\prime\prime}}+\ldots+\frac{1}{x_{(n)}}=\frac{1}{Y}.$$

Note. M. Lecointe est parvenu directement à démontrer que le second membre de SY est égal à l'unité (t. III, p. 524, éq. 3). Tm.

THEORÈMES ET PROBLÈMES.

119. Une droite de longueur constante se mouvant entre deux droites fixes données dans l'espace, chaque point de la droite mobile décrit une ellipse; toutes les ellipses sont dans des plans parallèles; leurs centres sont sur la plus courte distance entre les droites fixes; le lieu des ellipses est une surface du quatrième degré; la droite mobile tourne à chaque instant autour d'une droite de direction constante, perpendiculaire aux deux plans parallèles déterminés par les droites fixes.

120. Établir au moyen du théorème précédent, la théorie de l'axe instantané de rotation d'un corps solide, se mouvant dans l'espace d'une manière quelconque.

121. Étant donnée une progression arithmétique de n termes; élevant chaque terme au carré; le tiers de n fois le carré du dernier terme est toujours entre la somme de tous les carrés, et cette même somme moins le carré du dernier terme; démontrer cette proposition par la géométrie.

122. La portion d'une normale comprise entre une conique et un axe principal multipliée par la perpendiculaire abaissée du centre sur la tangente qui passe par l'extrémité de la normale, donne un produit constant, pour le même axe principal.

123. Si dans une parabole, des rayons vecteurs sont en progression géométrique, les sinus des angles que forment les tangentes menées par les extrémités respectives des rayons vecteurs avec l'axe, sont aussi en progression géométrique.

DÉTERMINATION

de la fraction continue périodique à un terme, en fonction du nombre des fractions.

D'après M. Clausen (Th.) d'Altona (*Journ. de Crelle*, t. 3, p. 87).

—

Soit la fraction continue $1 : a + 1 : a + 1 : a + \ldots\ldots$ et n le nombre de ces fractions ; soit $\varphi(n)$ la valeur de cette fraction, on a évidemment $\varphi(n+1) = \dfrac{1}{a+\varphi(n)}$; ou

$$\varphi(n).\,\varphi(n+1) + a\varphi(n+1) = 1, \qquad (1)$$

posons :

$$F(n) = \frac{1}{\varphi(n)\,\varphi(n-1)\,\varphi(n-2)\ldots\varphi(1)};$$

ainsi l'équation (1) donne $F(n-1) + aF(n) = F(n+1)$.

On satisfait à cette équation en posant $F(n) = K\beta^n$; et on trouve pour déterminer β l'équation $\beta^2 - a\beta - 1 = 0$; désignons par β' et β'' les racines de cette équation. Il vient :

$F(n) = K\beta'^n + K'\beta''^n$; or $F(0) = 1$; $F(1) = a$; donc

$$1 = K + K'$$

$$a = K\beta' + K'\beta''$$

d'où

$$K = \frac{\beta'' - a}{\beta'' - \beta'};\quad K' = \frac{a - \beta'}{\beta'' - \beta'};$$

et

$$F(n) = \frac{1}{\beta'' - \beta'}\left[(\beta'' - a)\beta'^n + (a - \beta')\beta''^n\right];$$

mais :

$$\varphi(n) = \frac{F(n-1)}{F(n)};\ \text{donc}\ \varphi(n) = \frac{(\beta'' - a)\beta'^{n-1} + (a - \beta')\beta''^{n-1}}{(\beta'' - a)\beta'^n + (a - \beta')\beta''^n};$$

comme on a $\beta'\beta''=1$, il vient :

$$\varphi(n)=\frac{\beta'^{n-2}-\beta''^{n-2}-a(\beta'^{n-1}-\beta''^{n-1})}{\beta'^{n-1}-\beta''^{n-1}-a(\beta'^{n}-\beta''^{n})}. \qquad (3)$$

Cette fonction est symétrique, relativement aux racines β', β'', elle est donc rationnelle en a ; et on ne peut avoir $\beta'=\beta''$ à moins que $a=0$; ce cas est exceptionnel. On a l'équation $\varphi(m+n)=\dfrac{\varphi(m)+\varphi(n)-a\varphi(m)\varphi(n)}{1+\varphi(m)\varphi(n)}$; la substitution dans l'équation (3) suffit pour démontrer cette identité.

Note. 1° Les propriétés des fractions continues, comprise celle qu'on vient de lire ; 2° les théories des plus grands communs diviseurs, numériques et algébriques ; 3° la méthode d'élimination de Bret, pour deux équations à deux inconnues ; 4° l'analyse indéterminée du premier et du second degré ; 5° la théorie des séries récurrentes ; 6° l'intégration de certaines équations aux différences finies, sont des opérations identiques et conséquences immédiates d'un algorithme proposé par Euler, pour exprimer une fraction continue. (*Voir Journal des Mathématiques de M. Liouville.*)

Nous reproduirons ce travail, avec quelques changements dans les Annales. Tm.

SUR LA MÉTHODE DES ISOPÉRIMÈTRES (Schwab) ;

PAR M. LÉGER,

chef d'institution à Montmorency. (Note posthume.)

—

La méthode de Schwab a été donnée synthétiquement par l'auteur, M. Vincent et d'autres ; mais je ne sache pas qu'on ait donné une construction aussi simple que la suivante qui a l'avantage de donner des polygones isopérimètres *concentri-*

ques, de montrer à l'œil le rapprochement indéfini des circonférences inscrites et circonscrites et de prouver à l'instant les formules.

Soit AB (*fig*. 21), le côté d'un polygone régulier quelconque, O le centre ; $OC = r =$ rayon inscrit ; $OD = OB = R =$ rayon circonscrit ; joignez les milieux E et F des cordes AD, DB ; alors EF sera le côté du polygone isopérimètre d'un nombre double de côtés ; O toujours le centre ; $OG = r' =$ rayon du cercle inscrit ; $OF = R' =$ rayon du cercle circonscrit ; cela est évident et de plus il saute aux yeux qu'on a $r' > r$; $R' < R$ et que la différence entre ces rayons décroît indéfiniment (?) et l'on a sur-le-champ $r' = \frac{1}{2}(R + r)$; $R'^2 = Rr'$.

NOTICE BIOGRAPHIQUE.

Consacrons quelques lignes à la mémoire d'un homme de bien.

Léger (Émile), né à Lagrange-aux-Bois (Marne), le 15 août 1795, était fils de Léger (Claude), bon littérateur, excellent humaniste. Sous un maître aussi distingué, aussi dévoué, il apprit à écrire, avec correction et pureté, la langue nationale et à lire avec facilité les classiques grecs et latins ; instruction qui est la base de toute éducation solidement littéraire. Le père ayant été nommé professeur au lycée impérial de Bruxelles, Émile eut pour condisciple M. Quetelet et d'autres hommes distingués avec lesquels il a conservé des relations affectueuses. Mais c'est au lycée de Mayence, où son père obtint une chaire de rhétorique, qu'Émile commença à cultiver les sciences exactes avec beaucoup d'ardeur et d'intelligence. Après deux années d'études, sous ma direction, il fut admis en 1813 à l'École polytechnique. C'était vers l'époque fatale marquée pour la fin de l'empire et de notre prépondérance militaire. Léger fut blessé au poste que les élèves ont défendu si honorablement sur la route de Vincennes. Il se fit transporter au sein de sa famille, qui était venue habiter Montmorency et où M. Claude Léger avait fondé récemment une institution. Renonçant désormais aux fonctions publiques, le père et le fils s'adonnèrent entièrement à l'éducation de la jeunesse et y obtinrent de notables succès. Ils offraient l'exemple d'une concorde de principes, de vues, d'intérêt et une réunion précieuse de science, de talents et de vertus. Ayant contracté une alliance, dans une famille honorable du pays, et ayant eu le bonheur de rencontrer une compagne digne de son choix, Émile, dès que le poids de l'âge se fit sentir à son père, devint le chef de l'établissement et se livra avec un zèle trop continu, aux pénibles fonctions pédagogiques. On voyait, chaque année, sortir de sa modeste institution, quelques élèves pour l'École polytechnique ou admis aux grades universitaires. Au milieu de ses occupations, mon ancien élève, devenu mon ami intime, entretenait avec moi une correspondance suivie sur les divers sujets de la politique, de la littérature du jour et sur les mathématiques, pour nous un sujet de prédilection. La construction si simple qu'on vient de lire est consignée dans une lettre du 19 avril 1837. Il considérait la science géométrique comme une émanation divine, comme telle, digne de nos respects et de notre admiration et dont l'enseignement constitue le sacerdoce de la vérité pure, à l'abri de nos vices et de nos passions; c'est ainsi qu'il comprenait sa vocation à laquelle il consacra tous ses instants, toutes ses pensées; et il succomba à la peine quoiqu'il eût autour de lui tous les éléments du bonheur, une existence aisée, une femme aimable, modèle des vertus de son sexe; des filles parfaitement élevées et d'une belle espérance, une mère d'une inépuisable tendresse ; il ne put résister aux fatigants labeurs qu'il s'était imposés et cessa de vivre le 15 décembre 1838, à l'âge de quarante-trois ans, dans toute la vigueur de sa raison et du talent. Dans les diverses positions de la vie de famille, fils, frère, époux, père, Léger a donné constamment l'exemple de la plus scrupuleuse soumission au devoir, de la plus entière abnégation d'égoïsme. La commune de Montmorency regrette encore l'excellent citoyen, les services qu'il rendait, avec un zèle gratuit, à l'administration municipale, à l'instruction primaire ; la famille déplore une irréparable perte, et moi l'intime confident de toutes mes pensées.

M. Léger a inséré un mémoire sur les rapports et les restes des quantités irrationnelles dans le journal de M. Liouville, t. I, p. 93, 1836. La mort l'a surpris travaillant à une géométrie analytique ; M. Claude Léger, d'une vaste instruction et d'une profonde modestie, a laissé en manuscrit une traduction en vers des œuvres complètes d'Horace et de plusieurs prosateurs latins.

THÉORÈME SUR UN MAXIMUM.

Théorème. Soit $y = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots a_nx_n$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots x_n^2 = 1$$

relations entre n variables $x_1, x_2 \ldots x_n$ et n constantes $a_1, a_2 \ldots a_n$, alors $\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots a_n^2}$ est la valeur maximum de y.

Démonstration.

$$y^2 = a_1^2 + a_2^2 + \ldots a_n^2 - (a_1x_2 - a_2x_1)^2 - (a_1x_3 - a_3x_1)^2 \ldots - (a_1x_4 - a_4x_1)$$
$$-(a_2x_3 - a_3x_2)^2 - (a_2x_4 - a_4x_2)^2 \ldots - (a_2x_n - a_nx_2)^2$$

donc y est un maximum lorsque

$$a_1x_2-a_2x_1=0\ldots a_1x_3-a_3x_1=0\ldots a_1x_n-a_nx_1=0.$$

On tire de ces n équations $\frac{x_1}{a_1}=\frac{x_2}{a_2}=\frac{x_3}{a_3}\ldots=\frac{x_n}{a_n}$; d'après ces valeurs, les autres termes s'annulent d'eux mêmes;

$$y=x_1\left\{a_1+\frac{a_2^2}{a_1}+\frac{a_3^2}{a_1}\ldots\right]=\frac{x_1}{a_1}(a_1^2+a_2^2+\ldots a_n^2)=(a_1^2+a_2^2\ldots a_n^2)^{\frac{1}{2}};$$

d'où $x_1=\dfrac{a_1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots a_n^2}}$; $x_2=\dfrac{a_2}{\sqrt{a_1^2+\ldots a_n^2}}\ldots$

(Moigno. Calcul intégral, t. II, p. 516).

Observation. Ce théorème est utile dans plusieurs questions de géométrie élémentaire. Exemple : x_1, x_2, x_3 étant les demi-diamètres conjugués d'un ellipsoïde, dans quel cas $a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3$ devient-il un maximum ? de même pour l'ellipse. Tm.

NOTE ADDITIONNELLE

relative à la solution du problème 83 (*v.* 122).

PAR M. HENRI D'ANDRÉ,
élève de l'institution Laville.

—

La propriété énoncée $\rho z''=b^2$ (p. 127) se démontre facilement par la géométrie. Conservant les mêmes notations, abaissons sur la tangente en M, les perpendiculaires FH, F'H'; il est évident que le triangle FHS est semblable au triangle F'MH' comme équiangle; on a donc FS . F'M $=$ FH'.FH; ce dernier rectangle, d'après une propriété déjà connue d'Apollonius, est équivalent à b^2; donc $\rho z''=b^2$. C. Q. F. D.

THÉORÈME

sur les diamètres conjugués.

PAR M. HENRI D'ANDRÉ,
élève de l'institution Laville.

—

Théorème. Considérant comme coordonnées rectangulaires d'un point, les rayons de courbure des extrémités des diamètres conjugués d'une même ellipse, le lieu du point est l'enveloppe d'une droite de longueur constante inscrite dans un angle droit (Brassine, t. IV, p. 560).

Démonstration. Le rayon de courbure d'une ellipse a pour expression $\mathrm{R}=\dfrac{(a^4-c^2x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b}$; l'ellipse est rapportée aux axes principaux. Cela posé, soient x', y' les coordonnées des extrémités d'un diamètre de l'ellipse. L'équation du diamètre conjugué sera $y=\dfrac{a^2y'}{b^2x'}x$, et si l'on cherche l'abscisse de son extrémité, on a $x=\pm\dfrac{ay'}{b}$. Par conséquent, en désignant par x et y les coordonnées courantes du lieu cherché on aura :

$$y=\frac{\left(a^4-\dfrac{a^2c^2y'^2}{b^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{a^4b}\ \ (1);\quad x=\frac{(a^4-c^2x'^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b}\qquad (2)$$

avec la relation $a^2y'^2+b^2x'^2-a^2b^2=0$, $\qquad$ (3)

entre lesquelles équations il n'y a plus qu'à éliminer x', y'. L'équation (1) devient $(a^4b^2-a^2c^1y'^2)=\sqrt[3]{a^2b^8y^2}$ remplaçant $a^2y'^2$ par sa valeur tirée de l'équation (3) et supprimant le facteur commun b^2 il vient :

$$a^2b^2 + c^2x'^2 = \sqrt[3]{a^8b^2y^2}.$$

Mais l'équation (2) donne $a^4 - c^2x'^2 = \sqrt[3]{a^8b^2x^2}$, et en ajoutant il vient finalement après la suppression du facteur a^2 :

$$a^2+b^2 = \sqrt[3]{a^2b^2}\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}\right),$$

ou bien $$\sqrt[3]{y^2}+\sqrt[3]{x^2} = \sqrt[3]{\frac{(a^2+b^2)^6}{a^2b^2}}; \quad \text{C. Q. F. D.}$$

Nota. MM. Woestyn et Vauquelin nous ont adressé depuis une solution qui ne diffère pas essentiellement de celle de M. d'André.

NOTE

sur les équations dont les racines forment une progression géométrique.

—

1. Soit :

$$P = (x-a)\,(x-ar)\,(x-ar^2)\ldots(x-ar^{m-1}) =$$
$$= x^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + \ldots A_m;$$

posons $x = ry$, il vient :

$$P = r^{m-1}(ry-a)\,(y-a)\,(y-ar^2)\ldots(y-ar^{m-2}) =$$
$$= r^my^m + A_1r^{m-1}y^{m-1} + A_2r^{m-2}y^{m-2} + \ldots A_m$$
$$= \frac{r^{m-1}(ry-a)}{y-ar^{m-1}}\,(y^m+A_1y^{m-1}+A_2y^{m-2}+\ldots\ldots A_m);$$

donc

$$(y-ar^{m-1})\,(r^my^m+A_1r^{m-1}y^{m-1}+A_2r^{m-2}y^{m-2}+\ldots A_m) =$$
$$= r^{m-1}(ry-a)\,(y^m+A_1y^{m-1}+A_2y^{m-2}+\ldots A_m);$$

comparant les coefficients des termes semblables, on a :

$$A_1(1-r)=a(r^m-1)$$
$$A_2(1-r^2)=A_1ar(r^{m-1}-1)$$
$$A_3(1-r^3)=A_2ar^2(r^{m-2}-1)$$
$$\vdots$$
$$A_p(1-r^p)=A_{p-1}ar^{p-1}(r^{m-p+1}-1)\,;$$

multipliant toutes ces équations, il vient :

$$(-1)^pA_p=a^p.r^{\frac{p(p-1)}{1.2}}\frac{(r^{m-p+1}-1)(r^{m-p+2}-1)(r^{m-p+3}-1)\ldots(r^m-1)}{r-1.\ \ r^2-1.\ \ r^3-1\ldots r^p-1}$$

p comprend toutes les valeurs depuis 1 jusqu'à m inclusivement.

Corollaire I. Connaissant deux termes de l'équation, toutes les racines sont déterminées ; puisqu'on a alors deux équations entre les inconnues a et r ; ce qui est aussi évident à priori.

Corollaire II. Lorsque $r=1$, on a $\frac{r^k-1}{r^s-1}=\frac{k}{s}$; et, dans la même hypothèse,

$$(-1)^pA_p=a^p.\frac{m-p+1}{1}.\frac{m-p+2}{2}\ldots\frac{m}{p}\,;$$

mais alors $P=(x-a)^m$; on a ainsi une nouvelle démonstration du binôme.

Corollaire III. A_p est essentiellement une fonction entière de r, on a donc ce théorème :

Le produit $(r^k-1)(r^{k+1}-1)(r^{k+2}-1)\ldots\ldots r^{k+p-1}$, est toujours divisible par

$$(r-1)(r^2-1)(r^3-1)\ldots\ldots(r^p-1)\,;\ k>p\,;$$

k et p entiers positifs. Ce théorème peut se démontrer directement ; en effet, comparant les deux suites des exposants

$$k,k+1,\ldots k+p-1 \quad \text{et} \quad 1,2,3\ldots p\,;$$

l'expression $\frac{k(k+1)\ldots(k+p-1)}{1.2\ldots p}$ est un nombre entier.

Corollaire IV. Si $r = -1$; il faut distinguer deux cas : 1° m a une valeur paire, on a toujours :

$$\frac{r^k-1}{r^s-1} = \frac{k}{s} \text{ pour } r = -1,$$

si k et s sont des nombres pairs ; et si k et s sont impairs, on a $\frac{r^k-1}{r^s-1} = 1$; si k est pair et s impair, cette expression devient nulle, toujours dans la supposition de $r = -1$.

Si donc p est pair, on a :

$$A_p = (-1)^{\frac{p}{2}} \cdot a^p \cdot \frac{m-p+2}{2}, \frac{m-p+4 \ldots}{4 \ldots \ldots} \frac{m}{p}.$$

Si p est impair, $A_p = 0$.

2° m a une valeur impaire ; si p est pair, alors on a :

$$A_{(p)} = (-1)^{\frac{p}{2}} \frac{m-p+1}{2} \cdot \frac{m-p+3 \ldots}{4} \cdots \frac{m-1}{p}.$$

Si p est impair, il vient :

$$A_p = (-1)^{\frac{3p-1}{2}} a^p \cdot \frac{m-p+2}{2} \cdot \frac{m-p+4}{4} \cdots \frac{m-1}{p-1}.$$

Corollaire V. A_p ne peut être nul à moins que r ne soit une racine de l'unité ; soit α une racine de l'équation

$$y^t - 1 = 0,$$

et non d'un degré moindre. On a :

$$\frac{\alpha^{kt}-1}{\alpha^{k't}-1} = \frac{k}{k'},$$

et $\frac{\alpha^{kt+s}-1}{\alpha^{k't+s}} = 1$; soit donc $m = kt + s$; $p = k't + s'$; si k' est nul, alors A_p peut devenir nnl.

Soit dans le numérateur, nt le premier exposant de r, qui est un multiple de t, alors on aura

$$(-1)^p A_p = a^p . \alpha^{\frac{p.p-1}{2}} \frac{n}{1} . \frac{n+1}{2} \cdots\cdots \frac{n+k-1}{k}\text{; car } \frac{\alpha^{nt}-1}{\alpha^t-1} = \frac{n}{1},$$

et ainsi des autres.

Corollaire VI. Si dans le corollaire précédent on a $t = m$, alors toutes les valeurs de A_p sont nulles, excepté lorsque p devient m; alors $(-1)^m A_p = a^m . \alpha^{\frac{m-1}{2}}$, et

$$\alpha^{\frac{m-1}{2}} = \sqrt{\alpha^{m-1}} = \sqrt{\frac{1}{\alpha}} = \alpha^{-\frac{1}{2}}.$$

Corollaire VII. Si r est moindre que l'unité et $m = \infty$, alors

$$(-1)^p A_p = a^p . r^{\frac{p(p-1)}{1.2}} \frac{1}{1-r} . \frac{1}{1-r^2} . \frac{1}{1-r^3} \cdots\cdots \frac{1}{1-r^p};$$

car $r^{m-k} = 0$, k étant un nombre déterminé.

Corollaire VIII. Si a est négatif, r restant positif, il suffit de supprimer le facteur (-1) dans le premier membre de l'équation (1).

Corollaire IX. La même équation (1) sert à résoudre cette question : Connaissant les m termes consécutifs d'une progression géométrique, trouver la somme d'une fonction symétrique quelconque de ces termes, car l'équation (1) permet de calculer les coefficients de l'équation qui a ces m termes pour racines.

(*Voir les observations instructives de M. Cirodde*, tome I, p. 106) Tm.

QUESTION D'EXAMEN.

(Voir t. III, p. 603.)

PAR M. MIDY,
ancien professeur dans les Colléges royaux.

On demande quelle est la courbe dont l'équation polaire est

$$\rho = \frac{1}{\cos^2 \omega}. \qquad (1)$$

La valeur de ρ restant la même quand on y change le signe de $\cos \omega$, il s'ensuit que la courbe cherchée, déjà symétrique par rapport à l'axe polaire XOX', l'est encore par rapport à la perpendiculaire YOY', menée au pôle sur cet axe. De 0°, ou bien de 180° à 90°, le cosinus décroît en valeur absolue depuis 1 jusqu'à 0. Donc, entre ces limites, la valeur de ρ toujours positive, ira en croissant depuis 1 jusqu'à l'infini. La courbe est donc composée, comme l'indique la figure 27, de deux branches séparées et infinies UAV, U'A'V', limitées en A et A' au cercle décrit du rayon OA $= 1$.

Sa construction est facile. En effet, l'équation (1) peut se mettre sous la forme

$$\rho = \frac{1}{\cos \omega} \cdot \frac{1}{\cos \omega}$$

et comme la perpendiculaire en A sur OX aurait pour équation

$$\rho = \frac{1}{\cos \omega},$$

il s'ensuit que si, pour un rayon vecteur quelconque OIN, on rabat du centre O le point N en N' et qu'on élève en celui-ci une perpendiculaire sur l'axe, sa rencontre avec OR déterminera le point correspondant M de la courbe. D'ailleurs, à cause de l'égalité des triangles OIN', OAN, IN' est perpendiculaire sur OI. D'où il suit que le point M est encore à l'intersection du rayon vecteur OI prolongé et de la perpendiculaire élevée sur l'axe polaire au point où cet axe lui-même est coupé par la perpendiculaire menée à l'extrémité du rayon mobile. Ce qui donne un second moyen de construire la courbe considérée.

De l'équation (1) on déduit celle-ci :

$$\rho^4 \cos^4 \omega = \rho^2 \sin^2 \omega + \rho^2 \cos^2 \omega\,;$$

d'où, passant aux coordonnées rectangulaires,

$$x^4 = x^2 + y^2\,; \tag{2}$$

par suite

$$x^2 = \sqrt{x^2 + y^2},$$

Cette dernière équation équivaut à la proportion suivante

$$1 : x :: x : \sqrt{x^2 + y^2},$$

ou

$$\mathrm{OI} : \mathrm{ON}' :: \mathrm{ON}' : \mathrm{OM}.$$

Réciproquement, celle-ci, qui est l'expression géométrique la plus simple du second mode de génération indiqué, conduirait immédiatement aux équations (2) et (1), si ces équations n'étaient point connues.

Proposons-nous maintenant de mener la tangente en un point quelconque de la courbe.

Nous aurons les équations :

$$\rho = \frac{1}{\cos^2 \omega} \quad \text{et} \quad \rho + k = \frac{1}{\cos^2(\omega + h)}\,;$$

d'où

$$k = \frac{\cos^2 \omega - \cos^2(\omega + h)}{\cos^2 \omega \,.\, \cos^2(\omega + h)}\,;$$

expression qu'on peut changer en celle-ci :

$$k = \frac{h \cos\left(\omega + \frac{h}{2}\right) \sin\left(\omega + \frac{h}{2}\right) \cos\frac{h}{2} \sin\frac{h}{2}}{\cos^2 \omega \,.\, \cos^2 (\omega + h)};$$

par suite

$$\lim^e \frac{h}{k} = \frac{\cos^3 \omega}{2 \sin \omega}.$$

Donc $$\tang = \frac{1}{2} \cot \omega \text{ et } st = \frac{1}{\sin \omega}.$$

Discutons ces valeurs. Quand ω est égal à 0°, ou à 180°, tg. et st deviennent infinies. D'où il suit que les perpendiculaires en H et H' sur l'axe sont tangentes à la courbe. A mesure que ω augmente à partir de 0°, cot ω et par suite tg., ou, ce qui revient au même, l'angle OMT diminue. Pour $\omega = 90°$, cet angle est nul.

D'ailleurs dans cette hypothèse O est infini : st l'est aussi ; donc pour ce point et pour le point correspondant sur la branche opposée, les tangentes, devenues des asymptotes de la courbe, sont parallèles à YOY, mais situées à une distance infinie de cette droite, en d'autres termes ces asymptotes n'existent plus (*fig.* 28). Voyons comment pour un point donné M de la courbe, on déterminera la position correspondante de la tangente au moyen de la valeur de st. Faites l'arc IG = IA et menez le diamètre GG' prolongé jusqu'à la rencontre en S de la tangente au cercle en B'. Rabattez S en T sur la perpendiculaire en O au rayon vecteur OIM et la droite TMT' sera la tangente demandée.

Si nous suivons le point de contact M et la position de la tangente depuis le sommet H de la courbe jusqu'à l'infini, nous reconnaîtrons que la courbe, de convexe qu'elle était d'abord par rapport à YOY', lui devient nécessairement concave puisque les asymptotes sont parallèles à cette droite.

Il y a donc nécessairement sur chacune des deux branches deux points d'inflexion dont nous allons déterminer la position.

Soit menée par O une parallèle LL′ à une tangente quelconque TMT′. Appelons θ l'angle LOB formé par cette droite et le diamètre BB′. Cet angle, nul d'abord quand le point de contact est en A, croît jusqu'à ce que le point M parvienne au point d'inflexion et décroît ensuite à partir de ce terme pour redevenir nul quand le point de contact passe à l'infini.

On voit par là qu'en déterminant la valeur maximum de cet angle θ, on aura la position correspondante du point d'inflexion cherché.

Or, à cause de la relation $tg = \frac{1}{2} \cot \omega$ et de l'égalité des angles LOM, OMT, l'on a :

$$\frac{1}{2} \cot \omega = \text{tang}\,(90° - (\omega + \theta),$$

d'où

$$2 \,\text{tang}\, \omega = \frac{\text{tang}\, \omega + \text{tang}\, \theta}{1 - \text{tang}\, \omega \,\text{tang}\, \theta},$$

par suite

$$\text{tang}\, \theta = \frac{\text{tang}\, \omega}{1 + 2\, \text{tang}^2 \omega}.$$

Pour abréger, changeons cette expression en celle-ci :

$$u = \frac{z}{1 + 2z^2}.$$

Résolue par rapport à z, cette équation donne :

$$z = \frac{1 + \sqrt{1 - 8u^2}}{4u}.$$

On en tire $u = \frac{1}{4}\sqrt{2}$ pour la valeur maximum de u, et $z = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ pour la valeur correspondante de z.

Pour construire ces résultats, formons (*fig.* 27) le carré DE D'E' et menons ses diagonales. Rabattons du centre A',K en G et g et les lignes indéfinies GOM, gOm seront les directions des rayons vecteurs correspondant aux points d'inflexion cherchés. Faisons $B'H = B'H' = \frac{1}{2} B'K$. Les parallèles aux droites OH, OH' menées par les points M et m, M' et m' de la courbe, seront les tangentes correspondantes aux quatre points que l'on vient de nommer.

Nota. Cette question a déjà été traitée par les coordonnés rectangulaires, t. II p. 232. Descartes a imaginé un instrument formé de deux règles à l'aide duquel il construit d'un mouvement continu et simultanément les courbes données par les équations polaires

$$\rho = \frac{1}{\cos^2 \omega}; \ \rho = \frac{1}{\cos^4 \omega}, \ \rho = \frac{1}{\cos^6 \omega} \text{ etc.}$$

(OEuvres, t. V, p. 336, édition Cousin.)

PROBLÈME SUR LES PROBABILITÉS (*).

L'urne A renferme n boules blanches; l'urne B, n boules noires; à chaque seconde il passe une boule de A en B et une autre de B en A. On demande le nombre probable de boules blanches qui se trouveront en A au bout de t secondes.

Solution. Supposons qu'au bout de $t-1$ seconde, il y ait :

Dans A... p, noires, et $n-p$. blanches;

Dans B... $n-p$. noires, et p. blanches.

(*) Ce problème, généralisé pour un nombre quelconque d'urnes, a été proposé et résolu par Bernoulli (Daniel). *N. mém. de Petersbourg*, t. XIV. 1769, p. 3.

Il y a quatre cas possibles :

1° Une noire va de A en B et une noire de B en A ; l'état de A et de B ne sera pas changé ; la probabilité, pour qu'un tel échange ait lieu, est représentée par $\frac{p}{n} \times \frac{n-p}{n}$; et comme il y a $n-p$ boules blanches, la valeur totale de la blancheur sera représentée par $\frac{p(n-p)^2}{n^2}$

2° Une boule noire va de A en B et une blanche de B en A ; la probabilité d'un tel échange est représentée par $\frac{p}{n}.\frac{p}{n}$; et le nombre de boules blanches devient $n-p+1$; ainsi la valeur actuelle de la blancheur est $\frac{p^2(n-p+1)}{n^2}$

3° Une boule blanche va de A en B et une noire de B en A ; la probabilité est $\frac{n-p}{n} \times \frac{n-p}{n}$; le nombre de boules blanches est alors $n-p-1$; donc la valeur probable est $\frac{(n-p)^2(n-p-1)}{n^2}$

4° Une boule blanche va de A en B et une blanche de B en A ; la probabilité est $\frac{p}{n} \times \frac{n-p}{n}$; le nombre de boules blanches reste $n-p$, ainsi la valeur est $\frac{(n-p)^2 p}{n^2}$.

La somme de ces quatre valeurs est égale à

$$(n-p)\,\frac{(n-2)}{n}+1.$$

Or, en commençant on a $p=0$;
donc au bout de la 1^re^ seconde, la valeur certaine est :

$$n-1$$

2^e^ seconde ; la valeur probable $\frac{(n-1)(n-2)}{n}+1$

3^e^ seconde. . . . . $\frac{(n-1)(n-2)^2}{n^2}+\frac{n-2}{n}+1$;

Au bout de la $t^{ème}$ seconde :

$$\frac{(n-1)(n-2)^{t-1}}{n^{t-1}}+\left(\frac{n-2}{n}\right)^{t-2}+\left(\frac{n-2}{n}\right)^{t-3}+\ldots\frac{n-2}{n}+1=s.$$

Faisant $\frac{n-2}{n}=1-r$; on aura : $s=\frac{(1-r)^t+1}{r}$.

Coroll. 1. Si $t=\infty$; $s=\frac{1}{r}=\frac{n}{2}$; ainsi, au bout d'un temps infini, on peut parier un contre un, qu'il ne reste dans l'urne A que la moitié des boules blanches ; résultat qu'on peut trouver à priori.

Coroll. 2. Si r est une quantité très-petite, mais tr un produit appréciable, on a sensiblement :

$(1-r)^t=1-tr+\frac{t^2r^2}{1\cdot2}-\frac{t^3r^3}{1\cdot23\cdot}+\text{et}=e^{tr}$; e étant la base du système népérien ; donc, lorsque n est très-considérable, on a : $s=\frac{n}{2}\left(1+\frac{1}{e^{tr}}\right)=\frac{n}{2}\left(1+\frac{1}{e^{\frac{2t}{n}}}\right)$ (1).

Coroll. 3. Si deux vases A et B d'égale capacité sont remplis chacun d'un liquide différent, et s'ils communiquent par des canaux de manière qu'il s'écoule uniformément la même quantité de liquide de A en B et de B en A ; la formule (1) fait connaître à chaque instant l'état du mélange ; n représente le volume ; et connaissant l'état du mélange au bout d'un temps t', on le connaîtra pour un temps quelconque t.

5° Autrement ; A, a pour acquérir une boule blanche, une probabilité représentée par $\frac{p}{n}$; et pour perdre une boule blanche une probabilité $\frac{n-p}{n}$, de sorte que l'état probable de A au bout de t secondes sera :

$$n-p+\frac{p}{n}-\frac{(n-p)}{n}=(n-p)\frac{(n-2)}{n}+1.$$

6° Soient maintenant trois urnes A, B, C; la première contient n boules blanches, la seconde n boules noires, et la troisième n boules rouges; à chaque seconde il passe une boule de la première dans la seconde, de la seconde dans la troisième, et de la troisième dans la première; quel est le nombre probable des boules blanches dans l'urne A au bout de t secondes? soit au bout de $t-1$ secondes le nombre de boules blanches, p dans A; p' dans B; et p'' dans C; on aura:

$$p+p'+p''=n.$$

Ainsi A a une chance $\frac{p''}{n}$ de gagner une boule blanche, et une chance $\frac{p}{n}$ de perdre. Donc, au bout de t secondes, l'état blanc probable de A est: $p+\frac{p''}{n}-\frac{p}{n}=\frac{p(n-1)+p''}{n}$; celui de B: $\frac{(n-1)p'+p}{n}$; celui de C: $\frac{(n-1)p''+p'}{n}$.

Tm.

RECUEIL DE FORMULES ET DE VALEURS

relatives aux fonctions circulaires et logarithmiques.

Suite. (V. p. 152.)

—

31. $\frac{\pi}{4}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{9}{2+\cfrac{25}{2+\cfrac{49}{2+\ldots}}}}}$ (Brounker.)

32. $e=2+\cfrac{2}{2+\cfrac{3}{3+\cfrac{4}{4+\text{etc}\ldots}}}=1+\cfrac{2}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{10+\cfrac{1}{14+\ldots}}}}$ (Euler.)

33. $\sin^2 a+\cos^2 a=\text{séc}\,a.\cos a=\text{cosèc}\,a\sin a=\tan a\cot a=1.$

34. $\sin(a_1+a_2+a_3+\ldots a_n)=\Sigma\sin a_1\cos a_2\cos a_3\ldots\cos a_n-$
$-\Sigma\sin a_1\sin a_2\sin a_3\cos a_4\cos a_5\ldots\cos a_n+$
$+\Sigma\sin a_1\sin a_2\sin a_3\sin a_4\sin a_5\cos a_1\ldots\cos a_n$ — etc.

35. $\cos(a_1+a_2+\ldots a_n)=\Sigma\cos a_1\cos a_2\ldots\cos a_n-$
$-\Sigma\cos a_1\cos a_2\ldots\cos a_{n-2}\sin a_1\sin a_2+$
$+\Sigma\cos a_1\ldots\cos a_{n-4}\sin a_1\sin a_2\sin a_3\sin a_4$—etc.

Σ désigne la somme des produits semblables. (V. t. I, p. 346.)

36. $\sin na = n\sin a\cos^{n-1}a - \dfrac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\sin^3 a\cos^{n-3}a + \ldots$

37. $\cos na = \cos^n a - \dfrac{n(n-1)}{1.2}\cos^{n-2}a\sin^2 a +$

$$+\frac{n.n-1.n-2.n-3}{1.2.3.4}\cos^{n-4}a\sin^4 a\ldots$$

38. n pair; $\sin na = \cos a\left[n\sin a - \dfrac{n.n^2-4}{1.2.3}\sin^3 a +\right.$

$$\left.+\frac{n.n^2-4.n^2-16}{1.2.3.4.5}\sin^5 a - \frac{n.n^2-4.n^2-16.n^2-36}{1.2.3.4.5.6.7}\sin^7 a + \ldots\right]$$

n impair; $\sin na = n\sin a - \dfrac{n.n^2-1}{1.2.3}\sin^3 a +$

$$+\frac{n.n^2-1.n^2-9}{1.2.3.4.5}\sin^5 a - \frac{n.n^2-1.n^2-9.n^2-25}{1.2.3.4.5.6.7}\sin^7 a + \ldots\ldots]$$

39. n pair; $\cos na = 1 - \dfrac{n^2}{1.2}\sin^2 a + \dfrac{n^2.n^2-4}{1.2.3.4}\sin^4 a -$

$$-\frac{n^2.n^2-4.n^2-16}{1.2.3.4.5.6}\sin^6 a + \frac{n^2.n^2-4.n^2-16.n^2-36}{1\ldots 8}\sin^8 a\ldots$$

n impair; $\cos na = \cos a\left[1 - \dfrac{n^2-1}{1.2}\sin^2 a +\right.$

$$\left.+\frac{n^2-1.n^2-9}{1.2.3.4}\sin^4 a - \frac{n^2-1.n^2-9.n^2-25}{1\ldots 6}\sin^6 a + \ldots\right]$$

40. n pair; $(-1)^{\frac{n}{2}+1}\sin na = \sin a$

$$\left[n\cos a - \frac{n.n^2-4}{1.2.3}\cos^3 a + \frac{n.n^2-4.n^2-16}{1.2.3.4.5}\cos^5 a - \ldots\right]$$

n impair ; $(-1)^{\frac{n-1}{2}} \sin na = \sin a \left[1 - \frac{n^2-1}{1.2} \cos^2 a + \right.$

$$\left. + \frac{n^2-1.n^2-9}{1.2.3.4} \cos^4 a + \frac{n^2-1.n^2-9.n^2-25}{1.2.3.4.5.6} \cos^6 a - \ldots\ldots \right]$$

41. n pair ; $(-1)^{\frac{n}{2}} \cos na = 1 - \frac{n^2}{1.2} \cos^2 a +$

$$+ \frac{n^2.n^2-4}{1.2.3.4} \cos^4 a - \frac{n^2.\,n^2-4.\,n^2-16}{1\ldots.6} \cos^6 a + \ldots\ldots\ldots \Big]$$

n impair ; $(-1)^{\frac{n-1}{2}} \cos na = n \cos a -$

$$- \frac{n.n^2-1}{1.2.3} \cos^3 a + \frac{n.n^2-1.\,n^2-9}{1.2.3.4.5} \cos^5 a - \ldots\ldots\ldots\ldots \Big]$$

42. $\sin na = \sin a \left[(2\cos a)^{m-1} - (m-2)(2\cos a)^{m-3} + \right.$

$$\left. + \frac{m-4.m-3.(2\cos a)^{m-5}}{1.2} - \frac{(m-6)(m-5)(m-4)}{1\,2.3} (2\cos a)^{m-7} + . \right]$$

n pair ou impair.

43. $2 \cos na = (2\cos a)^n - n.(2\cos a)^{n-2} +$

$$+ \frac{n.n-3}{1.2} (2\cos a)^{n-4} - \frac{n.n-4.n-5}{1.2.3} (2\cos a)^{n-6} +$$

$+ \frac{n.n-5.n-6.n-7}{1.2.3.4} (2\cos a)^{n-8} -$ etc. ; n pair ou impair

44. n pair ; $(-1)^{\frac{n}{2}} 2^{n-1} \sin^n a = \cos na - n \cos (n-2)a +$

$$+ \frac{n.n-1}{1.2} \cos(n-4)a - \ldots. \pm \frac{1}{2} \frac{n.n-1\ldots..\frac{n}{2}+1}{1.2.3\ldots..\frac{n}{2}}.$$

n impair ; $(-1)^{\frac{n-1}{2}} 2^{n-1} \sin^n a = \sin na - n \sin (n-2)a +$

$$+ \frac{n.n-1}{1.2} \sin (n-4)\, a \ldots.. \pm \frac{n.n-1\ldots..\frac{n+3}{2} \sin a.}{1.2.3\ldots..\frac{n-1}{2}}.$$

45. n pair ; $2^{n-1}\cos^n a = \cos na + n.\cos(n-2)a +$

$$+ \frac{n.n-1}{1.2}\cos(n-4)a \ldots\ldots + \frac{1}{2}\,\frac{n.n-1\ldots\ldots\frac{n}{2}+1}{1.2.3\ldots\ldots\frac{n}{2}}.$$

n impair ; $(-1)^{\frac{n-1}{2}}\,2^{n-1}\cos^n a = \cos na + n.\cos(n-2)a +$

$$+ \frac{n.n-1}{1.2}\cos(n-4)a + \ldots\ldots \frac{n.n-1\ldots\ldots\frac{n+3}{2}}{1.2.3\ldots\ldots\frac{n-1}{2}}\cos a.$$

(*Suite.*)

LETTRE RELATIVE A UN AUTEUR ARABE.

Monsieur le rédacteur,

Dans l'annonce conçue en termes si bienveillants et partant si honorables pour moi, que vous avez insérée dans la livraison de février des Nouvelles Annales (page 112), une erreur s'est glissée.

Grâces à la façon peu lisible dont j'aurai écrit le nom de l'auteur arabe, vous avez lu *Boha-eddin*, que vous avez reconnu immédiatement appartenir au douzième siècle, au lieu de *Behâ-eddin* qui est du seizième.

Boha-eddin est connu des érudits et figure dans quelques biographies : il naquit à Mossoul l'an 1145, fonda un collége à Alep, et son plus beau titre de gloire est la vie de Saladin, publiée à Leyde en 1732, arabe et latin, in-f°.

Quant à celui qui fait le sujet de cette réclame, quoique le biographe arabe Nizam-eddin Ahmed, le savant indien Maulawi Roushen Ali, et l'orientaliste anglais Strachey de Calcutta, en aient fait mention, il est resté dans l'oubli, et nul compilateur de biographies n'a daigné lui ouvrir ses colonnes.

Daignez, Monsieur, etc.

ARISTIDE MARRE, soldat au 71e de ligne.

EXPRESSION

Des côtés d'un triangle et de sa surface en fonction des trois hauteurs.

PAR M. HUET,
licencié ès sciences mathématiques,
professeur de mathématiques au collége de Toulon.

Soient a, b, c les trois côtés du triangle; h, h', h'' les hauteurs correspondantes et s la surface.

On a les relations :

$$(1)\qquad h=\frac{1}{2a}\sqrt{(a+b+c)(a+c-b)\,(b+a-c)\,(b+c-a)},$$

$$(2)\qquad ah=bh',\qquad\qquad ah=ch''.$$

Des équations (2) on tire $b=\frac{ah}{h'}$, $c=\frac{ah}{h''}$.

Portons ces valeurs dans l'équation (1), il vient :

$$h=\frac{a}{2}\sqrt{\left(1+\frac{h}{h'}+\frac{h}{h''}\right)\left(1+\frac{h}{h''}-\frac{h}{h'}\right)\left(\frac{h}{h'}+1-\frac{h}{h''}\right)\left(\frac{h}{h'}+\frac{h}{h''}-1\right)}$$

d'où :

$$h=\frac{a}{2h'^2h''^2}\sqrt{(hh'+hh''+h'h'')(hh''+h'h''-hh')(h'h''+hh'-hh'')(hh'+hh''-h'h'')}$$

et par suite :

$$a=\frac{2hh'^2h''^2}{\sqrt{(hh'+hh''+h'h'')(hh''+h'h''-hh')(h'h''+hh'-hh'')(hh'+hh''-h'h'')}}$$

On trouverait de même :

$$b=\frac{2h^2h'h''^2}{\sqrt{(hh'+hh''+h'h'')(hh''+h'h'-hh')(h'h''+hh'-hh'')(hh'+hh''-h'h'')}}$$

et

$$c=\frac{2h^2h'^2h''}{\sqrt{(hh'+hh''+h'h'')(hh''+h'h''-hh')(h'h''+hh'-hh'')(hh'+hh'-h'h'')}}$$

On sait d'ailleurs que $S=\frac{ah}{2}$,

donc on a :

$$S=\frac{h^2h'^2h''^2}{\sqrt{(hh'+hh''+h'h'')(hh''+h'h''-hh')(h'h''+hh'-hh'')(hh'+hh''-h'h'')}}$$

ou, si l'on veut en posant $hh'+hh''+h'h''=p$

d'où. . . . . $hh''+h'h''-hh'=p-hh'$

$$h'h''+hh'-hh''=p-hh''$$

$$hh'+hh''-h'h''=p-h'h''$$

$$S=\frac{h^2h'^2h''^2}{\sqrt{p(p-hh')(p-hh'')(p-h'h'')}}.$$

(V. t. II, p. 546.)

NOTE

Sur la construction approximative du polygone régulier de 17 côtés.

PAR M. BERTON (DE CHAMP),
ingénieur des ponts et chaussées.

—

A l'extrémité A du rayon CA, élevez une perpendiculaire AO égale au quart de sa longueur; joignez le centre C à l'extrémité O de la perpendiculaire AO, et prolongez CO jusqu'en M, de manière que CM soit égal à $CO + AO$; enfin du point C comme centre et avec CM comme rayon, décrivez un arc qui rencontre en B le prolongement de CA; la ligne OB sera très-peu différente, en longueur, du côté du polygone régulier de 17 côtés inscrit dans la circonférence. On peut se proposer cette question que nous n'avons pas eu le temps de résoudre. ε étant l'erreur du compas sur les longueurs mesurées de l'échelle supposée d'ailleurs exacte, dans quelles limites d'ouverture de compas, la règle ci-dessus conduira-t-elle à la solution du problème?

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 111 (p. 112).

PAR M. TURQUAN,
professeur au collége royal de Pontivy.

Lorsqu'un corps pesant flottant est en équilibre dans un liquide, la distance du centre de gravité du corps au centre de gravité de la masse liquide déplacée, est un maximum ou un minimum.

Le corps flottant n'est soumis qu'à l'influence de deux forces, son propre poids appliqué à son centre de gravité, et la poussée du liquide appliquée au centre de gravité de la masse liquide déplacée.

Si donc X,Y,Z sont les composantes du poids du corps; xyz, les coordonnées de son centre de gravité; X_1, Y_1, Z_1 les composantes de la poussée du liquide, x_1, y_1, z_1, les coordonnées du centre de gravité de la masse liquide déplacée; on aura pour la condition d'équilibre :

$$X\delta x + Y\delta y + Z\delta z + X_1\delta x_1 + Y_1\delta y_1 + Z_1\delta z_1 = 0.$$

Mais d'autre part, il faut pour l'équilibre, 1° que le poids du corps et la poussée du liquide aient même intensité, et des directions opposées, d'où $X_1 = -X$, $Y_1 = -Y$, $Z_1 = -Z$; et 2° que ces deux forces agissent dans la direction de la distance r de leurs points d'application, donc

$$X = gM\frac{x - x_1}{r};\ Y = gM\frac{y - y_1}{r};\ Z = gM\frac{z - z_1}{r},$$

M désignant la masse du corps.

Ces conditions étant introduites dans l'équation précédente, on aura :

$$(x - x_1)(\delta x - \delta x_1) + (y - y_1)(\delta y - \delta y_1) + (z - z_1)(\delta z - \delta z_1) = 0$$

ce qui est la condition nécessaire, pour que la distance r soit un maximum ou un minimum.

REMARQUE

Sur les courbes algébriques rapportées à leur centre comme origine, ou à un axe de symétrie comme axe des abscisses.

PAR M. BILLELAUT (DE SAINT-MAURICE),
élève de l'institution Massin.

Quand on veut simplement prouver que toute équation d'un lieu rapportée à un axe de symétrie comme axe des x contenant des puissances impaires de l'ordonnée peut toujours être remplacée par une équation plus simple, qui donnera tous les points du même lieu, la démonstration suivante suffit.

Soit $F(x, y) = 0$ l'équation du lieu rapportée à un axe de symétrie comme axe des x dans laquelle l'ordonnée entre à différentes puissances paires et impaires.

Je dis que je puis trouver une équation de degré plus simple donnant tous les points du lieu.

Donc l'équation F $(x, y) = 0$ doit avoir un facteur étranger que nous ferons disparaître, c'est ce que nous verrons plus tard.

Représentons par P la somme des termes de degré pair en y

par I celle des termes de degré impair.

Soit donc

$$P + I = F(x, y), \text{ d'où } P + I = 0.$$

Si je change y en $-y$ cette équation admettra les mêmes solutions réelles pour y puisque le lieu est symétrique par rapport à l'axe des x.

Donc tous les points du lieu seront donnés par $P - I = 0$, mais chacune des deux équations $P = 0$; $I = 0$ donne toutes les solutions communes à $P + I = 0$ et à $P - I = 0$. Donc chacune d'elles donne tous les points du lieu F $(x, y) = 0$ et comme I contient y dans tous ses termes $\frac{I}{y} = 0$ sera au moins d'un degré inférieur à F $(x, y) = 0$ et représentera tous les points du lieu. Comme elle est plus simple, le théorème est démontré. Le raisonnement serait absolument le même pour les courbes rapportées à leur centre comme origine.

Mais ce raisonnement m'ayant paru incomplet, j'ai été conduit à la démonstration suivante qui est aussi simple.

En effet, ce qui précède prouve bien qu'une équation de degré plus simple peut donner tons les points du lieu; mais il ne prouve pas qu'il y en ait une qui puisse les donner tous, *et rien que ceux-là*, car tout porte à croire que $\frac{I}{y} = 0$ a encore des solutions étrangères; soit donc F $(x, y) = 0$. L'équation de ce lieu F $(x, -y) = 0$ doit admettre toutes les mêmes solutions. Comme ces solutions sont en nombre infini. $F(x, y) = 0$ et $F(x, -y) = 0$ doivent être identiques ou avoir un facteur commun. Si elles sont identiques $F(x, y) = 0$ ne contiendra que des puissances paires de y; si elles ne le sont pas, on a :

$$F(x, y) = \varphi(x, y)\,\psi(xy),$$
$$F(x, -y) = \varphi(x, y)\,\theta(xy),$$

alors $\psi(x, y) = 0$ et $\theta(x, y) = 0$ ne peuvent plus avoir qu'un nombre fini de solutions communes ; ces solutions représenteraient donc des points isolés qui ne pourraient avoir été introduits qu'artificiellement dans l'équation du lieu.

Ainsi $\varphi(x, y) = 0$ donne exclusivement tous les points du lieu.

En opérant sur $\varphi(xy) = 0$ comme sur $F(x\ y) = 0$ et ainsi de suite, on arriverait à une équation qui ne contiendrait plus que des puissances paires de y qui est l'équation demandée. Il serait plus simple d'opérer sur les polynomes P et $\frac{1}{y}$ cités plus haut, c'est-à-dire de prendre leur plus grand commun diviseur.

Le principe peut donc être énoncé ainsi :

Si une équation entre deux variables $F(x, y) = 0$ susceptible d'une infinité de solutions réelles est telle qu'à une même valeur réelle de x correspondent deux valeurs de y égales et de signes contraires, ou cette équation ne contiendra que des puissances paires de y ou elle sera décomposable en deux facteurs entiers dont l'un remplira cette condition, et l'autre ne donnera qu'un nombre infini de solutions nouvelles.

Il est bon de remarquer que s'il y avait eu des points isolés introduits artificiellement dans l'équation du lieu et qu'on voulût la remplacer par $\frac{1}{y} = 0$, on aurait le plus ordinairement, au lieu de ces points, une courbe étrangère au lieu qui passerait par ces points ; il faudrait donc pour s'assurer de n'avoir pas de solutions étrangères faire la recherche du plus grand commun diviseur indiquée plus haut ; d'ailleurs on peut dire que la présence de ces points isolés n'infirme pas la généralité du théorème, car l'équation la plus simple qui puisse donner par exemple deux points isolés placés symétriquement par rapport à l'axe des x est

$$[(x+\alpha)^2+(y+\beta)^2]\,[(x+\alpha)^2+(y-\beta)^2]\,;$$

elle remplit bien la condition de ne contenir que des puissances paires de y.

La même démonstration, les mêmes observations sont applicables au cas d'une courbe rapportée à son centre comme origine.

ANNONCES.

—

Éléments de géométrie et de trigonométrie, ouvrage exclusivement adopté par M. le ministre de la marine, pour les écoles royales d'hydrographie ; par C. E. Fournier, officier de la Légion d'honneur, examinateur de la marine. 3me édition, revue, corrigée et augmentée. Paris. Robiquet, rue Pavée-St.-André-des-Arts, 2, in-8 568 p., 9 pl. 1846.

On en rendra compte.

COSMOS. *Essai d'une description physique du monde*, par Alexandre de Humboldt ; traduit par H. Faye, un des astronomes de l'observatoire royal. Première partie. Paris, Gide et Cie, libraires, 1846, in-8°, 580 p.

Tout homme instruit voudra lire et acquérir cette excellente traduction dont M. Arago a revu et corrigé toutes les épreuves.

NOTE SUR LES AIRES ET LES VOLUMES.

A. *Aires planes.*

I. Un espace *fermé* a une *aire*; c'est-à-dire, contient un certain nombre de fois *l'unité d'aire*. Par exemple le mètre carré; l'aire d'un espace *ouvert* ne présente aucun sens, est un non-sens. Lors donc qu'une figure est ouverte, on conçoit une ligne droite qui joint ses deux points extrêmes, alors la figure est fermée, et l'on peut évaluer l'aire du segment.

II. Les espaces infinis ont les uns des aires *infinies*, et les autres des aires *finies*. Lorsqu'on peut fermer un espace infini; de manière à obtenir un segment dont l'aire soit plus grande qu'aucune aire donnée, alors on dit que cet espace infini a une aire infinie. Lorsque cette opération est impossible, on dit que l'espace infini a une *aire finie*, en prenant pour cette aire la dernière limite que le segment ne peut dépasser. Ainsi l'aire de la parabole indéfinie et celle de l'hyperbole indéfinie, *sont infinies*. Mais l'espace infini compris dans le folium de Descartes, entre les branches infinies et l'asymptote à une *aire finie*. (V. t. III, p. 302). On peut se rendre facilement raison de l'existence de ce genre d'espace. En effet, il y a des séries composées d'un nombre infini de termes, et dont la somme est *finie*, chacun de ces termes peut représenter une aire dont la somme a une limite finie. Dans les hyperboles d'un degré supérieur au second, l'espace asymptotique infini peut toujours se partager en deux espaces infinis, dont l'un a une aire infinie, et l'autre une aire finie.

III. Les espaces à aires infinies sont de deux genres, *hyperboliques* et *paraboliques*. Les premiers sont formés de branches qui vont sans cesse en s'écartant, en divergeant, de sorte que les tangentes aux points extrêmes de deux branches, font un angle qui n'est pas nul; un tel espace reste donc *ouvert*, même à l'infini; et le sens du mot *aire* n'est pas applicable; tandis que les espaces paraboliques sont formés de branches qui s'écartent de moins en moins, tendent au parallélisme, et les tangentes aux points extrêmes font un angle nul; un tel espace a une *tendance* à se fermer; et les aires infinies de tels espaces peuvent avoir entre elles un rapport *fini*.

Ainsi la comparaison des aires infinies des hyperboles du second degré ne présente aucun sens; mais les aires infinies des paraboles du même degré, lignes essentiellement semblables, sont entre elles comme les racines carrées des paramètres.

On trouve de même que les aires comprises entre l'hyperbole ordinaire et ses asymptotes sont entre elles comme les carrés des excentricités.

C'est ainsi que dans la géométrie élémentaire, les aires des angles rectilignes n'ont aucun sens; tandis que les aires des espaces compris entre deux droites parallèles sont entre elles comme les distances de ces parallèles; un raisonnement facile fait voir que l'attribution d'aires comparables aux angles rectilignes mène à des conséquences absurdes. En effet, soient trois droites AB, AC, AD, issues du même point A; et les points B, C, D étant supposés sur une même droite; les aires des triangles ABC, ACD sont entre elles comme les bases BC, CD; la droite BCD, s'éloignant du sommet et restant toujours parallèle à elle-même, les aires des triangles mentionnés vont sans cesse en croissant, mais le rapport de ces aires est constant; à l'infini les aires se confondent avec celles des angles BAC, CAD, si elles existent; donc ces aires angulaires seraient entre elles, comme BC à CD ; ce qui est absurde, puisque la droite BCD a été menée arbitrairement.

Quand donc il est question d'aires infinies des angles rectilignes, il faut toujours sous-entendre les aires *infinies* des secteurs circulaires à rayon infini qui répondent à ces angles, aires qui ont un rapport fini ; ce qui a d'ailleurs lieu pour l'espace triangulaire infini décrit par une ligne plane infinie quelconque, tournant dans son plan, autour d'un de ses points.

B. *Aires des surfaces courbes et volumes.*

IV. Ce qu'on a dit ci-dessus des aires planes est encore applicable, mot à mot, ici. Il ne saurait y avoir des espaces indéfinis à aire finie ; mais ces aires infinies peuvent avoir entre elles des rapports finis ; ainsi les aires infinies de deux cylindres droits sont entre elles comme les périmètres des bases ; mais on ne peut comparer les aires infinies de deux cônes droits.

Deux surfaces *indéfinies* asymptotiques l'une à l'autre peuvent renfermer un volume *fini*. On en a un exemple dans le folium de Descartes ; si les deux branches infinies avec leur asymptote se meuvent parallèlement suivant une direction perpendiculaire à leur plan, le volume indéfini compris entre le plan asymptotique et la surface est égal à l'aire du folium, quantité finie multipliée par le chemin parcouru ; si deux de ces surfaces courbes ainsi engendrées, ont même plan asymptotique, le volume indéfini compris entre les deux surfaces sera d'une grandeur finie.

V. Les angles solides polyédriques, les angles solides coniques prolongés indéfiniment n'ont de volumes comparables qu'en les supposant fermés par des surfaces sphériques, ayant leurs cercles au sommet de l'angle; alors ces volumes sont proportionnels aux aires de ces surfaces; aires infinies qui sont entre elles comme les aires finies des surfaces sphériques concentriques, ayant l'unité pour rayon. Ainsi les courbes cono-sphériques, tracées sur une sphère d'une unité de rayon interceptent des aires qui mesurent l'angle solide du cône qui a cette aire pour base et le centre de la sphère pour sommet.

Tm.

PROBLÈME D'OPTIQUE.

PAR M. MIQUEL (AUGUSTE).

Problème. Deux lumières dont les couleurs sont complémentaires et dont les intensités sont a et a' étant placées à des distances quelconques h et h' au-dessus d'un plan, on demande sur ce plan le lieu géométrique apparent de la lumière blanche.

Solution. L'intensité de la lumière apparente sur une surface plane étant en raison inverse du carré de la distance du point lumineux à l'élément infiniment petit que l'on considère sur la surface plane, et en raison directe du sinus de l'inclinaison du rayon lumineux sur cet élément; en appelant p un des points du lieu géométrique demandé, et en désignant par par B et B' les projections des points A et A' sur ce plan, on doit avoir :

$$\frac{a}{\overline{AP}^2}\sin APB = \frac{a'}{\overline{A'P}^2}\sin A'PB',$$

équation qui revient à $\dfrac{ah}{\overline{AP}^3} = \dfrac{a'h'}{\overline{A'P}^3}$. h, h' sont les distances respectives au plan des points A et A′ ; de cette égalité on déduit la proportion AP : A′P :: $\sqrt[3]{ah}$: $\sqrt[3]{a'h'}$. Par conséquent le problème se trouve ramené à trouver le lieu géométrique de tous les points du plan donné, dont les distances aux points A et A′ de l'espace sont entre elles dans un rapport donné. Le lieu demandé n'est donc autre chose que la circonférence de cercle, intersection du plan donné avec la surface sphérique qui est le lieu géométrique de tous les points de l'espace dont les distances aux points A et A′ sont dans le rapport de $\sqrt[3]{ah}$ à $\sqrt[3]{a'h'}$.

Cela posé, je rabats sur le plan donné, autour de la droite BB′, le trapèze BAA′B′ ; par les points A et A′, je mène deux parallèles, AM, A′M′, respectivement égales à $\sqrt[3]{ah}$ et $\sqrt[3]{a'h'}$, ou dans le même rapport ; je joins MM′, que je prolonge jusqu'à la rencontre de la droite indéfinie AA′ en un point D, qui, à cause de la similitude des triangles AMD, A′M′D, sera tel, que les distances aux points A et A′ seront entre elles dans le rapport de $\sqrt[3]{ah}$ à $\sqrt[3]{a'h'}$. Prenons encore sur la parallèle menée par le point A′ une distance AM″ égale à A′M′ et dirigée en sens inverse, et joignons MM″, l'intersection de cette droite MM″ avec la droite AA′ donnera un second point D′ dont les distances aux points A et A′ seront dans le même rapport que AD et A′D. Sur DD′ comme diamètre décrivons une circonférence de cercle. Soient G et G′ les points d'intersection de cette circonférence avec la droite indéfinie BB′; sur GG′ comme diamètre décrivons une seconde circonférence de cercle, qui sera le lieu géométrique demandé.

En effet, si nous relevons le plan AA′BB′ dans sa position verticale, la sphère décrite sur DD′, sphère qui, d'après la construction des points D et D′, est le lieu géométrique des points de l'espace dont les distances aux points A et A′ sont entre elles dans le rapport de $\sqrt[3]{ah}$ à $\sqrt[3]{a'h'}$, coupera évidemment la droite BB′ aux points G et G′; et comme son centre est situé sur une perpendiculaire au plan donné menée par un des points de BB′, son intersection avec le plan donné n'est autre chose que la circonférence décrite dans ce plan sur le diamètre GG′.

Il peut arriver que la sphère décrite sur DD′ comme diamètre ne fasse que toucher le plan donné, ou qu'elle ne le rencontre pas du tout. Par conséquent, le lieu géométrique demandé peut se réduire à un point, et devenir imaginaire.

Le problème précédent se construit évidemment avec la règle et le compas quand le rapport de $\sqrt[3]{ah}$ à $\sqrt[3]{a'h'}$ a été obtenu en lignes, ce qui peut toujours se faire d'une manière approximative (*).

Théorème. Lorsqu'on prend d'un même côté d'un centre C d'un cercle, sur un rayon suffisamment prolongé, deux points A et B tels que le rayon soit moyen proportionnel entre leurs distances au centre; le rapport des distances de chacun de ces points à un point quelconque de la circonférence est précisément égal à celui des racines carrées des distances de ces mêmes points A et B au centre du cercle.

Démonstration. Soit joint un point quelconque P de la circonférence aux points A et B et au centre C. Puisqu'on a par construction la proportion AC : PC :: PC : BC, les deux triangles ACP, BCP ayant un angle égal compris entre côtés proportionnels sont semblables, et la comparaison de leurs côtés homologues fournit les proportions :

$$AP : BP :: AC : PC,$$
$$AP : BP :: PC : BC.$$

(*) V. t. III. p. 115, note.

En les multipliant terme à terme on a :

$$\overline{AP}^2 : \overline{BP}^2 :: AC : BC\,;$$

et, par conséquent,

$$AP : BP :: \sqrt{AC} : \sqrt{BC}.$$

Corollaire. De là résulte cette proposition connue que le lieu géométrique de tous les points de l'espace dont les distances à deux points fixes sont entre elles dans un rapport constant est une sphère dont le rayon est moyen proportionnel entre les distances de ces mêmes points au centre de cette sphère. On peut la construire lorsque le rapport des carrés, tels que $\overline{AP}^2$ et $\overline{BP}^2$, est donné, en menant par les points A et A' deux parallèles, AB, A'B', qui soient entre elles dans le rapport donné ; en menant la droite BB' jusqu'à la rencontre de la droite indéfinie AA' en un point C, qui sera le centre de la sphère demandée. On obtiendra son rayon en faisant passer par les points A et A' une circonférence de cercle à laquelle il suffira de mener par le point C une tangente qui se termine au point du contact ; car cette tangente sera moyenne proportionnelle entre la sécante entière CA et sa partie extérieure CA.

Note. Ce problème revient à trouver sur le plan le lieu du point qui reçoit une égale quantité de lumière des points éclairants A et A' ; la solution et la construction sont analogues à celles que M. Gérono a données pour un problème du même genre (t. III, p. 115). Soit l la longueur AA' et α son inclinaison sur le plan ; faisons $n^3 = \dfrac{ah}{a'h'}$; si l'on a :

$$(h + h')(1 - n^2) - l \sin\alpha\,(1 + n^2) = 2nl,$$

le lieu se réduit à un point ; et si le premier membre surpasse le second, le problème est impossible. Si $a = a'$ et $h = h'$, le lieu est une droite. Tm.

CONSÉQUENCES

de la règle des signes de Descartes,

PAR M. GUILMIN,
Ancien élève de l'École normale.

—

Faisons d'abord quelques remarques sur les suites de signes :

1[re] *Remarque. Le nombre des variations qu'offre une suite de signes est* PAIR *ou* IMPAIR, *suivant que les deux signes extrêmes sont* SEMBLABLES *ou* DIFFÉRENTS.

Supposons pour fixer les idées que le 1[er] signe soit $+$; lorsqu'en lisant la suite, on compte *une* variation, le dernier signe qu'on a lu est $-$; quand on compte *deux* variations, on est parvenu à un signe $+$; quand on en compte *trois*, on vient de lire un signe $-$; et ainsi de suite, chaque fois que le nombre des variations comptées est pair, le dernier signe considéré est le signe primitif $+$; et chaque fois que ce nombre est impair, on en est au signe $-$; si donc la suite se termine à un signe $+$, le total des variations est un nombre pair ; si le signe extrême est $-$, ce nombre est impair (*).

2[e] *Remarque. Si entre deux signes d'une suite* DONNÉE *on intercale des signes arbitraires en nombre quelconque, le nombre des variations reste le même, ou augmente d'un nombre pair.*

Supposons qu'on intercale des signes entre deux signes

(*) V. t. II, p. 243. Lemme I. Tm.

semblables + et + par exemple ; ou bien le nombre des variations n'augmente pas ; c'est ce qui arrive quand on n'écrit que des signes + entre les deux signes considérés ; ou bien on introduit un nombre pair de variations ; en effet à la place de deux signes + + qui offrent une permanence, dans la suite générale, on écrit une suite partielle qui commençant à + pour finir à + ne peut offrir qu'un nombre pair de variations (1re Remarque).

Supposons maintenant qu'on intercale des signes entre deux signes contraires + et —, par exemple ; à cet endroit de la suite donnée, il y a une variation que l'on conserve simplement si les signes *intercalés* sont tous des signes +, ou tous des signes —. S'il en est autrement, à la place de deux signes + — offrant une variation, dans la suite générale, on écrit *une* suite partielle qui commençant à + pour finir à —, ne peut offrir qu'un nombre impair $2n+1$ de variations (1re Remarque). En déduisant la variation qui existait, on voit que le nombre des variations introduites est un nombre pair $2n$.

1. En considérant une équation $f(x)=0$ de degré m, nous désignerons par v le nombre des variations de son 1er membre $f(x)$, par P le nombre de ses permanences ; par v' le nombre des variations du polynôme $f(-x)$ obtenu en changeant x en $-x$ dans $f(x)$.

On sait que le nombre des racines imaginaires de $f(x)=0$ n'est pas moindre que $m-(v+v')$.

2. *Théorème. La somme* $v+v'$ *des nombres de variations de* $f(x)$ *et de* $f(-x)$, *n'est jamais plus grande que le degré* m *de* $f(x)$, *l'excès* $m-(v+v')$ *s'il existe, ne peut être qu'un nombre pair.*

Démonstration. Supposons d'abord que $f(x)$ soit un polynôme complet de ce degré m ; le nombre v de ses variations, plus le nombre P de ses permanences de signes égale m ;

mais dans un pareil polynôme, de deux exposants consécutifs, l'un étant pair, l'autre impair, le remplacement de x par $-x$, change les variations en permanences, et les permanences en variations ; de sorte que $v'=\mathrm{P}$; or $v+\mathrm{P}=m$, donc $v+v'=m$.

Supposons maintenant $f(x)$ incomplet ; imaginons qu'on le complète en mettant des termes quelconques de signes arbitraires à la place des termes manquants ; on obtient ainsi un polynôme $\mathrm{F}(x)$ offrant un certain nombre de variations que nous désignerons par V ; concevons qu'on change x en $-x$ dans $\mathrm{F}(x)$, on obtient un polynôme $\mathrm{F}(-x)$ qui peut-être regardé comme le polynôme $f(-x)$ complété d'une certaine manière, par les termes intercalés dans $f(x)$, dans chacun desquels on aurait remplacé x par $(-x)$; soit V' le nombre des variations de $\mathrm{F}(-x)$. Puisque $\mathrm{F}(x)$ et $\mathrm{F}(-x)$ sont des polynômes complets du degré m, d'après la 1re partie de notre démonstration, $\mathrm{V}+\mathrm{V}'=m$. Mais V n'est pas moindre que v, V' n'est pas moindre que v' (2e Remarque). Donc $\mathrm{V}+\mathrm{V}'$ ou m, n'est pas moindre que $v+v'$. On voit donc que $v+v'$ n'est jamais plus grand que m ; de plus l'excès $m-(v+v')=\mathrm{V}+\mathrm{V}'-v-v'=(\mathrm{V}-v)+(\mathrm{V}'-v')$, est toujours un nombre pair. En effet les nombres de variations intercalées $\mathrm{V}-v$, $\mathrm{V}'-v'$ ne peuvent être que des nombres pairs, d'après notre 2e Remarque (*).

3. Le Théorème de Descartes est fondé sur ce lemme.

Si on multiplie un polynôme entier $f(x)$, par un binôme $x-a$, (a étant positif), le produit $f(x)(x-a)$ offre, au moins, une variation de plus que le multiplicande $f(x)$.

On peut ajouter que l'*excès du nombre des variations de* f(x) (x — a) *sur le nombre des variations de* f(x), *est*

(*) V. l'équation (8), t. II, p. 250. Tm.

toujours un nombre impair $2k+1$, *quand il est supérieur à* 1.

Il suffit d'observer que le dernier terme de $f(x)$, et le dernier terme du produit $f(x)(x-a)$ ont des signes contraires.

Si donc, par exemple, le 1^er^ terme de $f(x)$ est positif, et son dernier négatif, le 1^er^ terme du produit sera positif, et le dernier positif.

De $+$ à $-$, le nombre des variations de $f(x)$ est impair; de $+$ à $+$, le nombre des variations du produit est pair; l'excès du deuxième nombre sur le premier est un nombre impair (*).

4. *Si la multiplication de* $f(x)$ *par* $(x-a)$ *introduit plus d'une variation*, $2k+1$, *par exemple, l'équation* $f(x)=0$ *a au moins* $2k$ *racines imaginaires.*

Pour le démontrer, considérons à la fois les équations :

$$(1) \quad f(x)=0, \qquad (2) \quad f(x)(x-a)=0.$$

L'équation (2) a les mêmes racines que l'équation (1), plus la racine positive a.

Nommons w le nombre des variations de $f(x)(x-a)$; $w=v+2k+1$.

Appelons w' le nombre des variations du polynôme $f(-x)(-x-a)$, que l'on obtient en changeant x en $-x$ dans $f(x)(x-a)$.

Le nombre des racines positives de l'équation (1) ne pouvant dépasser v, le nombre des racines positives de l'équation (2) ne peut dépasser $v+1$; le nombre des racines négatives, de cette même équation (2), ne peut dépasser w'; le maximum du nombre des racines réelles de l'équation (2) est donc $v+1+w'$. Et le minimum du nombre de ses racines ima-

(*) Voir *Corollaire*, t. II, p. 249. Tm.

ginaires est $m-(v+1+w')$. Mais, d'après une démonstration précédente la somme $w+w'$ ne peut dépasser le degré $m+1$ de $f(x)(x-a)$; on a au moins $m+1$ égal à $w+w'$ ou à $v+2k+1+w'$; le nombre des racines imaginaires de l'équation (2), qui n'est pas moindre que $m-(v+1+w')$ est donc au moins égal à $2k$.

Mais ce nombres des racines imaginaires de $f(x)(x-a)=0$ est le même que celui des racines imaginaires de l'équation $f(x)=0$. La proposition est donc démontrée (*).

5. *L'excès du nombre des variations du* 1[er] *membre d'une équation* $f(x)=0$, *sur le nombre de ses racines positives*, *est* 0 *ou un nombre pair.*

Nous considérerons deux cas : 1° Le premier terme de $f(x)$ étant positif, le dernier terme peut être *positif* ou *négatif.*

1[er] *Cas.* Le nombre des racines positives de l'équation est alors pair ; de + à +, le nombre des variations de $f(x)$ est aussi pair ; la différence de ces deux nombres est 0 ou un nombre pair.

2[e] *Cas.* Le nombre des racines positives est alors impair ; de + à —, le nombre des variations de $f(x)$ est impair ; la différence entre ces deux nombres impairs est 0 ou un nombre pair. Voir Lemme 3, t. II, page 249.

6. *Lorsque toutes les racines d'une équation* $f(x)=0$ *sont réelles, le nombre* p *de ses racines positives est égal au nombre* v *des variations de* $f(x)$, *et le nombre* n *de ses racines négatives est égal au nombre* v' *des variations de* $f(-x)$.

Nous avons $p+n=m$, et $v+v'$ pas plus grand que m. (m étant le degré de $f(x)$). Mais v n'est pas moindre que p, v' n'est pas moindre que n ; par suite $v+v'$ n'est pas moindre que $p+n$ ou m; donc $v+v'=m$, d'où $v+v'=p+n$. Il résulte de là

(*) La démonstration de ce théorème de M. Sturm, donnée p. 116, est plus complète et me semble plus courte. Tm.

que p qui n'est jamais plus grand que v, ne peut dans ce cas particulier être moindre que v, sans quoi n serait plus grand que v', ce qui est impossible. Donc $p=v$, et par suite $n=v'$.

Si l'équation $f(x)=0$ est complète et a toutes les racines réelles, le nombre de ses racines négatives est égal au nombre P des permanences de son premier membre; car ce nombre P est alors égal au nombre v' des variations de $f(x)$.

Corollaire du théorème 4. En faisant $a=1$, on arrive facilement à cette conséquence : Retranchez chaque coefficient de $f(x)$ du coefficient de la puissance de x immédiatement inférieure, écrivez seulement le signe du reste, en tête de cette suite de signes, mettez le signe $+$ du 1er terme de $f(x)$; si la suite de signes ainsi obtenue, offre $2k+1$ variations de plus que $f(x)$, l'équation $f(x)=0$ a au moins $2k$ racines imaginaires.

(*La suite prochainement.*)

DIVISION ABRÉGÉE,

PAR M. A. CROSSON,
Professeur au collége de Bourges.

—

1° *Théorème.* Lorsque le nombre des chiffres du diviseur est *égal* au nombre des chiffres du quotient plus un, si on prend le dividende et le diviseur à moins d'une demi-unité près, l'erreur commise au quotient est moindre que $\frac{1}{2c}+\frac{1}{2c.10^pc}$, désignant le premier chiffre à gauche du diviseur et p le nombre des chiffres du quotient.

Démonstration. Soit a le dividende, et b le diviseur donnés; le dividende que l'on prendra sera le nombre entier compris entre les limites $a+\frac{1}{2}$ et $a-\frac{1}{2}$; on prendra de même pour diviseur le nombre entier compris entre $b+\frac{1}{2}$ et $b-\frac{1}{2}$, de sorte que le quotient que l'on calculera pourra se représenter par $\dfrac{a\pm\frac{1}{2}}{b\mp\frac{1}{2}}$, en se réservant de choisir les signes de manière à rendre l'erreur aussi grande que possible; $\dfrac{a}{b}-\dfrac{a\pm\frac{1}{2}}{b\mp\frac{1}{2}}$ sera la limite de l'erreur commise sur le quotient demandé. Cette quantité peut se mettre sous la forme $\pm\frac{1}{2}\dfrac{a+b}{b\left(b\mp\frac{1}{2}\right)}$, ou bien en désignant le quotient exact par q, $\pm\frac{1}{2}\dfrac{q+1}{b\mp\frac{1}{2}}$ (Cirodde, *Arithm.*). — Cela posé, soit p le nombre des chiffres de la partie entière du quotient, n le nombre des chiffres de la partie entière du diviseur, et c le premier chiffre à gauche de ce diviseur ; q sera toujours moindre que 10^p, mais d'une fraction qui pourra être très-voisine de l'unité ; donc $q+1$ sera moindre que 10^p+1 ; $b\mp\frac{1}{2}$ renferme la partie entière de b, ou, si la partie fractionnaire est plus grande que $\frac{1}{2}$, cette partie entière augmentée d'une unité ; donc $b\mp\frac{1}{2}$ ne sera pas moindre que $c\times10^{n-1}$, de sorte que l'erreur sera plus petite que

$$\frac{1}{2}\,\frac{10^p+1}{c\times10^{n-1}}=\frac{1}{2}\left[\frac{10^p}{c.10^{n-1}}+\frac{1}{c.10^{n-1}}\right].$$

Si $p = n - 1$, cette limite devient $\frac{1}{2c} + \frac{1}{2c.10^p}$, C. Q. F. D.

2° Prenons maintenant deux nombres quelconques, que je supposerai d'abord entiers; — on propose de diviser 5834573981213485341 par 9345841293789; on voit aisément que le quotient a 6 chiffres; le nombre des chiffres du diviseur *surpasse* le nombre des chiffres du quotient plus un; nous ramènerons facilement la question à ce dernier cas, en séparant au dividende et au diviseur 6 chiffres décimaux; et nous aurons le quotient demandé en divisant

5834573981213,485341 par 9345841,293789.

Prenons le dividende et le diviseur à moins d'une demi-unité près, et d'après le théorème précédent, en divisant

5834573981213 par 9345841,

l'erreur commise sur le quotient demandé sera moindre que $\frac{1}{2.9} + \frac{1}{2.9.10^6}$. En effectuant, on trouve 6 pour premier chiffre du quotient, et pour reste, 227069381213. Pour continuer l'opération, il faudrait diviser ce reste par le diviseur 9345841; mais ici le quotient n'a plus que 5 chiffres; donc, d'après le même principe que précédemment, nous pourrons, à ce quotient, ou ce qui est la même chose, au quotient de 22706938121,3 par 934584,1, substituer le quotient de 22706938121 par 934584, et l'erreur commise sur ce quotient sera moindre que $\frac{1}{2.9} + \frac{1}{2.9.10^5}$. Admettant que les erreurs soient dans le même sens, l'erreur totale commise sur le quotient demandé sera donc moindre que

$$2 \cdot \frac{1}{2.9} + \frac{1}{2.9}\left(\frac{1}{10^6} + \frac{1}{10^5}\right).$$

Je trouverai donc encore un chiffre de ce nouveau quotient, et je serai ramené à diviser 3015258121 par 934584. — En raisonnant comme précédemment, on supprimera ce dernier chiffre du diviseur et le dernier chiffre du dividende; en substituant à ce dernier quotient celui de 301525812 par 93458, nous ne commettrons sur ce quotient qu'une erreur moindre que $\frac{1}{2.9}+\frac{1}{2.9.10^4}$, et admettant que cette erreur soit encore dans le même sens que les premières, l'erreur totale commise sur le quotient demandé sera donc moindre que

$$3.\frac{1}{2.9}+\frac{1}{2.9}\left(\frac{1}{10^6}+\frac{1}{10^5}+\frac{1}{10^4}\right).$$

Continuons de la même manière jusqu'au dernier chiffre, et l'erreur totale ne s'élèvera pas à

$$6.\frac{1}{2.9}+\frac{1}{2.9}\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+-+\frac{1}{10^6}\right)+\frac{1}{2},$$

car le dernier quotient ne pouvant être pris qu'à une demi-unité près, cette erreur peut encore s'accumuler avec les erreurs précédentes. — Si on observe que

$$\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+-+\frac{1}{10^6}$$

sera dans tous les cas moindre que la somme des termes de la progression géométrique décroissante à l'infini $\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\ldots$; cette valeur sera toujours moindre que $\frac{1}{9}$, de sorte que la limite de l'erreur sera $6.\frac{1}{2.9}+\frac{1}{2.9}.\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$. Remarquons de plus que barrer successivement 5 chiffres dans les restes-dividendes, revient à les barrer immédiatement au dividende donné. De la marche précédente, nous déduirons cette règle :

Quand on a un dividende et un diviseur entiers, présentant un très-grand nombre de chiffres, si on ne prend au diviseur qu'un chiffre de plus qu'il n'y a au quotient, et au dividende que ce qu'il en faut pour contenir cette portion du diviseur; qu'on divise ensuite par ce dernier nombre, puis le reste par ce dernier nombre, dont on a barré le dernier chiffre à droite, puis encore le nouveau reste par le diviseur, dont on a encore barré le dernier chiffre à droite, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on n'ait plus que deux chiffres au diviseur. L'erreur totale commise sur le quotient sera moindre que l'unité divisée par le double du premier chiffre à gauche du diviseur, prise autant de fois qu'il y a de chiffres au quotient, plus le neuvième de cette même fraction, plus une demi-unité, en ayant soin toutefois de prendre le dernier quotient à moins d'une demi-unité près. Il est bien entendu qu'il faudra toujours prendre soit le dividende, soit chacun des diviseurs partiels, à moins d'une demi-unité près de l'ordre auquel on s'arrête.

Les divisions de nombres décimaux se ramenant toujours à des divisions de nombres entiers, on pourra toujours appliquer ce dernier théorème. Voici donc ce qu'il faudra faire dans la pratique : on cherchera d'abord le nombre des chiffres du quotient, ce qui se fera en reculant la virgule vers la droite au diviseur, jusqu'à ce qu'on arrive à le rendre plus grand que le dividende, et comptant le nombre de rangs qu'on a fait parcourir à la virgule; on calculera la limite de l'erreur que donnera la division abrégée au moyen de la formule précédente; si cette erreur est moindre que 1, on peut opérer immédiatement; si elle surpasse une unité, alors on calculera un chiffre de plus au quotient, en rendant le dividende 10 fois plus grand et appliquant la même méthode; si elle surpasse 10 unités, ou calculera encore un chiffre de plus, et ainsi de suite.

3° Veut-on, par exemple, trouver, à moins de $0^{m},001$, le diamètre d'une circonférence dont la longueur est $85^{m},45382913$; on sait qu'il faut diviser $85,45382913$ par le nombre $\pi = 3,1415926535...$ Il y a deux chiffres à la partie entière du quotient, et comme on demande des millimètres, il y a donc 5 chiffres au quotient. La limite est donc $5 \times \frac{1}{6} + \frac{1}{54} + \frac{1}{2}$, ce qui est moindre que $\frac{3}{2}$. Ainsi, en divisant, d'après notre méthode, $8545382,913$ par $314159,26...$ on aurait le quotient demandé à moins de $\frac{3}{2}$ millimètres près en plus ou en moins. Il faudra donc calculer un chiffre de plus pour avoir l'approximation exigée, c'est-à-dire qu'il faudra diviser ici $85453829,13$ par $3141592,6...$ Et l'erreur n'atteindra pas deux unités du dernier ordre ; on supprimera alors le dernier chiffre, et on aura l'approximation demandée. Voici le tableau des calculs :

$$\begin{array}{r|l}
 & \qquad \cancel{2}\cancel{6}\ \ \cancel{3} \\
85{,}45383 & 3{,}1\cancel{4}\cancel{1}\cancel{5}\cancel{9}\cancel{2}\cancel{6}\cancel{5}\cancel{3}\cancel{5} \\ \cline{2-2}
22\,62197 & 272008 \\
63084 & \\
252 & \\
4 &
\end{array}$$

Le quotient est donc compris entre $27^{m},2006$ et $27^{m},2010$, sans pouvoir atteindre ni l'une ni l'autre limite ; donc il sera $27^{m},201$. L'erreur est en plus et moindre qu'un demi-millimètre.

Si le diviseur contenait moins de chiffres que le quotient, on ferait la division régulière jusqu'à ce qu'il ne restât plus à trouver au quotient qu'un nombre de chiffres égal au nombre des chiffres du diviseur moins un ou moins deux, selon les cas, et ce serait à cette dernière portion du quotient que l'on appliquerait notre méthode d'approximation.

SUR LA DIVISION,

les extractions des racines carrées et cubiques, abrégées,

PAR M. FINCK,

docteur ès sciences, professeur à l'École d'artillerie et au collége royal de Strasbourg.

« Il serait à désirer qu'on eût une théorie analytique de toutes les approximations (abréviations?) usitées en arithmétique, surtout pour celles de Fourier et de M. Guy. »

Cette note, que je copie, page 131, des *Annales*, est au moins, quant à la dernière partie, le produit d'un *lapsus memoriæ*; car je vous ai donné une théorie analytique de la division abrégée, avec une règle plus simple et plus complète que celle de M. Guy (t. IV, p. 348 et 658), et je l'ai démontrée analytiquement. Quant à la méthode de Fourier, je l'ai discutée dans mon Arithmétique, page 106 (2ᵉ édit.). Or il n'est même pas besoin d'une seconde démonstration, car avec un peu d'attention on reconnaît que la méthode de Fourier et la méthode ancienne ne diffèrent que par l'ordre dans lequel on y retranche les produits partiels, de sorte que la même règle leur est applicable, et cette règle, la voici :

Décomposez le diviseur en deux branches, de façon que celle de gauche soit la plus petite possible, tout en ne surpassant pas la somme des chiffres de celle de droite; tous ces chiffres de droite pourront être successivement négligés dans les deux méthodes : la partie de gauche formera le *diviseur désigné* de Fourier, et le dernier diviseur de l'autre méthode; le quotient obtenu sera exact à une unité près; mais on ne sait s'il est approché en plus ou en moins. En cherchant un chiffre de plus (avec les précautions convenables prises dès le commencement), on lèvera presque toujours le doute.

Puisque nous en sommes sur ce chapitre, je vais aussi compléter la méthode abrégée pour la recherche des racines carrées et cubiques. Pour la racine carrée, si la première tranche est au moins 25, on peut déterminer par la division *autant* de chiffres qu'on en a déjà obtenus (*), sinon un de moins. Donc, on cherchera, selon le cas, les deux ou les trois premiers chiffres par le procédé ordinaire; puis on en déterminera deux nouveaux par la division. Du reste de la division on retranche le carré du quotient, et on détermine quatre nouveaux chiffres par la division, puis huit nouveaux chiffres.

Racine cubique. Aussitôt qu'on a trouvé $n+1$ chiffres, on peut en trouver n par la division. Cet énoncé contrarie la règle ordinaire, mais il est vrai.

Soit a la partie trouvée à la racine, x la partie inconnue, x étant $< 10^n$, mais ayant n chiffres, la racine est $10^n.a+x$, son cube $10^{3n}a^3 +$, etc., et le reste, après que a est trouvé,

$$R = 3.10^{2n}a^{2n}x + 3\,10^n.a^n a^n x^2 + x^3,$$

d'où

$$x = \frac{R}{3.10^{2n}.a^{2n}} - \text{etc.},$$

soit q le quotient, r le reste de la division de R par $3\,10^{2n}a^{2n}$, il vient :

$$x = q + \frac{r - 3.10^n.a^n.x^2 - x^3}{3.10^{2n}.a^{2n}},$$

et pour que q soit la valeur de x à une unité près, il suffit que

$$3.10^{2n}.a^{2n} > 3.10^n.a^n x^2 + x^3,$$

(*) Ceci est assez facile à prouver pour que je ne m'y arrête pas.

ou que $$a^{2n} - a^n \cdot \frac{x^2}{10^n} - \frac{x^3}{3.10^{2n}} > 0,$$

et comme dans ce trinôme relatif à a les racines sont réelles, il suffit que a soit $>$ la plus grande racine, laquelle est

$$\frac{1}{2}\frac{x^2}{10^n} + \frac{1}{10^n}\sqrt{\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3}};$$

le radical est

$$< \sqrt{\frac{x^4 + x^3}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{9}} = \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{3}\right);$$

donc il suffit que

$$a \geqq \frac{1}{10^n}\left[\frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{3}\right] = \frac{1}{10^n}\left[x^2 + \frac{x}{3}\right],$$

et comme $x < 10^n$, il suffit que

$$a \geqq \frac{1}{10^n}\left[10^{2n} + \frac{10^n}{3}\right] = 10^n + \frac{1}{3}.$$

Si donc on obtient à la racine 100....., on continuera jusqu'à ce qu'on trouve un chiffre significatif; il n'y a aucun motif pour abréger cette partie de l'opération; sinon, après avoir trouvé 3 chiffres, on détermine les 2 suivants par la division; on retranche ce qu'il faut, et on détermine les 6 suivants par la division, etc.

Quant au sens du quotient q, il est clair que

q sera $> x$, si $3.10^{2n}a^{2n}q + 3.10^n a^n q^2 + q^3 > r$,
$q \quad < x$, si id. $< r$,
$q \quad = x$, si id $= r$.

Note. J'attache trop d'importance aux travaux de mon savant collègue pour avoir oublié qu'en 1845 il a enrichi les *Nouvelles Annales* d'une méthode abrégée de division, fondée sur des considérations analytiques; mais je n'ai pas oublié non plus que cette méthode *n'est pas* celle de M. Guys :

il est donc toujours à désirer qu'on donne une base analytique à cette dernière méthode ainsi qu'aux extractions de racines abrégées en général. (*V.* t. IV, p. 561.) Tm.

SOLUTION DU PROBLÈME 114 (p. 167),

PAR M. GUSTAVE GUFFLET,
Elève de l'institution Barbet.

—

Dans un triangle dont la base est donnée de grandeur et de position, et dont la différence des deux autres côtés divisée par la médiane intermédiaire est égale à $\sqrt{2}$, le sommet mobile décrit une lemniscate de Bernoulli, qui est aussi une cassinoïde.

Soit $AB = 2d$ (*fig.* 29) la longueur donnée, C le milieu de AB, et AMB un des triangles. On a d'abord, d'après l'énoncé :

$$AM - BM = MC\sqrt{2};$$

mais on a en outre la relation :

$$\overline{AM}^2 + \overline{MB}^2 = 2\overline{MC}^2 + 2d^2.$$

Élevant au carré la première, et ajoutant à chaque membre de la deuxième la quantité 2AM.MB, on a :

$$(AM - BM)^2 = 2\overline{MC}^2.$$

$$(AM + BM)^2 = 2\overline{MC}^2 + 2d^2 + 2AM.MB.$$

Retranchant membre à membre, on a enfin :

$$AM.MB = d^2.$$

Ce qui montre que le produit des distances d'un point quelconque du lieu aux deux points fixes A et B est une quantité constante, propriété qui caractérise la cassinoïde ou sections toriques (Comte, *Géométrie analytique*, p. 69); de plus, la quantité constante étant égale à d^2, la courbe aura une forme lemniscoïde (*).

On peut d'ailleurs se proposer de déterminer directement le lieu des sommets de tous les triangles; prenant pour pôle le point C, pour axe polaire la ligne AB, on aura les relations :

$$AM = \sqrt{\rho^2 + d^2 + 2d\rho \cos \omega},$$
$$MB = \sqrt{\rho^2 + d^2 - 2d\rho \cos \omega};$$

d'où

$$\sqrt{d^2 + \rho^2 + 2d\rho \cos \omega} - \sqrt{d^2 + \rho^2 - 2d\rho \cos \omega} = \rho\sqrt{2},$$

d'où on tire, toute réduction faite :

$$\rho = \pm d \sqrt{2 \cos 2\omega},$$

équation de la lemniscate de Bernoulli.

Pour $\omega = 0$, j'ai $\rho = \pm d\sqrt{2}$. J'obtiens ainsi les deux points D, D', en admettant les valeurs négatives; ω croissant de 0 à 45°. La valeur de ρ va en diminuant depuis $d\sqrt{2}$ jusqu'à 0. J'obtiens ainsi les deux axes, CD, CD'. Cherchons le point le plus éloigné de l'axe polaire; soit M ce point, on a :

$$MP = \rho \sin \omega = d\sqrt{2 \sin^2 \omega \cos 2\omega}$$
$$= d\sqrt{(1 - \cos 2\omega) \cos 2\omega}.$$

Pour que cette expression soit maximum, il faut que l'on ait : $\cos 2\omega = 1 - \cos 2\omega$,

---

(*) Le plan touchant intérieurement le tore, et parallèlement à son axe, coupe le tore suivant une cassinoïde; les autres plans parallèles à l'axe ne donnent pas des sections cassinoïdes; ce qui est évident pour un plan méridien. Les sections deviennent deux cercles, dont le système n'est pas une cassinoïde. Tm.

d'ou $$\cos 2\omega = \frac{1}{2}.$$

Et cette valeur maximum est égale à $\frac{1}{2}$ d.

On verrait facilement que la valeur de ρ, qui correspond à cette valeur de 2ω est $\rho = d$; j'obtiendrai donc ainsi les points maximum.

Pour toutes les valeurs de ω comprises entre 45 et 135°, ρ est imaginaire pour les valeurs comprises entre 135 et 180. J'obtiens les deux arcs CM'D', CM''D. Cette discussion suffit pour montrer que la courbe est bien une lemniscate.

Note. M. Drot nous a adressé depuis une solution de la même question, en ne faisant usage que de coordonnées rectangulaires.

SECONDE SOLUTION DU PROBLÈME 107 (V. p. 187),

PAR M. HENRY DORMOY,
élève en spéciales.

—

Soient O et O' (*fig.* 33) les deux sphères.

On sait trouver les deux rayons R, R', et les extrémités A, B, A', B' d'un diamètre sur chacune des surfaces sphériques; je mesure les droites AA', AB', BA', BB'; je trace alors sur le papier le triangle ABB' dont je connais les trois côtés, et la médiane B'O se trouve ainsi déterminée; de même j'ai l'autre médiane A'O; donc le triangle A'B'O est connu par ses trois côtés, et la médiane OO' est la distance demandée.

Observations. Connaissant les six arêtes d'un tétraèdre, on peut construire géométriquement le rayon de la sphère circonscrite : prenant quatre points sur la surface sphérique, leurs distances mutuelles sont les six arêtes connues d'un tétraèdre. On en déduit le rayon de la sphère, mais on abrége la construction en prenant trois arêtes égales (V. Lionnet, *Géométrie*, liv. III, prob. 1).

Note. Un élève qui signe C. S. de l'institution Barbet, résout le même problème en faisant usage d'un point situé hors des deux sphères; ce qui amène une construction moins simple que la précédente. Tm.

SOLUTION DU PROBLÈME 112 (p. 333),

PAR M. DROT,
admissible à l'École normale.

Problème 112. Soient M un point pris sur une courbe plane, et N un point sur la tangente en M à la courbe; par N menons une sécante sous un angle donné; et soit P un des points d'intersection avec la courbe; prenons sur la sécante un point Q sur le prolongement de NP, tel que l'on ait $NQ = \frac{\overline{MN}^2}{NP}$; quel est le lieu du point Q, N se mouvant sur la tangente? et déterminer la position du point Q lorsque N se confond avec M?

Solution. Soit $f(x,y) = 0$ la courbe plane donnée, et de degré m, que je supposerai rapportée au point M comme origine, l'axe des x étant la tangente donnée, et l'axe des y étant parallèle à la direction constante de la sécante NPQ. De cette façon, l'équation $f(x,y) = 0$ ne contiendra ni terme tout connu, ni terme du premier degré en x seul, puisque la courbe passe par l'origine, et que, pour $y=0$, son équation doit donner pour x deux valeurs égales à 0.

Actuellement si j'appelle x' et y' les coordonnées du point Q, on doit avoir $x'^2 = \text{NP}\,.\,y'$; NP sera donné par les valeurs de y de $f(x,y)=0$ quand on aura remplacé dans cette équation x par x'; mais ces valeurs de y étant, d'après l'énoncé, égales à $\frac{x'^2}{y'}$, il est évident que l'équation cherchée sera $f\left(x', \frac{x'^2}{y'}\right)=0$, ou, en supprimant les accents $f\left(x, \frac{x^2}{y}\right)=0$, ce qui revient en dernière analyse, à remplacer dans l'équation proposée y par $\frac{x^2}{y}$. Les termes en x seul de cette opération étant au moins du deuxième degré, elle pourra être divisée par x^2, et sera du degré $2m-2$, et en faisant ensuite $x=0$, on obtiendra le point Q dans la position limite où il sera lorsque le point N se confond avec le point M; et MQ est alors le rayon de courbure lorsque les axes sont rectangulaires.

Appliquons ce qui vient d'être dit à l'équation du deuxième degré : $Ay^2+Byx+Cx^2+Dy=0$. Si l'on y remplace y par $\frac{x^2}{y}$, que l'on divise par x^2, et que l'on chasse les dénominateurs, il vient $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dy=0$, équation d'une courbe de même espèce que la première, et tangente à l'axe des x au point M. Pour le cercle, où $C=A$, on retrouve le même cercle, ce qui est conforme à un théorème de géométrie. Quand le point N se confond avec le point M, il faut faire $x=0$ dans l'équation cherchée, ce qui donne $y=-\frac{D}{C}$, rayon de courbure lorsque les axes sont rectangulaires.

Note. C'est cette méthode, due à Maclaurin, dont M. Dupin s'est servi dans ses *développements de géométrie* pour construire les rayons de courbures des coniques, et on sait le beau parti que l'excellent géomètre a tiré de cette méthode. Tm.

SOLUTION DU PROBLÈME 104 (t. IV, p. 560).

PAR M. DROUETS,
Elève au Collége royal militaire.

—

Soit A la ligne totale; a_1, a_2, a_3,.... a_n les segments; S, V la surface et le volume du polyèdre donné; s_1, v_1; s_2, v_2, etc., les valeurs analogues pour les polyèdres segmentaires : on aura, d'après la similitude,

$$\frac{s_1}{S}=\frac{a_1^2}{A^2} \text{ ou } \frac{\sqrt{s_1}}{\sqrt{S}}=\frac{a_1}{A},\ \frac{\sqrt{s_2}}{\sqrt{S}}=\frac{a_2}{A} \text{ etc.};$$

donc

$$\frac{\sqrt{s_1}+\sqrt{s_2}+\sqrt{s_3}+\quad+\sqrt{s_n}}{\sqrt{S}}=\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{A}=1;$$

donc

$$S=(\sqrt{s_1}+\sqrt{s_2}+\quad+\sqrt{s_n})^2,$$

$$\frac{v_1}{V}=\frac{a_1^3}{A^3}, \text{ ou } \frac{\sqrt[3]{v_1}}{\sqrt[3]{V}}=\frac{a_1}{A},\ \frac{\sqrt[3]{v_2}}{\sqrt[3]{V}}=\frac{a_2}{A}, \text{ etc.};$$

donc

$$\frac{\sqrt[3]{v_1}+\sqrt[3]{v_2}+\sqrt[3]{v_3}+\quad+\sqrt[3]{v_n}}{\sqrt[3]{V}}=\frac{a_1+a_2+\quad+a_n}{A}=1,$$

$$V=[\sqrt[3]{v_1}+\sqrt[3]{v_2}+\sqrt[3]{v_3}+\quad+\sqrt{v_n}]^3 \quad \text{C. Q. F. D.}$$

Dans cette dernière question, il me semble que l'énoncé n'est pas complet; on ne spécifie pas que les polyèdres segmentaires soient semblables au polyèdre donné ; et cependant on met la condition que les segments soient homologues à la droite tout entière. J'ai cru la similitude supposée, et le théorème se trouve vrai.

NOTE SUR L'EXPRESSION $\frac{\infty}{\infty}$.

Un élève en élémentaires du collége de Marseille fait l'objection suivante : la bissectrice *extérieure* de l'angle d'un triangle divise le côté opposé en deux segments *soustractifs* respectivement proportionnels aux côtés adjacents ; or, lorsque le triangle devient isocèle, ces deux segments deviennent infinis et les deux côtés adjacents sont égaux ; on a donc $\frac{\infty}{\infty}=1$, et cependant $\frac{\infty}{\infty}=\frac{0}{0}$ quantité indéterminée.

Réponse : l'expression $\frac{\infty}{\infty}$ est *souvent* indéterminée, mais pas *constamment*. Soit un triangle ABC ; prolongeons AB et AC indéfiniment, et supposons que le côté BC s'éloigne du sommet A sans changer de direction ; les deux autres côtés du triangle deviennent infiniment grands, et conservent pourtant le rapport fini $\frac{AB}{AC}$, c'est ce qu'on écrit par l'équation

$$\frac{\infty}{\infty}=\frac{AB}{AC}, \text{ et si } AB=AC, \text{ on a } \frac{\infty}{\infty}=1 ;$$

si BC s'approchait sans cesse de A, on aurait enfin $\frac{0}{0}=\frac{AB}{AC}$;

en général $\frac{ax}{bx+c}$ devient $\frac{\infty}{\infty}$ lorsque $x=\infty$; et toutefois alors $\frac{\infty}{\infty}=\frac{a}{b}$; $\frac{0}{0}$ peut même devenir infini ; ainsi $\frac{\sin x}{1-\cos x}$ se réduit à $\frac{0}{0}$ en faisant $x = 0$, et toutefois dans ce cas $\frac{0}{0} = \infty$. Une branche de l'analyse, nommée *calcul infinitésimal* a même pour but unique de découvrir les valeurs *déterminées* que prennent les expressions qui se présentent sous la forme de $\frac{0}{0}$ et d'en découvrir les diverses propriétés Tm.

ÉCLAIRCISSEMENT

Sur le problème de probabilité de la page 218.

On a demandé ce que signifie l'expression *valeur totale de la blancheur* (p. 219) ; c'est ce qu'on désigne sous le nom d'*espérance mathématique*. Supposons que chaque bille blanche vaille 1 franc ; au commencement l'urne A a pour valeur certaine n francs ; au bout de la première seconde, sa valeur certaine est de $n - 1$ francs ; et au bout de t secondes, sa valeur *probable* est s (p. 220) (*Voir* Laplace, *Prob.*, p. 301). Tm.

SOLUTION DU PROBLÈME SUR L'AXE RADICAL (t. II, p. 327) ;

PAR M. MENTION,
élève en spéciales.

Étant données deux circonférences dans le même plan : A un point sur la première circonférence, et B un point sur la seconde ; trouver sur l'axe radical des deux circonférences un point C, tel qu'en menant les sécantes CA, CB, elles coupent les circonférences en deux points D,E, de manière que la droite DE soit à angle droit sur l'axe radical.

Je vais d'abord déterminer le lieu des points tels qu'en les joignant à deux points fixes, la différence des angles des lignes de jonction avec la droite fixe soit donnée.

Je prends pour axes de coordonnées la droite fixe AB (*fig.* 31), et la perpendiculaire à cette droite élevée par le milieu O : si C est un des points du lieu, nous devons avoir :

$$\mathrm{CBA} - \mathrm{CAB} = \omega\,;$$

d'où

$\dfrac{\mathrm{tg\,CBA} - \mathrm{tg\,CAB}}{1 + \mathrm{tg\,CBA}\,\mathrm{tg\,CAB}} = \mathrm{tg}\,\omega$. Soit $\mathrm{AB} = a$. Alors $\mathrm{tg\,CBA} = \dfrac{2y}{a-2x}$, $\mathrm{tg\,CAB} = \dfrac{2y}{a+2x}$; substituant dans la valeur de $\mathrm{tg}\,\omega$, il vient :

$$\mathrm{tg}\,\omega = \frac{\dfrac{2y}{a-2x} - \dfrac{2y}{a+2x}}{1 + \dfrac{4y^2}{a^2-4x^2}} = \frac{8xy}{a^2-4x^2+4y^2}$$

et, en chassant le dénominateur et ordonnant :

$$y^2 - \frac{2xy}{\mathrm{tg}\,\omega} - x^2 + \frac{a^2}{4} = 0.$$

Le lieu cherché est donc une hyperbole équilatère, ayant son centre au milieu de la droite fixe.

Pour résoudre le problème, remarquons que la ligne des centres étant parallèle à DE (*fig.* 32), l'angle que fait DE avec la droite AB qui joint les deux points est donné : appelons ω son supplément.

Dans le triangle ADF, nous avons $\mathrm{A} + \mathrm{D} = \omega$, mais le point C étant sur l'axe radical, le quadrilatère DEAB est inscriptible et partant

$$A + D = A + 180° - B = \omega;$$

donc

$$A - B = -180 + \omega = \omega'.$$

Le point C appartient donc au lieu précédent :

$$y^2 - \frac{2xy}{\operatorname{tg}\omega'} - x^2 + \frac{a^2}{4} = 0,$$

et l'intersection de cette hyperbole équilatère avec l'axe radical donnera le point cherché.

Note. C'est une propriété connue de l'hyperbole équilatère, que dans le triangle formé par deux cordes supplémentaires et l'axe focal, la différence des angles à l'axe est constante ; la somme est constante dans le cercle.

L'énoncé peut être ainsi généralisé : Inscrire dans un cercle donné un quadrilatère ABCD ; les sommets adjacents A, B sont donnés ; le côté CD est donné de direction ; l'intersection des côtés AC, BD est sur une ligne donnée ; si cette ligne est droite, le problème est toujours susceptible d'une solution géométrique.

Rectification. Le lieu géométrique de la page 136 est de M. Jules Binder, élève en spéciales ; il a été mis par mégarde sous le nom de M. Mention, qui m'a indiqué cette rectification.

ANNONCE.

Mémoire de Mathématique, par R. Chauvet, Docteur ès sciences. Marseille, 1846, in-8°, de 120 pages.

On en rendra compte.

KHÉLASAT AL HISÁB,

OU

Essence du calcul de Behâ-eddin Mohammed ben al-Hosaïn al-Aamouli.

Traduit d'après la version allemande de Nesselmann publiée à Berlin en 1843,

PAR M. ARISTIDE MARRE,
Soldat au 71e régiment de ligne.

—

PRÉFACE.

On sait que les premiers algébristes européens durent les éléments de leur science aux Arabes, mais nous ne possédons, que je sache, aucun ouvrage français qui traite de la nature, de l'étendue et de l'origine de l'algèbre de nos instituteurs. Aucun extrait, aucune traduction de leurs ouvrages mathématiques n'ont été livrés à l'impression. C'est l'intention de remédier, bien imparfaitement sans doute, à cette pénurie complète de documents sur cette matière, ou plutôt de signaler cette pénurie même, qui m'a déterminé à faire paraître le présent opuscule.

Le *Khélasat al Hisàb* (Essence du Calcul) jouit d'une réputation considérable dans la Perse et dans l'Inde; on le regarde comme le traité par excellence, et c'est même à peu près le seul que l'on y enseigne. Bref et concis, il nous présente en outre un avantage important pour l'histoire de la science; car on y trouve indiquées les limites des connaissances algébriques au temps de l'auteur.

Cet ouvrage fut composé par Beha-eddin Mohammed ben al Hosaïn, al Aamouli, qui, suivant le biographe Nizam-eddin Ahmed, naquit à *Baalbec*, dans le mois d'Hilhaj, 953 Hijri, et mourut à *Isfahan*, en Shawâl 1031 ; c'est-à-dire que l'année de sa naissance est l'an 1547 de notre ère, et celle de sa mort, l'an 1622. Nous pouvons ajouter que notre auteur est Syrien de naissance; car *Baalbec* et *Aamoul* sont deux villes de Syrie; la première, l'ancienne *Héliopolis*, dans le pachalic d'*Acre*; la seconde, dans celui de *Damas*.

D'après l'orientaliste anglais Strachey, et son ami, le savant Indien Maulawi Roushen Ali, Beha-eddin est aussi l'auteur d'un grand nombre d'écrits sur la religion, les lois, la grammaire, etc.; d'un traité de l'astrolabe, et d'un ouvrage sur l'astronomie. Outre l'algèbre déjà citée, il en commença une autre plus étendue, le *Bàhr al Hisab* (l'Océan de Calculs), qui ne fut probablement jamais finie, car suivant Maulawi Roushen Ali, les commentateurs s'accordent à dire qu'elle n'existe pas.

Il n'y a aucune raison pour croire que les Arabes connurent jamais plus d'algèbre que n'en comporte l'ouvrage de Beha-eddin; car longtemps avant lui la science était parvenue à toute sa hauteur. Nous pourrons donc, par le *Khélasat al Hisàb*, nous faire une idée de la nature et de l'étendue des connaissances algébriques des Arabes, et ceci me porte à espérer qu'une traduction fidèle et littérale ne sera pas tout à fait indigne de l'intérêt des savants indulgents qui ont bien voulu m'encourager et s'intéresser à moi, qui n'avais que zèle et gratitude.

Aristide Marre.

Au nom de Dieu, clément et miséricordieux.

Nous te bénissons, toi, dont aucun nombre ne limite la somme des grâces, et dont les divisions répétées sans fin ne conduisent à aucune fin; nous prions pour notre Seigneur MOHAMMED, l'Elu, et pour sa famille, principalement pour les quatre membres liés entre eux (1), les possesseurs du manteau de souveraineté (2). Ceci fait, alors (osera se nommer) celui qui est pauvre en comparaison de Dieu le Riche, BEHA-EDDIN MOHAMMED, fils de HOSAÏN, d'AAMOUL; puisse Dieu le Très-Haut ne lui laisser dire que ce qui sera vrai au jour où *compte sera rendu*.

Il dit : Quant à l'arithmétique, on sait combien sa substance est sublime, combien son rang est éminent, ses problèmes élégants, ses démonstrations solides; on sait que beaucoup de sciences ont besoin d'elle, et que dans une multitude innombrable d'affaires on en fait usage. Ceci est un traité qui embrasse ses éléments les plus nécessaires, et réunit dans ses chapitres et sections ce qu'elle a de plus important. Ce traité renferme en outre d'élégants artifices choisis parmi ceux qui constituent l'essence des ouvrages des anciens auteurs, et, élaboré d'après ces bases distinguées, il servira de direction aux auteurs à venir. Je lui ai donné le nom d'*Essence du Calcul*, et l'ai partagé en une introduction et dix chapitres.

INTRODUCTION.

L'arithmétique est une science qui apprend à trouver des nombres inconnus en vertu de connaissances spéciales; son objet est le nombre; et attendu que celui-ci, comme on le dit, se manifeste dans la matière, par ce motif on compte l'arithmétique parmi les sciences abstraites. Toutefois les opinions sont partagées là-dessus. Suivant les uns, le nombre est une collection, qui peut se réduire à l'unité, ainsi qu'à ce qui est composé avec cette dernière; d'après cette définition, l'unité est comprise dans le nombre. Suivant d'autres, le nombre est la demi-somme de ses deux limites; alors l'unité est exclue; on s'est efforcé cependant de l'y introduire, en prenant pour limite inférieure une fraction. La vérité est que l'unité n'est pas un nombre, bien que les nombres soient formés avec elle, de même que la substance simple, conformément à ceux qui admettent une telle substance, n'est nullement un corps, bien que les corps soient formés avec elle.

Le nombre est *absolu*, et alors il se nomme *nombre entier*, ou bien il se rapporte à une unité adoptée; il se nomme alors *fraction*, et cette unité, son *dénominateur*. Si le nombre absolu est exprimable avec les neuf chiffres, ou s'il a une racine carrée, on l'appelle *articulé*; sinon, on l'appelle *muet* (3). Si le nombre articulé est égal à la somme de ses diviseurs, il s'appelle *parfait*; est-il plus petit, il s'appelle *surabondant;* est-il plus grand, il s'appelle *défectueux*.

Le nombre a trois ordres primitifs : unités, dizaines et centaines; les nombres plus élevés qui dépassent ces limites, et il y en a une infinité, peuvent néanmoins se ramener à ces ordres primitifs. Les savants hindous ont, à cet effet, inventé les neuf caractères connus (4).

CHAPITRE PREMIER.

LE CALCUL DES NOMBRES ENTIERS.

Joindre un nombre à un autre, s'appelle *additionner;* l'en retrancher, *soustraire*; le répéter une fois, *doubler*; et plusieurs fois, suivant le nombre d'unités contenues dans un autre nombre, *multiplier*; le partager en deux parties égales, *démidier;* en plusieurs parties égales, suivant le nombre d'unités d'un autre nombre, *diviser*; produire le nombre par le moyen duquel un carré s'est formé, se nomme *extraire la racine carrée.* Nous distribuons ces opérations dans des sections distinctes.

PREMIÈRE SECTION.

Addition.

Écris les deux nombres l'un sous l'autre, et commence, à partir de la main droite, à ajouter chaque chiffre à son correspondant; en résulte-t-il un nombre plus petit que dix, alors écris-le au-dessous; pour un nombre plus grand, son excès; pour dix, un zéro; dans ces deux derniers cas, pour la dizaine retiens dans ta pensée une unité, afin de l'ajouter aux nombres de l'ordre suivant, ou bien écris-la à côté de l'ordre précédent, si ces nombres n'existent pas, ou dans cet ordre même. Tout chiffre qui n'a pas de correspondant, place-le tel qu'il est dans le rang de la somme. Voici le tableau :

$$\begin{array}{r} 20372 \\ 7656 \\ \hline 28028 \end{array}$$

Mais s'il y a plusieurs rangs de nombres, écris-les les uns sous les autres, ordre par ordre, et commence par la droite, en retenant dans ta pensée, pour chaque dizaine, une unité, ainsi que tu l'as appris. Voici le tableau :

$$\begin{array}{r} 72373 \\ 3318 \\ 514 \\ \hline 76205 \end{array}$$

Apprends que la *duplication* est proprement l'addition de deux nombres égaux, seulement tu n'as pas besoin d'écrire deux fois le même nombre, mais tu ajoutes chaque chiffre à lui-même, comme tu ferais de son correspondant. Voici le tableau :

252073
504146

Tu peux, dans ces opérations, commencer aussi par la gauche ; seulement il te faut ensuite biffer, corriger et tirer des lignes, ce qui est une complication sans utilité. Le tableau est comme ci-dessous :

ADDITION DE DEUX NOMBRES.

5	2	5	3	7
2	7	9	4	2
7	9	4	7	9
8	0			

ADDITION DE PLUSIEURS NOMBRES.

5	3	7	3	2
	4	1	7	9
		1	0	5
5	7	9	0	6
	8	0	1	

DUPLICATION.

2	5	0	6	7
4	0	0	2	4
5		1	3	

Saches que l'on appelle *balance* (5) d'un nombre ce qui reste quand on en ôte neuf autant de fois que possible. Alors la preuve de l'addition et de la duplication consiste en ceci, que l'on additionne les balances des nombres additionnés, et que l'on double la balance du nombre doublé ; puis l'on prend la balance de la somme. Maintenant y a-t-il différence avec la balance du résultat, c'est que le calcul est faux.

DEUXIÈME SECTION.

Démidiation.

Commence par la gauche, et au-dessous de chaque chiffre pose sa moitié, s'il est pair, et le nombre entier compris dans sa moitié s'il est impair, en même temps que pour la fraction tu retiens cinq dans ta pensée, pour l'ajouter à la moitié du chiffre précédent, si c'est un nombre différent de l'unité ; mais est-ce *un* ou *zéro*, alors tu poses le cinq au-dessous. Après avoir parcouru le rang, conserves-tu une fraction ? alors pour l'indiquer écris un demi ; ainsi :

$$\begin{array}{r} 8730313\phantom{\,\frac{1}{2}} \\ \;0 \\ 4365156\;\frac{1}{2} \end{array}$$

Tu peux également commencer par la droite, en écrivant entre des lignes, comme ci-dessous :

1	3	6	5	
				4
	1	3	2	2
				[illegible]
	6	8		7

La preuve consiste en ceci, que l'on double la *balance* de la moitié, et que de ce résultat on prend encore la *balance* ; est-il différent de la *balance* du nombre démidié ? c'est que le calcul est faux.

TROISIÈME SECTION.

Soustraction.

Ordonne les deux nombres comme précédemment, commence par la droite, enlève chaque chiffre de celui placé au-dessus, et pose le reste sous la ligne horizontale. N'y a-t-il aucun reste ? mets un zéro. La soustraction n'est-elle pas possible ? alors prends une unité des dizaines voisines, fais alors la soustraction, et écris le reste. Mais si la place des dizaines est vide, alors tu prends aux centaines une unité qui, par rapport aux dizaines, signifie dix ; tu en laisses neuf à cette place, tu procèdes avec l'unité comme tu as appris, et tu pousses l'opération jusqu'au bout ; ainsi :

270753
 29872
———
240881

Tu peux encore commencer par la gauche ; ainsi :

9	2	6	3
6	2	7	4
3	0	9	9.
2	9	8.	

La preuve consiste en ceci, que l'on retranche la *balance* du nombre à soustraire de la *balance* du nombre dont on soustrait, si cela est possible ; sinon, on ajoute neuf à ce dernier nombre, et l'on soustrait. Si ce reste diffère de la *balance* du reste, c'est que le calcul est faux.

QUATRIÈME SECTION.

Multiplication.

Ceci est la recherche d'un nombre tel, que son rapport à l'un des multiplicateurs soit le même que celui qui existe entre l'unité et l'autre multiplicateur ; d'où il suit que l'unité n'a aucune influence dans la multiplication. Il se présente ici trois cas, ou c'est un nombre *simple* à multiplier par un nombre *simple* (6), ou un *simple* par un *composé*, ou un *composé* par un *composé.*

Dans le premier cas, on a : soit des *unités* par des *unités*, soit des *unités* par des *non-unités,* ou des *non-unités* par des *non-unités.* Ce qui concerne la première subdivision parle de soi-même. Dans les deux autres, au contraire, réduis les non-unités en unités de même nom. Ensuite multiplie ces unités entre elles et retiens le produit; puis additionne les nombres qui représentent les ordres des deux facteurs, retranche *un* de la somme, et élève le produit à l'ordre marqué par ce reste. Si tu dois, par exemple, multiplier 30 par 40, alors tu places 12 à l'ordre des centaines, puisque le nombre des ordres est quatre, et que le troisième ordre est l'ordre des centaines; as-tu 40 à multiplier par 500? alors tu places 20 à l'ordre des mille, car la somme des nombres des ordres est cinq (7).

Les deuxième et troisième cas se ramènent au premier, si l'on décompose le nombre composé en ses simples. Multiplie ensuite les nombres simples chacun à chacun et additionne les résultats.

Il y a des règles élégantes pour la multiplication qui conduisent à la solution de problèmes intéressants.

Règle pour deux nombres entre cinq et dix : Prends l'un des facteurs dix fois et du résultat retranche le produit de ce facteur par le complément à *dix* de l'autre facteur. Soit à multiplier 8 par 9; nous retranchons de 90 le produit de 9 par 2; le reste est 72.

Une autre règle (8) : Additionne les deux facteurs et considère comme dizaines l'excès de cette somme sur dix; au résultat ajoute le produit des compléments à dix de chaque facteur. Soit à multiplier 8 par 7; nous ajoutons à 50 le produit de 2 par 3.

Règle pour la multiplication d'unités par un nombre compris entre *dix* et *vingt* : Additionne les deux facteurs, considère comme dizaines l'excès de la somme sur dix; de ce résultat retranche le produit des différences avec *dix*, des deux nombres proposés. Soit à multiplier 8 par 14, nous retranchons de 120 le produit de 2 par 4.

Règle pour la multiplication de deux nombres compris l'un et l'autre entre *dix* et *vingt* : Ajoute les unités de l'un.

avec l'autre tout entier, considère la somme comme des dizaines ; à ceci ajoute le produit des unités par les unités. Par exemple, pour multiplier 12 par 13, nous ajoutons à 150 six.

Règle : S'il te faut multiplier un nombre quelconque par 5, ou 50, ou 500, prends sa moitié dix fois, ou cent fois, ou mille fois, et prends pour la fraction la moitié de ce que tu as pris pour le nombre entier. Par exemple, 16 multiplié par 5 donne 80, ou 17 par 50 donne 850.

Règle pour la multiplication d'un nombre entre *dix* et *vingt* par un nombre composé entre *vingt* et *cent :* Multiplie les unités du plus petit par les dizaines du plus grand, ajoute au produit le plus grand nombre, considère la somme comme des dizaines, et à ce résultat ajoute le produit des unités par les unités. Soit à multiplier 12 par 26 ; tu ajoutes 4 à 26, tu considères 30 comme autant de dizaines, tu finis l'opération, et il vient 312.

Règle : S'il te faut multiplier un nombre quelconque par 15, ou 150, ou 1500, augmente-le de sa moitié, et prends le résultat dix fois, ou cent fois, ou mille fois, et pour la fraction prends la moitié de ce que tu as pris pour le nombre entier. Ainsi, 24 multiplié par 15 donne 360, 25 multiplié par 150 donne 3750.

(9) Règle pour la multiplication de deux nombres entre *vingt* et *cent* ayant même chiffre de dizaines : Ajoute à l'un des facteurs les unités de l'autre, multiplie la somme par le chiffre des dizaines, considère le produit comme des dizaines, et augmente-le du produit des unités par les unités. Exemple : pour multiplier 23 par 25, tu multiplies 28 par 2, tu appelles le produit 56 dizaines, tu appliques complétement la règle, et alors il vient 575.

Règle pour deux nombres entre vingt et cent avec des dizaines en nombre différent : Multiplie les dizaines du plus petit nombre par le plus grand tout entier, ajoute au résultat le produit des unités du plus petit nombre par les dizaines du plus grand, considère cette somme comme autant de dizaines, et joins-lui le produit des unités par les unités. Par exemple, pour multiplier 23 par 34, ajoute à 68 neuf, et à 770 douze.

Règle pour deux nombres inégaux, dont la demi-somme est un nombre entier; additionne-les, multiplie leur demi-somme par elle-même et retranche du résultat le carré de leur demi-différence. Soit à multiplier 24 par 36; de 900 retranche le carré de la demi-différence des nombres, lequel est 36, alors il reste 864.

Règle : Quelquefois la multiplication devient plus facile, parce que l'on divise l'un des facteurs par le plus petit nombre de l'ordre supérieur, que l'on multiplie l'autre facteur par le quotient, et que l'on répète le résultat ainsi obtenu un nombre de fois indiqué par le diviseur adopté, afin de donner à la fraction sa valeur. Ainsi, soit à multiplier 25 par 12; divise le premier nombre par 100, le quotient est un quart; maintenant prends un quart de 12 et multiplie-le par 100, ou bien 25 par 13, le quart de 13 est un quart, et le résultat 325.

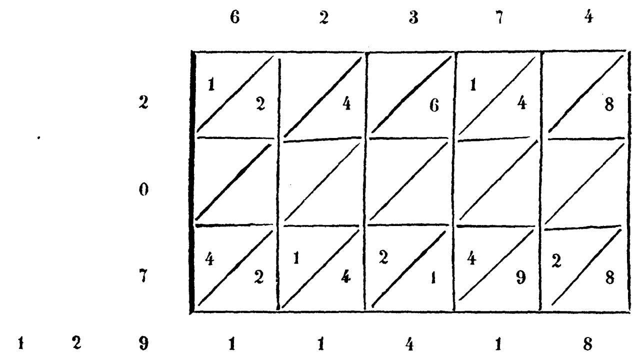
Règle : Quelquefois la multiplication devient plus facile, si tu doubles un des facteurs une et plusieurs fois, si tu démidies l'autre de la même manière, et si tu multiplies l'un par l'autre les deux résultats. Soit 25 à multiplier par 16; si tu doubles maintenant le premier nombre deux fois et si tu démidies le second le même nombre de fois, cela se réduit alors à multiplier 4 par 100. Cela est tout à fait évident.

Éclaircissement. — Mais si les chiffres sont nombreux et que l'opération devienne difficile, tâche alors de t'aider de l'écriture. Dois-tu, par exemple, multiplier un nombre simple par un nombre composé, écris-les; ensuite multiplie par le chiffre du nombre simple le nombre du premier rang, et pose au-dessous les unités du produit ; quant aux dizaines, conserve-les comme autant d'unités dans ta pensée, pour les ajouter au produit du rang suivant, si toutefois il s'y trouve un nombre. S'y trouve-t-il, au contraire, un zéro? alors écris ce nombre de dizaines au-dessous. Obtiens-tu un produit n'ayant pas d'unités? mets un zéro, et pour chaque dizaine retiens une unité dans ta pensée ; procède avec elles comme tu as appris. Multiplies-tu par zéro? écris un zéro. Enfin, si des zéros s'adjoignent après le nombre simple, écris-les à droite, à la suite du produit. Exemple : 5 à multiplier par le nombre 62043, le tableau de l'opération est comme ci-dessous :

5
62043
310215

Et si c'eût été 500, alors tu aurais dû, à la droite du produit, adjoindre deux zéros, ainsi : 31021500.

Mais si tu as un nombre composé à multiplier par un nombre composé, il y a d'autres méthodes, telles que celles du *réseau*, de la *ceinture*, du *vis-à-vis* et autres ; mais la plus connue est celle du réseau. Trace une figure à quatre côtés et divise-la en carrés, et chaque carré en deux triangles, un supérieur et un inférieur, par le moyen de diagonales, comme tu le verras tout d'abord ; ensuite place l'un des facteurs au-dessus de la figure, chaque chiffre sur un carré, et l'autre à la gauche, les unités en bas, au-dessus d'elles les dizaines, ensuite les centaines, et ainsi de suite. Après cela, multiplie les chiffres séparément, chacun à chacun, et pose le produit dans le carré ; s'il s'y rencontre deux chiffres, les unités dans le triangle inférieur, les dizaines dans le supérieur, et laisse vides les carrés auprès desquels est placé un zéro. Maintenant tout étant rempli, mets alors, sans y rien changer sous la figure, ce qui se trouve dans le premier triangle en bas à droite ; s'il est vide, mets un zéro ; c'est là le premier chiffre du produit ; ensuite additionne ce qui se trouve compris entre deux transversales et pose le résultat à gauche du précédent ; si l'espace est vide, mets un zéro, absolument comme dans l'addition. Par exemple si nous voulons multiplier 62374 par 207, voici le tableau de l'opération (10) :



La preuve consiste en ceci, que l'on multiplie les *balances* des deux facteurs l'un par l'autre ; si la *balance* de ce produit diffère de celle du résultat obtenu, c'est que le calcul est faux.

CINQUIÈME SECTION.

Division.

Ceci est la recherche d'un nombre qui ait avec l'unité le même rapport que le dividende avec le diviseur ; ainsi, c'est l'inverse de la multiplication. L'affaire ici consiste donc en ce que l'on cherche un nombre dont le produit par le diviseur est égal au dividende, ou est moindre que celui-ci d'un nombre plus petit que n'est le diviseur.

Si le produit mentionné est égal au dividende, alors le nombre trouvé se nomme le quotient ; et s'il est plus petit, de la manière énoncée, donne à la différence le diviseur pour dénominateur, alors cette fraction, jointe au nombre entier, est le quotient.

Si les nombres sont grands, trace une table avec autant de bandes que le dividende a de places ; mets celles-ci entre les lignes, le diviseur en bas, de telle sorte que les chiffres de la plus haute espèce soient placés l'un sous l'autre, si le diviseur n'est pas plus grand que les chiffres du dividende qui lui correspondent ; s'il en est ainsi, mets le diviseur au-dessous ; dans le cas contraire, mets-le de façon qu'il soit placé sous l'avant-dernier chiffre du dividende (11). Ensuite cherche le plus grand nombre parmi les unités dont le produit par chacun des chiffres du diviseur puisse se soustraire des chiffres du dividende qui se trouvent précisément au-dessus d'eux, ou peut-être à gauche, et pose le reste sous une ligne de séparation. As-tu trouvé un pareil nombre?

	1	8	4	1	0
9	7	5	7	4	1
5	3				
4	4				
4	0				
	4				
	2	4			
	2	1			
	2	0			
		1			
		1	2		
			5	4	
			5	3	
				1	
				5	3
			5	3	
		5	3		
	5	3			
5	3				

alors mets-le au-dessus de la table, à la place qui correspond au premier chiffre du diviseur, et procède avec lui comme tu as appris. Ensuite avance le diviseur d'un rang à droite, ou ce qui reste du dividende d'un rang à gauche, après que tu as tiré une ligne horizontale. Ensuite cherche de nouveau le plus grand nombre, comme auparavant, et pose-le à droite du premier et procède avec lui comme tu as appris. Ne peut-il se trouver aucun nombre de cette espèce, alors pose un zéro et avance à droite, comme précédemment, successivement d'un rang jusqu'à ce qu'enfin l'ordre le plus faible du diviseur soit placé sous l'ordre le plus faible du dividende; ensuite c'est ce qui est placé au-dessus de la table qui est le quotient. S'il reste quelque chose du dividende, alors c'est une fraction dont le dénominateur est le diviseur. Par exemple le nombre 975741 doit-il être divisé par le nombre 53, alors le quotient est 18410, comme nombre entier, et 11 de 53 parties, si 53 est pris comme unité. Le tableau est ci-contre.

La preuve consiste en ceci, que l'on multiplie la balance du quotient par la balance du diviseur, et qu'à cela on ajoute la balance du reste, s'il en existe un; la balance de cette somme est-elle différente de la balance du dividende? alors le calcul est défectueux.

SIXIÈME SECTION.

Extraction de la racine carrée.

La quantité que l'on multiplie par elle-même s'appelle *Racine* en arithmétique, *Côté* en géométrie, et SHAÏ (Chose) en algèbre. Le résultat s'appelle carré. Si le nombre est petit, la recherche de la racine carrée n'exige aucun effort d'esprit, dès qu'il est rationnel; est-il irrationnel? retranches-en le carré qui en approche le plus, et donne au reste, pour dénominateur, le double de la racine du carré soustrait augmenté de l'unité; c'est la racine du carré soustrait jointe à cette fraction qui est la racine carrée par approximation du nombre donné (12).

Mais s'il est grand, alors place-le au dedans d'une table, comme le dividende, et marque les rangs de deux en deux; ensuite cherche le plus grand nombre parmi les unités, de sorte que, si tu soustrais son carré du chiffre situé au-dessous de la première marque et de celui qui le précède (situé à sa gauche), il y ait un reste nul ou moindre que le carré soustrait (13). As-tu trouvé un pareil nombre? alors place-le en haut et en bas à une distance déterminée; multiplie ensuite le supérieur par l'inférieur, et mets le produit sous le nombre dont la racine carré est demandée, de telle sorte que ses unités soient placées sous le multiplicateur; soustrais le produit de ce qui se trouve au-dessus et à gauche, et écris le reste au-dessous, après que tu as tiré une ligne de séparation. Après cela, additionne le nombre écrit en haut avec celui écrit en bas, et écris la somme en bas en avançant d'un rang à droite. Ensuite cherche de nouveau le plus grand nombre, tel que, si tu l'as écrit en haut, à la seconde marque et aussi en bas, son produit, par tout le nombre inférieur, puisse se soustraire de celui qui se trouve au-dessus et à gauche; ce nombre est-il trouvé? alors procède avec lui comme tu as appris, additionne le nombre d'en haut avec celui d'en bas, et avance ce qui se trouve en bas d'un rang à droite. Mais un semblable nombre ne peut-il se trouver? alors pose en haut, à la marque et en bas un zéro, et avance d'un rang. Procède de même, jusqu'à ce que tu sois à la fin, alors ce qui est écrit en haut est la racine carrée, et, s'il n'est demeuré aucun reste sous les lignes de séparation, alors le nombre est un carré rationnel; y a-t-il un reste, alors il est carré irrationnel, et ce reste est une fraction dont on trouve le dénominateur si on additionne, avec ce qui se trouve en bas, ce qui est en haut, à côté de la dernière marque joint à l'unité. Exemple : nous voulons extraire la racine carrée de ce nombre 128172, nous opérons comme nous avons dit, et ensuite le tableau est comme ci-dessus. Sous les lignes de séparation, il est resté 8, et c'est une fraction dont le dénominateur est formé, si on

	.3		.5		.8
1	2	8	1	7	2
	9				
	3				
	3	0			
		8			
		2	5		
		5	6		
		5	6	6	4
					8
			7	1	7
			7	0	8
		6	5		
	3				

additionne avec ce qui se trouve en bas, ce qui se trouve en haut à la dernière marque, joint à l'unité, et c'est 717.

La preuve consiste en ceci, que l'on carre la balance du résultat, et qu'on lui ajoute la balance du reste s'il y en a un. Maintenant la balance de cette somme diffère-t-elle de la balance du nombre donné, alors le calcul est faux.

SECOND CHAPITRE.

CALCUL DES FRACTIONS,

Contenant trois préliminaires et six sections.

PREMIER PRÉLIMINAIRE.

Si deux certains nombres autres que l'unité sont égaux, on les nomme : *identiques*; un autre cas est celui où le plus petit mesure le plus grand, on les nomme alors nombres *aliquotes*; un autre cas encore est celui où un troisième nombre les mesure tous les deux, alors on les nomme *congruents*, et la fraction dont le dénominateur est ce troisième nombre, s'appelle leur *congruence*; si cela n'a pas lieu, on les nomme alors *hétérogènes*. L'identité est une chose claire par elle-même; on reconnaît les autres états de corrélation de deux nombres, si l'on divise le plus grand par le plus petit; il n'y a pas de reste, alors ils sont *aliquotes*; s'il y a un reste, nous divisons le diviseur par le reste, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on ne trouve plus aucun reste; alors les nombres sont congruents, et le dernier diviseur est leur plus grand commun diviseur; mais si l'on parvient à l'unité, comme reste, alors ils sont hétérogènes. De plus la fraction est ou *articulée* (14), et ce sont les neuf (premières) fractions connues, ou *muettes*, qu'il n'est possible d'exprimer qu'à l'aide d'une circonlocution. De plus, chacune d'elles est ou *simple*, comme un tiers, un onzième; ou *multiple* comme deux tiers, deux onzièmes, ou *dépendante*, comme un demi d'un sixième, un onzième d'un treizième, ou *composée*, comme un tiers et un demi, un onzième et un treizième.

Si tu veux écrire une fraction, écris-la ainsi : quand elle est jointe à un nombre entier, celui-ci tout en haut, et la fraction au-dessous, le numérateur sur le dénominateur; dans le cas contraire, mets un zéro à sa place. On unit les fractions composées par le mot *et* et les fractions dépendantes, avec le mot *de*. Ainsi l'on écrit : un et deux tiers $\begin{matrix}1\\2\\3\end{matrix}$; la moitié de cinq sixièmes $\begin{matrix}0\\1\\2\\5\\6\end{matrix}$; deux cinquièmes et trois quarts : $\begin{matrix}0\\2\\5\end{matrix}$ et $\begin{matrix}0\\3\\4\end{matrix}$; un onzième d'un treizième $\begin{matrix}0\\1\\11\end{matrix}$ de $\begin{matrix}0\\1\\13\end{matrix}$.

DEUXIÈME PRÉLIMINAIRE.

Le dénominateur d'une fraction est le plus petit nombre qui en fasse un nombre entier. Le dénominateur d'une fraction simple, frappe les yeux, et n'est pas différent du dénominateur d'une fraction multiple. Le dénominateur d'une fraction dépendante est le produit des dénominateurs de ses fractions simples. Quant à la fraction composée, compare les dénominateurs de ses deux fractions ; sont-ils des nombres hétérogènes multiplie-les l'un par l'autre; sont-ils congruents, alors multiplie la congruence de chacun d'eux par l'autre; sont-ils aliquotes, alors contente-toi du plus grand; ensuite compare le résultat avec le dénominateur de la troisième fraction, et procède comme tu as appris, et ainsi de suite; le résultat est le dénominateur cherché. Veux-tu par exemple le dénominateur commun des neuf premières fractions, multiplie 2 par 3, puisqu'ils sont hétérogènes, le résultat par la moitié de 4, puisqu'ici il y a congruence; le résultat par 5, à cause de l'hétérogénéité; mais 6 se trouve dans le résultat, contente-toi donc de celui-ci, et multiplie-le par 7, à cause de l'hétérogénéité, et le résultat par un quart de 8, puis celui-là par un tiers de 9, à cause de la congruence; 10 se trouve dans le résultat qui est 2520; sois-en donc satisfait; c'est en effet le dénominateur demandé.

Addition. Tu peux aussi comparer tout ensemble les dénominateurs des fractions simples. Ceux d'entre eux qui sont compris dans un autre, passe par dessus, et contente-toi du plus grand; pour ceux qui sont *congruents* avec un autre, substitue leur *congruence*, et procède de même avec cette *congruence*, jusqu'à ce que les dénominateurs soient réduits à l'hétérogénéité; ensuite multiplie-les les uns par les autres; le produit est la quantité demandée. Dans l'exemple, efface 2, 3, 4 et 5 puisqu'ils se trouvent dans les dénominateurs suivants; 6 est *congruent* avec 8, suivant un demi, en conséquence substitue-lui sa moitié; mais celle-ci se trouve dans 9, efface-la donc; 8 est *congruent* avec 10, suivant un demi; en conséquence multiplie 5 par 8, le produit par 7, et celui-ci par 9, alors tu as le nombre demandé.

Facétie (15). On obtient le dénominateur des neuf fractions, si on multiplie les jours du mois par le nombre des mois, et ce produit par les jours de la semaine. Ou bien si on forme un produit de ceux de ces dénominateurs qui contiennent la lettre : Aïn. Le maître des fidèles, Ali (salut à lui!), interrogé là-dessus, répondit : multiplie les jours de la semaine par les jours de l'année.

TROISIÈME PRÉLIMINAIRE.

Transformation des fractions mélangées en fractions impures et réciproquement.

La transformation d'une fraction mélangée en une impure, consiste en ceci, que l'on fait d'un nombre entier une fraction ayant le dénominateur d'une fraction donnée, et l'opération est celle-ci : si la réunion d'un nombre entier et d'une fraction est donnée, on multiplie le nombre entier par le dénominateur de la fraction, et à cela on ajoute le numérateur. Ainsi la transformation de 2 un quart donne 9 quarts ; la conversion de 6 trois cinquièmes égale 33 cinquièmes et la conversion de 4 un vingt et unième égale 85 vingt et unièmes.

La transformation d'une fraction impure en une mélangée, consiste en ceci que l'on fait d'une fraction un nombre entier. Si nous avons par exemple : une fraction dont le numérateur est plus grand que le dénominateur, alors nous le divisons par le dénominateur ; en suite le quotient est un nombre entier, et le reste une fraction avec le dénominateur. Ainsi la résolution de quinze quarts, est trois et trois quarts.

PREMIÈRE SECTION.

Addition et duplication des fractions.

On prend, après le dénominateur rendu commun, la somme ou le double, et c'est par lui que l'on divise le numérateur, si ce dernier est plus grand ; s'il est plus petit, on écrit le dénominateur au-dessous ; s'il lui est égal, le résultat est une unité. Ainsi un demi, un tiers et un quart égalent un et un douzième ; un sixième et un tiers c'est un demi ; un demi, un tiers et un sixième c'est un ; et le double de trois cinquièmes est un et un cinquième.

DEUXIÈME SECTION.

Demidiation et soustraction des fractions.

Demidiation. Si le numérateur est un nombre pair, alors demidie-le ; si c'est un nombre impair, alors double le dénominateur et écris-le sous le numérateur. Cela est évident.

Soustraction. Soustrais un numérateur de l'autre, après qu'ils sont réduits au même dénominateur, et écris sous ce reste le dénominateur commun.

Si tu soustrais ainsi un quart d'un tiers, il reste un douzième.

TROISIÈME SECTION.

Multiplication des fractions.

Si d'un côté seulement il y a une fraction, avec ou sans nombre entier, multiplie la fraction impure ou le numérateur simple par le nombre entier ; ensuite divise le produit par le dénominateur, ou écris celui-ci au-dessous; si l'on multiplie deux et trois cinquièmes par quatre, alors nous divisons le produit de la fraction impure et du nombre entier, c'est-à-dire 52 par 5, il vient alors 10 et deux cinquièmes.

Si nous avons à multiplier 3 quarts par 7, alors nous divisons 21 par 4 ; il vient alors 5 un quart, et c'est là la quantité demandée.

Si des deux côtés se trouve une fraction, et avec chacune, avec une seule, ou avec aucune, un nombre entier, alors multiplie les numérateurs des fractions impures l'un par l'autre, ou bien la fraction impure par le numérateur de l'autre, ou bien numérateur par numérateur, et que ce soit là le premier résultat. Puis multiplie dénominateur par dénominateur, et que ce soit là le second résultat. Enfin divise le premier par celui-ci, ou écris ce dernier comme dénominateur sous le premier; le résultat est alors la quantité demandée. Ainsi le produit de 2 et un demi par 3 et un tiers est 8 un tiers; le produit de 2 un quart par 5 sixièmes est 1 et 7 huitièmes, et de 3 quarts par 5 septièmes, c'est un demi plus un vingt-huitième.

QUATRIÈME SECTION.

Division des fractions.

Ici se présentent huit cas, comme la réflexion l'atteste. Le procédé consiste en ce que tu multiplies le dividende et le diviseur par le dénominateur commun, si des deux côtés sont des fractions, ou par le dénominateur existant, si seulement un côté renferme une fraction ; ensuite tu divises le produit du dividende par le produit du diviseur, ou bien tu écris celui-ci comme dénominateur au-dessous. C'est ainsi que si l'on divise 5 un quart par 3, le quotient est 1 trois quarts ; et inversement si l'on divise 3 par 5 un quart, 4 septièmes ; et deux sixièmes divisé par un sixième donne 2, comme le montre la règle de la division ci-dessus enseignée. Au reste, c'est à toi de rechercher les autres exemples.

CINQUIÈME SECTION.

Extraction de la racine carrée des fractions.

Si la fraction est jointe à un nombre entier, arrange-la de manière que le tout devienne une fraction. Ensuite, si le numérateur et le dénominateur sont *articulés*, alors divise la racine du numérateur par la racine du dénominateur, ou bien donne celle-ci pour dénominateur à celle-là. Ainsi la racine carrée de 6 un quart égale 2 et un demi, et la racine carrée de 4 neuvièmes égale deux tiers. Mais s'ils ne sont pas *articulés*, alors multiplie le numérateur par le dénominateur, extrais approximativement la racine carrée du produit et divise-la par le dénominateur. Veux-tu, par exemple, extraire la racine carrée de 3 et demi, alors multiplie 7 par 2 et extrais approximativement la racine carrée du produit ; elle est 3 et cinq septièmes ; ensuite divise-la par 2 ; il en résulte 1 et six septièmes.

SIXIÈME SECTION.

Réduction d'une fraction à un dénominateur donné.

Multiplie le numérateur de la fraction par le dénominateur auquel on doit·la réduire, et divise le produit par le dénominateur primitif, le quotient est le numérateur pour le dénominateur donné. On demande combien de huitièmes il y a dans cinq septièmes : divise 40 par 7; il en résulte $5 \frac{5}{7}$ huitièmes; et si l'on demande combien de sixièmes, alors la réponse est $4 \frac{2}{7}$ sixièmes.

TROISIÈME CHAPITRE.

RECHERCHE DE L'INCONNUE PAR LE MOYEN DE LA PROPORTION.

Ici le premier terme se comporte avec le second comme le troisième avec le quatrième, et le produit des termes externes doit être égal au produit des internes, ainsi qu'on le démontre. L'un des termes externes étant inconnu, divise le produit des termes internes par l'externe connu; si c'est l'un des internes qui est inconnu, divise le produit des termes externes par l'interne connu; le quotient est la quantité demandée. Les problèmes qui ont ici leur place, sont relatifs soit à la somme et à la différence, soit à des affaires commerciales et choses analogues.

Premièrement. On peut demander : quel est le nombre qui, si on lui ajoute un quart de sa valeur, devient trois?

Solution. Prends le dénominateur de la fraction, et donne-lui le nom de *supposition*. Opère à l'aide de ce nombre et suivant la question; ce à quoi tu parviens, nomme le *moyen;* tu as ainsi trois quantités connues, savoir : la supposition, le moyen et la connue; par la connue il faut entendre ce qui a été donné par celui qui a posé le problème, quand il a dit : cela devient tel ou tel nombre. Maintenant, la *supposition* en sa qualité de premier terme, se comporte avec le *moyen* en sa qualité de second, comme l'inconnue, en sa qualité de troisième, se comporte avec la *connue*, qui est le quatrième.

Multiplie la supposition par la connue, et divise le produit par le moyen ; de là résulte l'inconnue qui dans cet exemple est 2 et deux cinquièmes.

Secondement. Si l'on posait cette question : 5 livres pour 3 dirhems (16), 2 livres pour combien ? Ici 5 livres représentent l'objet évalué, 3 la valeur, les 2 livres l'achat et la quantité demandée, c'est le prix. L'objet évalué est à la valeur, comme l'achat est au prix. Ainsi l'inconnue est le quatrième terme ; c'est pourquoi divise le produit des termes internes, c'est-à-dire 6, par le premier terme 5. Mais si l'on demandait combien de livres pour 2 dirhems, alors l'inconnue serait l'achat, et en même temps le troisième terme ; aussi tu devrais diviser le produit des termes externes, c'est-à-dire 10, par le second, 3. De là on déduit cette règle : multiplie la dernière donnée de la question par son hétérogène, et divise le produit par son homogène.

Ce chapitre est d'une grande utilité. Retiens-le ! *Il est celui dont on implorera le secours !*

QUATRIÈME CHAPITRE.

RECHERCHE DE L'INCONNUE PAR LE MOYEN DE DEUX FAUSSES POSITIONS.

Prends pour l'inconnue tel nombre que tu voudras, nomme-le : *première supposition*, et opère conformément à l'énoncé ; s'il le vérifie, c'est lui l'inconnue. Mais s'il en dévie de l'un ou de l'autre côté (en plus ou en moins), alors nomme la différence, *première déviation.* Ensuite prends un autre nombre, nomme-le : *seconde supposition ;* s'il dévie, il donne alors la *seconde déviation.* Après cela, multiplie la première supposition par la seconde déviation, et nomme le produit le *premier résultat :* puis la seconde supposition par la première déviation, c'est là le *second résultat*. Si les deux déviations sont en même temps positives, ou négatives, alors divise la différence des deux résultats par la différence des deux déviations ; dans le cas contraire, divise la somme des deux résultats par la somme des déviations ; le quotient est le nombre demandé.

On voudrait savoir quel est le nombre qui, augmenté des deux tiers de sa valeur, et de 1, donnera 10 ? Voici : Si tu prends 9, la première déviation est 6 ; prends-tu 6, le seconde déviation est 1 ; d'où le premier résultat est 9, le second 36, et le quotient que tu obtiens si tu divises la différence des résultats par la différence des déviations est 5 deux cinquièmes. Tel est le nombre demandé.

On voudrait aussi savoir : quel est le nombre tel que si on lui ajoute un quart de sa valeur, si à cette somme on ajoute ses trois cinquièmes, et si de cette dernière somme on retranche 5, on retombera sur le nombre demandé lui-même. Si tu prends 4, la déviation est 1 par défaut ; si tu prends 8, c'est 3 par excès. D'où il suit que le quotient 5, provenant de la division de la somme des résultats par la somme des déviations est la quantité cherchée.

CINQUIÈME CHAPITRE.

RECHERCHE DE L'INCONNUE PAR LE MOYEN DE L'OPÉRATION DE L'INVERSION.

Ce procédé consiste en ceci, que l'on fait le contraire de ce que l'interrogateur a déterminé ; a-t-il doublé, demidie ; a-t-il additionné, soustrais ; a-t-il multiplié, divise ; a-t-il extrait la racine carrée, élève au carré ; a-t-il employé l'inversion, renverse de nouveau la question, et commence par la dernière partie du problème : ensuite tu obtiens la solution.

Exemple. On demande : quel est le nombre tel que si on le multiplie par lui-même, si au produit on ajoute 2, si au double de cette somme, on ajoute 3, et si le résultat divisé par 5 est ensuite multiplié par 10, on obtient en dernier lieu 50 ?

Divise ce nombre par 10, multiplie le quotient 5 par lui-même, retranches-en 3 ; de la moitié de 22 soustrais 2, et prends la racine carrée de 9 ; alors c'est cette racine de 9, la réponse à la question.

On demande : quel est le nombre tel qu'augmenté de sa moitié et de 4, il fournisse un résultat qui, modifié de la même façon, donne 20 ? Retranche 4, puis de 16 son tiers, puisque au nombre cherché on a ajouté sa moitié, alors il reste 10 deux tiers ; retranches-en 4 ; et du reste soustrais son tiers ; il vient 4 et quatre neuvièmes, et c'est là la solution (17). *Dieu connaît mieux la vérité.*

SIXIÈME CHAPITRE.

GÉOMÉTRIE.

Composé d'une introduction et de trois sections.

INTRODUCTION.

La *géométrie* recherche combien de fois dans la grandeur continue de l'espace, l'unité linéaire ou ses divisions ou ces deux mesures à la fois sont comprises, si c'est une ligne ; ou combien de fois l'est l'unité carrée, si c'est une surface ; ou l'unité cubique, si c'est un corps.

La *ligne* est la grandeur d'une dimension ; on la divise en *ligne droite* qui est la plus courte des lignes qui joignent deux points, et en même temps celle que l'on choisit, quand on a le libre choix ; ses dix noms sont connus (17bis) ; avec une de ses pareilles, elle ne renferme aucun espace ; et en *ligne courbe* que l'on subdivise encore en *ligne circulaire* qui est connue, et en *courbe non circulaire*, dont nous n'aurons pas à nous occuper ici.

La *surface* est la grandeur qui n'a pas plus de deux dimensions; elle est plane, si les lignes droites qui sont tirées sur elle, coïncident avec elle en chaque point. Est-elle limitée par une seule ligne circulaire, elle s'appelle *un cercle*; la ligne qui le demidie, le *diamètre*; et celle qui ne le demidie pas, *corde* par rapport aux deux arcs, et *base* par rapport aux deux segments; est-elle limitée par un arc et deux demi-diamètres qui se coupent au centre, alors c'est une *échancrure*, et à vrai dire il y en a une grande et une petite à la fois. Si elle est limitée par deux arcs dont la convexité est tournée d'un même côté, et tous deux plus petits que le demi-cercle, c'est une *lune*, s'ils sont plus grands, alors c'est *un fer à cheval*; si les deux arcs sont convexes de côtés différents, l'un égal au demi-cercle et l'autre plus petit, alors c'est un *myrobolan*; s'ils sont plus grands que le demi-cercle, c'est un *navet*. Si le plan est limité par trois lignes droites, il en résulte un triangle qui est équilatéral ou isocèle ou scalène, rectangle, obtusangle ou acutangle. Si ce sont quatre lignes égales, c'est un *carré*, pourvu qu'elles soient mutuellement perpendiculaires, sinon un *losange*; si elles sont inégales, avec égalité de celles situées vis-à-vis l'une de l'autre, c'est un *rectangle* quand elles sont perpendiculaires, autrement un *parallélogramme*; si aucune de ces conditions n'a lieu, alors naissent les *trapèzes*; certains d'entre eux reçoivent quelquefois des noms particuliers, tels que le *trapèze à une pointe*, *à deux pointes*, et le *concombre* (18). Si le plan est borné par plus de quatre côtés, il s'appelle *polygone*; et si les côtés sont égaux, on dit : un *quintile*, un *sextile*, et ainsi de suite; sinon l'on dit une figure *quinquilatère*, *sextilatère*, et ainsi de suite jusqu'à dix, dans les deux espèces; après cela on les appelle figure à onze bases, à douze bases, et ainsi de suite dans les deux espèces; quelquefois aussi quelques-unes reçoivent des noms particuliers comme SCALARIFORME, TYMPANIFORME, SPICULIFORME (19).

Le *corps* est la grandeur de trois dimensions ; s'il est terminé par une surface telle que les lignes droites partant de son intérieur sont égales entre elles, alors c'est une *sphère;* les cercles qui la demidient s'appellent *grands cercles;* les autres, *petits cercles.* S'il est renfermé entre six carrés égaux, alors c'est un *cube.* Si deux cercles, en même temps égaux et parallèles, sont unis par une surface telle qu'une ligne droite joignant les périphéries et tournant tout autour, coïncide avec elle en chaque point pendant tout son parcours, alors c'est un *cylindre* (*colonne*); les deux cercles sont ses *bases*, et la ligne qui joint leurs centres, son *axe;* celui-ci se tient-il perpendiculaire à la *base*, alors le cylindre est *droit*; autrement, *oblique.* S'il est renfermé par un cercle et par une surface convexe piniforme, qui de la périphérie va se réduire en un point, et qui est telle qu'une ligne droite de jonction parcourant la périphérie, coïncide avec elle dans tout son parcours, alors c'est un *cône*, lequel est droit ou oblique; le cercle est sa *base*; la ligne qui joint son centre avec le point, son *axe.* S'il est coupé par un plan parallèle à la base, alors la portion soujacente est un *cône raccourci.* Si la base du cône et du cylindre est une figure angulaire, ils deviennent tous deux, de cette façon, des corps angulaires. Voici la plupart des termes techniques employés dans cette doctrine.

PREMIÈRE SECTION.

Mesure des figures rectilignes.

En ce qui concerne le triangle, rectangle à la vérité, multiplie un des côtés de l'angle droit par la moitié de l'autre.

Dans l'obtusangle, multiplie la perpendiculaire qui tombe de l'angle obtus sur le côté opposé, par la moitié de ce côté opposé, ou inversement. Dans l'acutangle, fais la même multiplication avec la perpendiculaire partant d'un angle quelconque et le côté opposé. On apprend à laquelle de ces trois classes un triangle donné appartient, si on élève au carré son plus grand côté; ce carré est-il égal aux deux carrés des autres côtés, alors il est rectangle; est-il plus grand, il est obtusangle; est-il plus petit, il est acutangle. On trouve la hauteur ainsi qu'il suit : l'on prend le plus grand côté comme base, l'on multiplie la somme des deux plus petits par leur différence, l'on divise le produit par la base, et l'on retranche le quotient de cette même base; ensuite la moitié du reste est la distance du pied de la hauteur à l'extrémité du plus petit côté. Tire de là une ligne au sommet, voilà quelle est la hauteur; multiplie-la par la moitié de la base, il en résulte l'étendue de la surface (20).

Parmi les méthodes, pour trouver l'aire du triangle équilatéral, fais attention à celle-ci : tu multiplies par 3 le carré de la quatrième partie du carré d'un côté indistinctement; ensuite c'est la racine carrée du produit la réponse (21).

Dans le carré, multiplie un côté par lui-même; dans le rectangle, par son adjacent; dans le losange, la moitié d'une diagonale par l'autre tout entière. Partage les autres quadrilatères en deux triangles, alors la somme des deux aires est égale à l'aire de la somme. Pour quelques-uns d'entre eux, il y a des méthodes particulières, mais qui ne sont pas propres à entrer dans ce traité.

Pour ce qui concerne les polygones, multiplie, dans l'hexagone régulier, l'octogone et tous les autres d'un nombre pair de côtés, le demi-diamètre par la demi-somme des côtés, le produit est la réponse : or, le diamètre est la ligne qui joint les points milieux de deux côtés opposés. Tous les autres seront partagés en triangles, puis mesurés. Ceci est vrai pour tous en commun; mais pour quelques-uns on a des méthodes comme pour les quadrilatères.

DEUXIÈME SECTION.

Mesure des autres surfaces.

Quant au *cercle*, pose un fil sur sa périphérie et multiplie le demi-diamètre par la moitié de ce fil, ou bien retranche du carré du diamètre son septième et son demi-septième, ou multiplie le carré du diamètre par 11 et divise le produit par 14. Si tu multiplies le diamètre par 3 et un septième, tu obtiens la périphérie, et si tu divises la périphérie par ce même nombre, tu obtiens le diamètre. A l'égard des deux *secteurs*, multiplie le demi-diamètre par le demi-arc. Quant aux deux *segments*, marque bien le centre, et achève les deux secteurs, alors il se forme là un triangle; retranche-le du plus petit secteur, il en résulte le plus petit segment, ou ajoute-le au plus grand, il en résulte le plus grand segment. Quant à la *lune* et au *fer-à-cheval*, joins leurs points extrêmes par une ligne droite et retranche le plus petit segment du plus grand; partage en deux segments le *myrobolan* et le *navet*.

Pour la surface de la *sphère*, multiplie le diamètre par la périphérie du plus grand cercle, ou le carré du diamètre par quatre, en retranchant trois quatorzièmes du produit. L'aire de la surface courbe du *segment sphérique* est égale à l'aire d'un cercle dont le diamètre est égal à la ligne qui joint le pôle du segment avec la périphérie de la base.

Pour la surface du *cylindre droit*, multiplie la ligne parallèle à l'axe qui joint les deux bases par la périphérie de la base.

Pour la surface du *cône droit*, multiplie la ligne qui joint le sommet à la périphérie de la base par cette demi-périphérie.

Pour les surfaces qui ne sont pas mentionnées ici, on tâche de s'aider de celles qui sont mentionnées.

TROISIÈME SECTION.

Mesure des corps.

Dans la sphère, multiplie son demi-diamètre par un tiers de sa superficie, ou bien retranche du cube du diamètre ses trois quatorzièmes; du reste, de même, et du dernier reste, de même (22).

Pour le secteur, multiplie le demi-diamètre de la sphère par un tiers de la surface du secteur.

Pour les cylindres et prismes de chaque espèce, multiplie la hauteur par la surface plane de la base.

Pour les cônes entiers et les pyramides de chaque espèce, multiplie la hauteur par un tiers de l'aire de la base.

Pour le cône tronqué, multiplie le diamètre de la plus grande base par la hauteur et divise le produit par la différence des diamètres des deux bases, il en résulte la hauteur du cône, comme s'il était entier. La différence entre la hauteur du cône entier et celle du cône tronqué est la hauteur du petit cône, qui est le supplément de celui-ci; multiplies-en le tiers par la plus petite base, tu obtiens ainsi le volume du petit cône; puis retranche-le du cône entier.

Pour la pyramide tronquée, multiplie un côté de la plus grande base par la hauteur, et divise le produit par la différence entre un côté de cette base et un de la petite, tu as alors la hauteur de la pyramide entière; mène ensuite l'opération à fin.

Les démonstrations de toutes ces opérations sont expliquées dans mon livre plus étendu, intitulé : L'Océan du calcul; puisse Dieu le très-haut me donner assistance pour son entier accomplissement!

SEPTIÈME CHAPITRE.

SUR L'APPLICATION DE LA GÉOMÉTRIE AU NIVELLEMENT USITÉ POUR L'EXÉCUTION DES AQUEDUCS, A LA RECHERCHE DES HAUTEURS D'OBJETS ÉLEVÉS, DE LA LARGEUR DES RIVIÈRES ET DE LA PROFONDEUR DES PUITS.

Composé de trois sections.

PREMIÈRE SECTION.

Nivellement du sol, en usage pour l'exécution d'aqueducs.

Fais une tablette d'airain, ou de semblable matière, en forme de triangle isocèle; mets entre les extrémités de sa base deux anneaux et au pied de la hauteur un cordon portant un poids; ensuite passe-la (par ses anneaux au milieu d'un cordeau, et place les deux bouts de celui-ci sur deux piquets de bois, droits, égaux, et mis à plomb au moyen de fils à plomb avec l'aide de deux hommes, qui se tiennent distants l'un de l'autre de la longueur du cordeau; il est d'usage, à la vérité, que le cordeau soit long de quinze aunes et chacun des deux piquets de bois de cinq empans. Ensuite observe le cordon à poids; rencontre-t-il la pointe de la tablette? alors les deux lieux sont de niveau entre eux; sinon, descends le cordeau de la pointe de l'un des piquets jusqu'à ce que le cordon à poids atteigne l'angle; alors la mesure de la descente est l'excès. Laisse un des deux hommes circuler du côté où tu veux niveler et garde dans ta mémoire, une à une, chaque déviation positive et négative, et retranche toujours la plus petite de la plus grande; le reste est la différence des deux lieux. Sont-ils de niveau tous les deux, alors l'eau coule difficilement; dans le cas contraire, elle coule facilement ou pas du tout. Si tu veux, fais aussi un tuyau, adapte-le au cordeau, et expérimente avec l'eau, alors tu n'as besoin ni de fil à plomb ni de la tablette.

Une autre méthode : Place-toi au premier puits et pose la règle de l'astrolabe horizontalement ; ensuite qu'un autre prenne une perche dont la longueur est égale à la profondeur du puits ; qu'il s'en aille du côté vers lequel tu veux amener l'eau, et qu'il la tienne toujours dressée jusqu'à ce que tu en voies la pointe par le dioptre ; en cet endroit-là l'eau coule sur le sol. Si l'éloignement est si grand, que tu ne puisses pas voir la pointe de la perche, alors apporte une lumière et opère de nuit. *Et Lui sait cela bien mieux !*

DEUXIÈME SECTION.

Recherche de la hauteur des objets élevés.

S'il est possible de parvenir au pied de la verticale et si le terrain est uni, dresse un bâton verticalement, et place-toi de manière que les rayons de ton œil passent par la pointe du bâton et vers le sommet de la hauteur ; ensuite mesure à partir de ta station jusqu'au pied de la hauteur ; multiplie le résultat par l'excès du bâton sur ta hauteur, divise le produit par la distance de ta station au pied du bâton et ajoute au quotient ta hauteur, c'est alors la quantité demandée.

Une autre méthode : Mets à terre un miroir, de sorte que tu puisses voir dedans le sommet de l'objet élevé ; ensuite multiplie la distance du miroir au pied de la hauteur par ta taille et divise le produit par la distance du miroir à ta station ; le quotient est alors la hauteur.

Une autre méthode : Dresse un bâton et cherche le rapport de son ombre à sa longueur ; il est précisément le même que le rapport de l'ombre de la hauteur à la hauteur même.

Une autre méthode : Cherche la longueur de l'ombre au moment où la hauteur du soleil monte à 45 degrés, c'est en même temps la mesure de la hauteur.

Une autre méthode : Place la règle de l'astrolabe à 45 degrés et place-toi de telle sorte, que tu voies par le dioptre la pointe de la hauteur ; mesure ensuite depuis ta station jusqu'au pied de la hauteur, et ajoute au résultat ta taille : la somme est la quantité demandée.

Les démonstrations de ces manières de procéder sont exposées dans mon grand ouvrage. J'ai aussi pour la dernière méthode une démonstration élégante, pour laquelle personne ne m'a devancé, et que j'ai communiqué dans ma glose marginale dans le livre Farsijjât-ol-Astrolabi (23).

(24). Mais si l'on ne peut pas parvenir au pied de la hauteur, d'une montagne, par exemple, alors regarde son sommet par la règle dioptrique, observe sur quelle ligne d'ombre se tient l'extrémité inférieure de la règle, et marque ta station. Ensuite tourne la règle sur une ligne d'ombre en avant ou en arrière, et ensuite avance ou recule jusqu'à ce que tu voies de nouveau la pointe de la hauteur. Mesure maintenant la distance entre les deux stations, et multiplie-la par 7 ou par 12, selon le mode de division de l'instrument.

TROISIÈME SECTION.

Recherche de la largeur des rivières et de la profondeur des puits.

Premièrement. Place-toi au bord de la rivière et observe son autre bord par la règle dioptrique, ensuite retourne-toi de manière à voir par la même règle dioptrique un endroit du sol, durant que l'astrolabe reste à sa place ; maintenant la distance entre ta station et cet endroit du sol est égale à la largeur de la rivière.

Secondement. Mets sur le puits quelque chose qui représente le diamètre de son contour, et laisse tomber en bas du milieu du diamètre, après que tu en auras marqué la place, quelque chose de lourd et de brillant, afin qu'en vertu de sa nature cela parvienne au fond du puits. Ensuite vise l'objet brillant par la règle dioptrique, de manière que ta ligne de vision donne un point de section avec le diamètre. Maintenant multiplie la distance entre la marque et le point de section, par la hauteur de ta taille, et divise le produit par la distance de ce point à celui de ta station ; le quotient est la profondeur du puits (25).

HUITIÈME CHAPITRE.

RECHERCHE DES INCONNUES PAR LA MÉTHODE DE L'ALGÈBRE.

Il se compose de deux sections.

PREMIÈRE SECTION.

On nomme l'inconnue : SHAÏ (chose); son produit par elle-même : MÀL (possession) ; le produit de SHAÏ par MÀL : CÂB (dé ou cube) ; de SHAÏ par CÂB : MÀL-I-MÀL ; de SHAÏ par MÀL-I-MÀL : MÀL-I-CÂB ; de SHAÏ par MÀL-I-CÂB : CÂB-I-CÂB, et ainsi de suite sans fin ; — d'abord viennent deux MÀL, ensuite l'un d'eux devient un CÂB puis tous les deux ; ainsi la septième puissance est MÀL-I-MÀL-I-CÂB, la huitième MÀL-I-CÂB-I-CÂB, la neuvième CÂB-I-CÂB-I-CÂB et ainsi de suite. Toutes ces puissances ascendantes et descendantes sont en proportion ; ainsi MÀL-I-MÀL est à CÂB comme CÂB est à MÀL, comme MÀL à SHAÏ, comme SHAÏ à UN, comme UN à UN DIVISÉ PAR SHAÏ, comme UN DIVISÉ PAR SHAÏ à UN DIVISÉ PAR MÀL (26).

Lorsque tu veux multiplier une puissance par une autre, additionne leurs nombres de position (exposants) si elles sont toutes deux d'un même côté de l'unité ; le produit est ensuite de même dénomination que cette somme ; par exemple : MÀL-I-CÂB par MÀL-I-MÀL-I-CÂB ; la première expression est de cinq, la seconde de sept degrés ; en conséquence, le produit est CÂB-I-CÂB-I-CÂB-I-CÂB quatre fois, et cela est véritablement la douzième puissance. Si elles sont de côtés différents, alors le produit est du degré de l'excès, et du côté qui contient l'excès; par exemple : UN DIVISÉ PAR MÀL-I-MÀL, multiplié par MÀL-I-CÂB, donne pour produit SHAÏ, et le produit de UN DIVISÉ PAR CÂB-I-CÂB-I-CÂB par MÀL-I-MÀL-I-CÂB, est : UN DIVISÉ PAR MÀL. S'il n'y a lieu à aucun excès, alors le produit porte le même nom que l'unité. L'explication plus exacte des méthodes de la division, de l'extraction de la racine carrée et des autres opérations est réservée pour mon ouvrage plus étendu.

Les opérations algébriques que les recherches des savants sont parvenues à découvrir, se bornent absolument à six, et leur exécution ne s'étend qu'au NOMBRE, à SHAÏ et à MÀL.

La table suivante sert à trouver les résultats de la multiplication et de la division de ces quantités, aussi l'ai-je admise ici pour plus de commodité et de brièveté ; voici sa composition :

Multiplicande.

Dividende. — Multiplicateur.

	Un div. par Màl	Un div. par Shaï	Un	Shaï	Màl	
Màl	Un	Shaï	Màl	Câb	Màl-i-Màl	Màl
Shaï	Un div. par Shaï	Un	Shaï	Màl	Câb	Shaï
Un	Un div. par Màl	Un div. par Shaï	Un	Shaï	Màl	Un
Un div. par Shaï	Un div. par Câb	Un div. par Màl	Un div. par Shaï	Un	Shaï	Un div. par Shaï
Un div. par Màl	Un div. par Màl-i-Màl	Un div. par Câb	Un div. par Màl	Un div. par Shaï	Un	Un div. par Màl
	Màl	Shaï	Un	Un div. par Shaï	Un div. par Màl	

Diviseur.

Multiplie les coefficients des deux puissances l'un par l'autre, le résultat est le coefficient du produit, dont le degré est celui qui se trouve là où les deux facteurs se rencontrent.

Si une soustraction a lieu, alors la quantité dont on retranche quelque chose s'appelle *positive*, par compensation, la quantité retranchée s'appelle *negative*. La multiplication d'une quantité positive par sa pareille, et d'une négative par sa pareille, donne un résultat positif; la multiplication de quantités d'espèces différentes donne un produit négatif. Multiplie les termes chacun à chacun, et retranche les négatifs des positifs. Par exemple : 10 et un shaï, multiplié par 10 moins un shaï, donne 100 moins màl; 5 moins shaï par 7 moins shaï, donne 35 et 1 màl moins 12 shaï; 4 màl et 6 moins 2 shaï par 3 shaï moins 5, donne 12 câb et 8 shaï moins (26 màl et 30). Dans la division, cherche ce qui, si tu le multiplies par le diviseur, devient égal au dividende; pour cet effet, divise le coefficient du dividende par le coefficient du diviseur, c'est là le coefficient du quotient, dont le degré est celui qui se trouve là où le dividende et le diviseur se rencontrent.

DEUXIÈME SECTION.

Sur les six (formes) algébriques.

La recherche des grandeurs inconnues, au moyen de l'algèbre, demande un coup d'œil pénétrant, une prudence sagace, de la contention d'esprit pour réfléchir sur ce que l'interrogateur a donné, et de la clairvoyance pour employer les moyens qui font trouver plus facilement la quantité demandée.

Pose pour le nombre demandé SHAÏ, et emploie-le, comme le prescrit le problème, en procédant de manière à parvenir à une équation. Si un côté contient une négation, on *la restaure* en additionnant sa pareille avec l'autre côté, cela s'appelle AL GÉBR (27); les termes de même espèce et de même valeur, dans les deux côtés, sont rejetés de l'un et de l'autre, et cela s'appelle : AL MOKABALÀH. Ensuite l'égalité a lieu soit entre un terme et un terme, et ce cas a trois formes, qui sont appelées MOUFRIDÀT (simples) ; soit entre un terme et deux termes, lequel cas a aussi trois formes qui se nomment MOUKTARINÀT (composées).

La première des formes MOUFRIDÀT : Un nombre connu est égal à un certain nombre de SHAÏ. Divise celui-là par le coefficient de celui-ci, le résultat est la quantité demandée. Exemple : quelqu'un a promis à ZAÏD 1000 et la moitié de ce qu'il a promis à AMROU, et à AMROU 1000 moins la moitié de ce qu'il a promis à ZAÏD. Appelle l'inconnue SHAÏ, alors AMROU a 1000 moins la moitié de SHAÏ, par suite ZAÏD a 1000 et 500 moins un quart de SHAÏ, et cela est égal à SHAÏ. Après GÈBR, 1500 est égal à 1 SHAÏ et un quart de SHAÏ; ainsi ZAÏD a 1200 et AMROU 400.

La seconde : des SHAÏ égalent des MÀL. Divise le coefficient de shaï par celui de màl, le quotient est la quantité inconnue. Exemple : des enfants s'étaient approprié la succession de leur père, qui consistait en un certain nombre de *dinars*, de telle sorte que le premier en avait reçu : Un, le second deux, le troisième trois et ainsi de suite, en augmentant chaque fois de un. Le juge redemanda ce qu'ils avaient pris, et le partagea entre eux en portions égales ; chacun en particulier en reçut sept. Combien d'enfants et combien de *dinars ?* Pose le nombre des enfants : SHAÏ, prends les deux termes externes, c'est-à-dire UN et SHAÏ, et multiplie leur somme par la moitié de shaï, alors il vient une moitié de màl et une moitié de shaï, c'est là le nombre de *dinars* ; car le produit de la somme de l'unité et d'un nombre quelconque par la moitié de ce nombre, est égal à la somme des nombres naturels depuis 1 jusqu'à ce nombre. Actuellement divise le nombre des *dinars* par shaï, qui est le nombre des enfants, il en doit résulter 7, comme l'a dit celui qui a posé le problème. Ensuite multiplie 7 par shaï, qui est le diviseur, il vient : 7 shaï égalent un demi màl et un demi shaï; et après *gébr* et *mokabalàh*, un màl est égal à 13 shaï; d'où shaï égale 13 et c'est là le nombre des enfants; multiplie-le par 7, et il y a alors 91 *dinars.* — Tu peux encore résoudre cette question et celles du même genre, à l'aide de deux fausses positions; mets-tu par exemple : pour le nombre des enfants, 5, il y a alors une première déviation de 4 par défaut; ensuite 9, alors la seconde déviation est pareillement de 2 par défaut; le premier résultat est 10, le second 36, leur différence 26 et la différence des déviations 2. — Mais voici un autre chemin plus facile et plus court, c'est-à-dire que l'on double le quotient, et le résultat diminué de 1 est le nombre des enfants (28).

La troisième : Un nombre est égal à une certaine quantité de màl. Divise le nombre par le coefficient de màl, la racine carrée du quotient est la quantité inconnue. Exemple : on a promis à Zaïd la plus grande de deux sommes d'argent, dont la somme est 20 et dont le produit est 96. Pose pour l'une d'elles 10 et shaï, pour l'autre 10 moins shaï, leur produit est 100 moins màl, et cela est égal à 96. Après *gébr* et *mokabalàh*, 1 màl est égal à 4, et shaï égal à 2. Ainsi l'une des sommes est 8, l'autre 12; c'est celle-ci la quantité demandée, celle qui lui a été promise.

La première des formes MOUKTARINÀT : Un nombre est égal à des shaï et à des màl. Complète la quantité de màl, de manière à être un entier, si elle est plus petite, et réduis-la à un seul, si elle est plus grande; modifie le nombre et les shaï dans le même rapport, en divisant tous les termes par le coefficient de màl. Ensuite élève au carré la moitié du coefficient des shaï, à ceci ajoute le nombre, et retranche de la racine carrée de cette somme le demi-coefficient des shaï, le reste est alors la quantité inconnue. Exemple : On a promis à ZAÏD une partie de 10, telle que la somme de son carré et de son produit par la moitié de l'autre partie fasse 12.

Pose shaï, son carré est màl, et la moitié de l'autre partie : 5 moins un demi-shaï ; le produit de cette quantité par shaï est 5 shaï moins un demi-màl ; d'où un demi-màl et 5 shaï sont égaux à 12 ; 1 màl et 10 shaï égalent donc 24. Nous retranchons la moitié du coefficient de shaï, de la racine carrée de la somme faite du carré du demi-coefficient de shaï, et du nombre. Alors il reste 2, et c'est là la partie demandée, qui lui était promise.

La seconde : Des shaï égalent un nombre et des màl. Après avoir complété ou réduit, retranche le nombre du carré du demi-coefficient de shaï, et ajoute la racine carrée du reste au demi-coefficient, ou retranche-la de celui-ci, le résultat est alors le nombre demandé. Exemple : un nombre est multiplié par sa moitié, 12 est additionné avec le produit, et il en résulte le quintuple du nombre. Multiplie shaï par sa moitié, alors un demi-màl ajouté à 12 est égal à 5 shaï, d'où 1 màl et 24 est égal à 10 shaï ; soustrais 24 du carré de 5, alors il reste 1, dont la racine carrée est encore 1 ; si tu l'ajoutes à 5, ou si tu l'en retranches, il en résulte le nombre demandé.

La troisième : Des màl sont égaux à un nombre et à des shaï. Après avoir complété ou réduit, ajoute le carré du demi-coefficient de shaï au nombre, et la racine carrée de la somme au demi-coefficient de shaï, cette somme est alors le nombre demandé. Exemple : quel est le nombre, tel que si on le soustrait de son carré, et si on ajoute le reste à ce même carré, en obtienne 10 ? Nous retranchons shaï de màl, et nous continuons de faire ce qui est prescrit, alors il vient 2 màl moins shaï égalent 10. Après *gébr* et *réduction*, màl devient égal à 5 et un demi de shaï. Le carré du demi-coefficient de shaï, ajouté à 5, donne 5 et un demi-huitième, dont la racine carrée est 2 et un quart ; à ceci, ajoute un quart, il en résulte 2 et un demi, et c'est là le nombre demandé.

NEUVIÈME CHAPITRE.

RÈGLES INSIGNES ET ARTIFICES SUBTILS, QUE LE CALCULATEUR NE PEUT ÉVITER, ET DONT IL LUI EST IMPOSSIBLE DE SE PASSER.

Je me suis borné à douze dans ce compendium.

La première règle (une de celles mises au jour par ma faible intelligence) : Si tu cherches le produit d'un nombre par lui-même, et par la somme de tous ceux qui le précèdent, ajoute-lui l'unité, et multiplie la somme par le carré de ce nombre ; la moitié de ce produit est le nombre demandé. Exemple : Nous cherchons le produit de 9, de la manière mentionnée ; nous multiplions 10 par 81, alors 405 est la quantité demandée.

La seconde : Si tu cherches la somme des nombres impairs dans leur ordre naturel, alors ajoute 1 au dernier nombre impair, et carre la moitié de cette somme. Exemple : La somme des nombres impairs depuis 1 jusqu'à 9 est 25.

La troisième : Pour sommer les nombres pairs, à l'exclusion des impairs, tu multiplies la moitié du dernier nombre pair par le nombre entier qui est plus grand qu'elle de 1. Exemple : depuis 2 jusqu'à 10 ; nous multiplions 5 par 6.

La quatrième : La somme des carrés d'après l'ordre de succession. Ajoute 1 au double du dernier nombre, et multiplie un tiers de cette somme par la somme des nombres eux-mêmes. Exemple : Les carrés depuis 1 jusqu'à 6 ; nous ajoutons au double de 6, l'unité ; un tiers de la somme est 4 et un tiers ; multiplie ceci par la somme des nombres eux-mêmes, c'est-à-dire par 21, c'est alors 91 le résultat.

La cinquième : La somme des cubes d'après l'ordre de succession. Carre la somme des nombres eux-mêmes, rangés à la file à partir de 1. Les cubes de 1 à 6; nous carrons 21, la réponse est alors 441.

La sixième : Si tu cherches le produit des racines carrées de deux nombres, qui sont : ou rationnels tous les deux, ou irrationnels tous les deux, ou de natures différentes; alors multiplie les nombres l'un par l'autre, la racine carrée du résultat est la quantité demandée. Exemple : le produit des racines carrées de 5 et de 20, est la racine carrée de 100.

La septième : Si tu veux diviser la racine carrée d'un nombre par la racine carrée d'un autre, alors divise les nombres l'un par l'autre, ensuite la racine carrée du quotient est la quantité demandée. Exemple : la racine carrée de 100 divisée par la racine carrée de 25 donne la racine carrée de 4.

La huitième (29) *:* Si tu veux trouver un nombre parfait, ce qui veut dire un nombre tel qu'il soit égal à la somme des parties qui le mesurent, alors additionne les nombres croissants par voie de duplication à partir de l'unité; si la somme n'est mesurée par aucun nombre en dehors de l'unité, alors multiplie-la par le dernier nombre additionné; le produit est un nombre parfait. Exemple : nous additionnons 1, 2 et 4, et nous multiplions 7 par 4, alors 28 est un nombre parfait.

La neuvième : Si tu veux trouver un nombre carré qui soit avec sa racine carrée dans le rapport d'un nombre donné à un autre nombre donné, alors divise le premier par le second; le carré du quotient est la quantité demandée. Exemple : trouver un carré qui soit avec sa racine, comme 12 est à 4; le résultat, après que tu as divisé 12 par 4, est 9. Si l'on eût dit : comme 12 est à 9, alors la réponse eût été 1 et sept neuvièmes, puisque la racine carrée de ceci est 1 et un tiers.

La dixième : Si l'on multiplie un nombre quelconque par un autre et si on le divise par le même, puisque l'on multiplie le produit par le quotient, le résultat est alors égal au carré du premier nombre. Exemple : nous multiplions le produit de 9 par 3 par le quotient qui naît de la division du premier nombre par le second, alors il vient 81.

La onzième : La différence entre deux carrés est égale au produit de la somme des racines carrées par la différence des racines carrées. Exemple : la différence entre 16 et 36 est 20; leurs racines carrées réunies font 10 et leur différence 2.

La douzième : Quand on divise deux nombres quelconques chacun l'un par l'autre, et que l'on multiplie les quotients entre eux, le résultat est, toutes les fois, l'unité. Exemple : si l'on divise 12 par 8, le quotient est 1 et un demi, et l'inverse deux tiers; le produit des deux est 1.

Et que Lui *soit mon aide pour l'accomplissement !*

DIXIÈME CHAPITRE.

PROBLÈMES DÉTACHÉS, D'APRÈS DIFFÉRENTES MÉTHODES QUI AIGUISENT L'INTELLIGENCE DE CELUI QUI APPREND ET LE FORTIFIENT DANS LA RECHERCHE DES INCONNUES.

Premier problème.

Un nombre est doublé, à ceci on ajoute 1 ; on multiplie la somme par 3, à ceci on ajoute 2 ; on multiplie cette somme par 4, et avec cela on additionne 3 : il en résulte 95.

Par l'algèbre. Nous faisons ce qui est prescrit, et il vient 24 shaï et 23 égalent 95. Après l'expulsion de la partie commune, les 24 shaï égalent 72 ; et ceci est la première des formes *Moufridât*, le quotient 3, et c'est le nombre demandé.

Par la fausse position. Nous prenons 2, alors nous dévions de 24 par défaut ; ensuite 5, alors nous dévions de 48 par excès. Le premier résultat est 96, le second 120, nous divisons leur somme par celle des déviations, le quotient est 3.

Par inversion. Nous soustrayons 3 de 95 et nous menons l'opération à ce point, que nous divisons 21 par 3, de 7 nous retranchons 1, et nous démidions le reste.

Deuxième problème.

S'il est dit : partage 10 en deux parts, dont la différence soit 5.

Par l'algèbre. Pose la plus petite part : shaï, alors la plus grande est shaï et 5, et leur somme 2 shaï et 5 est égale à 10; après mokabalàh, shaï est égal à 2 et un demi.

Par fausse position. Nous prenons pour la plus petite part 3, alors la première déviation est 1 par excès; ensuite 4, alors la seconde déviation est 3 par excès ; la différence des résultats est 5 et celle des déviations 2.

Par inversion (30). Comme la différence entre les deux parties d'un nombre est deux fois aussi grande que la différence entre le demi-nombre et l'une des parties, il en résulte que, si tu ajoutes la moitié de cette différence au demi-nombre, tu obtiens 7 et un demi ; et si tu l'en soustrais, il reste 2 et un demi.

Troisième problème.

Nous ajoutons à une somme d'argent son cinquième et cinq dirhems, nous retranchons de ce qui en résulte le tiers et cinq dirhems, et alors il ne reste rien.

Par l'algèbre. Pose pour la somme d'argent shaï et retranche de un shaï et un cinquième de shaï et 5, un tiers de cette somme, alors il reste 4 cinquièmes de shaï et 3 et un tiers ; si de cela 5 est retranché, il ne reste rien : donc cela est égal à 5. Après l'expulsion de la quantité commune, 4 cinquièmes de shaï égalent 1 et 2 tiers. Divise donc 1 et

2 tiers par 4 cinquièmes, le quotient est alors 2 et 1 douzième, et c'est le nombre demandé.

Par fausse position. Si nous prenons 5, la première déviation est 2 et 1 tiers par excès; si nous prenons 2, alors la seconde déviation est de 1 quinzième par défaut; d'où le premier résultat est 1 tiers, le second 4 et 2 tiers. Si nous divisons leur somme par la somme des déviations, c'est-à-dire par 2 et 1 tiers et 1 quinzième, ce qui est 2 et 2 cinquièmes, le quotient est alors 2 et 1 douzième.

Par inversion (31). Prends le 5, après la soustraction duquel il n'y a aucun reste, et ajoute-lui sa moitié, puisque c'était le tiers que l'on retranchait; ensuite soustrais de la somme 5 et de ce reste son sixième, puisque c'était le cinquième que l'on ajoutait.

Quatrième problème.

Quatre tuyaux conduisent à un vase, l'un d'eux le remplit en un jour, et chacun des suivants en un jour de plus; en combien de temps sera-t-il rempli?

Par proportion. Il est hors de doute que les quatre tuyaux, dans un jour, emplissent deux vases égaux au précédent, et, outre cela, encore 1 douzième. Or, ces quantités, 1 jour et 2 vases et plus douzième, sont dans le même rapport que le temps demandé avec le vase. L'inconnue est un des termes moyens; divise donc 1 par 2 un douzième, le quotient est 2 cinquièmes et 2 vingt-cinquièmes : car le diviseur est 25 douzièmes et le dividende 12 douzièmes.

D'une autre manière ; les quatre remplissent en un jour un vase qui contient 25 parties, dont le premier vase contient 12; et chaque partie est remplie dans la même partie du jour; d'où il suit que le premier vase est rempli en 12 des 25 parties d'un jour.

S'il était encore dit : Et en même temps est ouvert en bas un tuyau qui le vide en 8 jours, alors il n'y a pas de doute qu'à présent le quatrième tuyau remplit en un jour 1 huitième du vase ; par conséquent, les quatre tuyaux remplissent en un jour un vase égal au premier et ses 23 vingt-quatrièmes. Or, un jour est avec ce nombre dans le même rapport que le temps demandé avec le vase. Ainsi, divise le produit des termes externes par le terme moyen, le quotient est 24 quarante-septièmes.

De l'autre manière, les quatre remplissent en un jour un vase qui a 47 parties, dont 24 entrent dans le premier vase. Le reste est clair.

Cinquième problème.

Un tiers d'un poisson est enfoncé dans la vase, un quart dans l'eau, et il ressort de l'eau d'une longueur de 3 empans ; de combien d'empans est-il long?

Par proportion ; soustrais les deux dénominateurs de leur dénominateur commun, il reste 5; et 12 est avec 5 dans le même rapport que l'inconnue avec 3 ; le quotient, si tu divises le produit des termes externes par le terme moyen, est 7 et 1 cinquième, c'est là la longueur demandée.

Par l'algèbre ; cela est clair ; car tu poses shaï moins 1 tiers de shaï moins 1 quart de shaï, ce qui est 1 quart et 1 sixième de shaï, égale 3 ; ensuite divise trois par la fraction, alors il vient le résultat précédent.

Par fausse position ; cela est tout à fait clair, car tu poses 12, ensuite 24, alors la différence des résultats est 36 et la différence des déviations 5.

Par inversion ; ajoute à 3 son égal et ses 2 cinquièmes, puisque un tiers et un quart de tout nombre est égal à ce qui reste encore et aux deux cinquièmes de ce reste (32). Compare avec ceci les problèmes semblables, en considérant le rapport entre les fractions soustraites et ce qui reste, exprimé par le dénominateur général et en ajoutant au nombre que celui qui, a posé le problème a donné, ce que ce rapport exige.

Sixième problème.

Deuxp ersonnes étaient présentes à la vente d'un cheval; l'une d'elles disait à l'autre : ajoute avec ce que j'ai un tiers de ce que tu as, j'ai alors le prix du cheval; l'autre répondait : ajoute avec ce que j'ai un quart de ce que tu as, et j'ai le prix. Combien avait chacune d'elles et à combien s'élevait le prix?

Par l'algèbre; pose ce qu'a la première : shaï; ce qu'a la seconde : 3, à cause du tiers; si maintenant la première prend 1 de ces 3, alors elle a shaï et 1, et voilà le prix; mais si la seconde obtient ce qu'elle demande, alors elle a 3 et 1 quart de shaï, et ceci est égal à shaï et 1. Après mokabalàh, 2 devient égal aux 3 quarts de shaï, et shaï égal à 2 et 2 tiers; la seconde avait, comme il a été dit, 3; le prix est ainsi : 3 et 2 tiers.

Si tu prends au lieu des fractions les nombres entiers, alors la première a 8, la seconde 9, et le prix est 11.

(33). Ce problème est indéterminé, et pour résoudre ce problème et ceux qui sont semblables, il y a une méthode facile qui n'est pas rangée parmi les méthodes connues; elle consiste en ceci que dans chaque cas, on soustrait 1 du produit des dénominateurs des deux fractions, ce qui reste est le prix de l'animal; puis on soustrait l'un des dénominateurs, ce qui reste est ce qu'a la première (personne); puis l'autre dénominateur, ce qui reste alors est ce qu'a la seconde. Dans l'exemple soustrais de 12, premièrement 1 ensuite 4, ensuite 3, ce sont les restes qui sont les trois nombres demandés.

Septième problème.

Trois coupes sont remplies, la première de 4 livres de miel, une autre de 5 livres de vinaigre, une troisième de 9 livres d'eau. Les trois substances sont versées dans un vase et mélangées jusqu'à faire de l'oximel ; ensuite on en remplit de nouveau les coupes ; on demande combien dans chaque coupe il y aura de chaque sorte de substance (34).

Ajoute les poids et retiens bien la somme ; ensuite multiplie le nombre de livres qui se trouve dans chaque coupe, par chacun des trois poids, et divise le produit par la somme conservée dans ta pensée, c'est le quotient qui est le poids de ce qui se trouve dans la coupe de la même sorte que le multiplicateur. Ainsi multiplie 4 par lui-même, et divise le produit comme il est dit ci-dessus, il y a alors dans la coupe de 4 livres, 8 neuvièmes de livre de miel ; ensuite multiplie 4 par 5, etc. ; et dans cette même coupe il y a 1 livre et un neuvième de vinaigre ; ensuite par 9, etc. ; et dans cette même coupe il y a 2 livres d'eau ; le tout réuni fait 4 livres. D'autre part multiplie 5 par lui-même, par 4 et par 9, et fais comme il est enseigné, alors il se trouve dans la coupe de 5 livres, 1 livre et 7 dix-huitièmes de vinaigre, 1 livre et 1 neuvième de miel, et 2 livres et demie d'eau, ensemble 5 livres. Enfin procède de même avec 9, alors il se trouve dans la coupe de 9 livres : 2 livres de miel, 2 livres et demie de vinaigre et 4 livres et demie d'eau, ensemble 9 livres.

Huitième problème.

On demandait à quelqu'un combien il s'était écoulé de la nuit. Il répondit : Un tiers du temps écoulé est égal à un quart de celui qui reste encore. Combien s'était-il écoulé de temps et combien en restait-il encore ?

Par l'algèbre. Pose le temps écoulé shaï, alors ce qui reste est 12 moins shaï; d'où un tiers du temps écoulé est égal à 3 moins un quart de shaï. Après l'application de *gèbr*, un tiers et un quart du temps écoulé est égal à 3. Le quotient est 5 et un septième, et c'est le nombre des heures écoulées ; le reste se monte ainsi à 6 heures 6 septièmes.

Par proportion. Pose le temps écoulé : shaï et le reste 4 heures à cause du quart ; alors un tiers de shaï égale 1 heure : d'où shaï égale 3 heures, et la somme 7. Maintenant 3 est avec 7 dans le même rapport que le nombre inconnu avec 12. Divise donc le produit des termes externes par le terme moyen, alors le quotient est 5 un septième.

Neuvième problème.

Une perche est enfoncée dans un étang et ressort de l'eau de cinq aunes. Son bout inférieur restant solidement fixé, elle s'incline jusqu'à ce que sa pointe supérieure touche la surface plane de l'eau ; la distance entre l'endroit où elle ressortait de l'eau, et l'endroit où sa pointe touche l'eau est de dix aunes. Quelle est la longueur de la perche ?

Par l'algèbre. Pose la partie cachée dans l'eau . shaï, alors la perche est 5 et shaï, et il est clair qu'après son inclinaison elle est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont un des côtés de l'angle droit est 10 aunes, et dont l'autre est la mesure de la partie enfoncée dans l'eau, c'est-à-dire shaï. Par conséquent le carré de la perche, c'est-à-dire 25 et 1 màl et 10 shaï, est égal aux carrés de 10 et de shaï, c'est-à-dire 100 et 1 màl, d'après la proposition connue (35). Après l'expulsion de ce qui est commun, il reste 10 shaï égalent 75 , et le quotient est 7 et un demi, et c'est là la mesure de la partie enfoncée dans l'eau. La perche est donc longue de 12 aunes et demie.

Pour la résolution de ce problème et autres semblables, il y a encore d'autres méthodes, que tu peux chercher avec leurs démonstrations dans mon livre plus étendu; que Dieu le très-haut veuille m'assister dans son achèvement!

CONCLUSION.

Les savants qui sont forts dans cette doctrine, ont rencontré certains problèmes, dont la résolution a fixé leurs méditations, et dont la recherche a attiré leurs regards; ils ont entrepris par toutes sortes d'artifices de soulever le voile et ont tenté par tous les moyens d'arracher le rideau, mais ils n'ont pu découvrir aucun chemin et ils n'ont trouvé personne pour leur indiquer la route, personne pour les conduire. Depuis le temps que ces problèmes demeurent insolubles, ils se sont montrés rebelles contre tous les génies jusqu'à cette époque. Les savants compétents en ont mentionné quelques-uns dans leurs écrits, et en ont proposé une partie dans leurs recueils, pour prouver que cette science contient des difficultés capables de rebuter; pour réduire au silence ceux là qui prétendent qu'en fait de calcul, il n'est absolument rien qu'ils ne puissent exécuter, pour prévenir les calculateurs de ne pas prendre la peine de chercher la solution, si quelques questions de ce genre leur sont proposées, et pour exciter à les résoudre et à les dévoiler, ceux qui sont doués de facultés brillantes. C'est pourquoi, je produis dans ce traité sept de ces problèmes comme modèle, pour suivre les vestiges de ces hommes d'élite et pour marcher sur leurs traces. Ce sont les suivants :

1. Diviser 10 en deux parties, de telle sorte que si l'on ajoute à chacune d'elles sa racine carrée, et si l'on multiplie les deux sommes l'une par l'autre, il en résulte un nombre donné.

2. Si, à un carré l'on ajoute 10, alors la somme doit avoir une racine carrée, et si l'on en soustrait 10, le reste doit de même avoir une racine carrée.

3. A Zaïd l'on promet 10 moins la racine carrée de la part d'Amrou, et à Amrou 5 moins la racine carrée de la part qui a été promise à Zaïd.

4. Un nombre cube doit être partagé en deux parties, qui soient aussi des nombres cubes.

5. Dix est partagé en deux parties. Si nous divisons chacune d'elles par l'autre, et si nous additionnons les deux quotients, alors la somme est égale à l'une des deux parties de dix.

6. Trois carrés en proportion continue, dont la somme est un carré.

7. Si à un carré on ajoute sa racine et 2, si ensuite de ce même carré on retranche sa racine et 2, alors on doit pouvoir extraire la racine carrée de la somme et du reste.

Eh bien donc ! sache, ô noble frère, toi qui aspires après la précieuse richesse des problèmes, que réellement, je t'offre dans cette œuvre petite à la vérité, mais noble perle des bijoux nuptiaux de l'arithmétique, ce qui jusqu'à présent, n'a été réuni ni dans un traité ni dans un livre; reconnais donc sa valeur, et n'amoindris pas ce présent de noces; protége cette œuvre contre tous ceux qui n'appartiennent pas à sa famille, et ne l'envoie à personne autre qu'à celui qui souhaite de devenir son époux; ne la donne pas à un vil prétendant, afin que tu n'attaches pas des perles au cou d'un chien. Vraiment, la plupart de ses problèmes sont dignes de conservation et de soin, et méritent qu'on les cache à la plupart des hommes de ce temps-ci. Garde fermement mon legs avec toi, Dieu te gardera de même. Louanges au Seigneur, qui a favorisé son accomplissement, et m'a fait la grâce d'arriver à la conclusion (36).

NOTES.

Les notes qui ne sont pas extraites de celles de M. Nesselmann, sont signées A. M.

(1) Ces quatre parents du prophète sont : sa fille FATIME avec son époux ALI et ses deux fils HASAN et HOSSAÏN, que l'auteur poursuivant ses jeux de mots intraduisibles, appelle les quatre termes d'une proportion.

(2) On sait que les Persans reconnaissent ALI pour légitime successeur de MOHAMMED et sont appelés Shyites ou Schismatiques par les Turcs qui les regardent comme des hérétiques.

BEHA-EDDIN était très-vraisemblablement de la secte des Shyites.

(3) Les Grecs disaient *logoi* et *alogoi*, *effables* et *ineffables*, ou bien si l'on veut : *dicibles* et *indicibles*. Comme *logos* signifie en même temps *raison*, les Latins ont traduit par rationnels et irrationnels et nous les avons imités. Voir l'origine des expressions *rationnel* et *irrationnel*, expliquée par Kepler (*Journal de Mathématiques*, de M. Liouville, tome I, p. 101). A. M.

(4) Non-seulement BEHA-EDDIN, mais suivant M. STRACHEY (*Asiat. Resear.*, t. XII), tous les auteurs d'arithmétique arabes ou persans, regardent les Hindous comme les inventeurs des figures numérales de l'échelle décimale. Le passage suivant a été extrait par ce savant Anglais d'un traité d'arithmétique persan :

« Les sages de l'Inde voulant représenter convenablement les nombres, inventèrent ces neuf figures (*fig.* 4) :

» Quand une figure occupe la première place à droite, elle est regardée par eux, comme exprimant les unités ; la deuxième, les dizaines ; la troisième, les centaines ; la quatrième, les mille ; ainsi après le troisième rang, la première figure qui suit immédiatement représente les unités de mille, la deuxième les dizaines de mille, la troisième les centaines de mille et ainsi de suite. En conséquence, toute figure au premier rang vaut le nombre d'unités qu'elle exprime ; toute figure au second rang vaut le nombre de dizaines que sa forme indique ; au troisième rang, le nombre des centaines, et ainsi de suite. Quand une figure est vacante à l'un des rangs, l'on écrit un chiffre semblable à un petit cercle 0 pour conserver sa place. »

A cause de la similitude du chiffre cinq et du petit cercle choisi primitivement par les Hindous, comme symbole du vide, les Arabes, les Malais, les Persans, etc., marquent le zéro par un point. A.M.

(5) *Balance* est la traduction fidèle du mot arabe *mîzann* qui se trouve dans le texte. Nous avons préféré ce mot au mot *norm* adopté par M. Nesselmann. M. Taylor de Bombay dit positivement que les Arabes appellent *balance*, la preuve par 9, qu'ils appliquent à leurs règles arithmétiques (V. *Hist. de l'Astron. anc.* de Delambre, dern. chapitre). Il est vrai que selon lui le mot est *tarazou* et non *mîzann*, mais *tarazou* est plutôt persan qu'arabe.

A. M.

(6) L'auteur appelle nombre simple, non-seulement le nombre qui n'a qu'un chiffre, mais encore le produit d'un nombre d'un chiffre par une puissance quelconque de 10; et nombre composé, celui qui est formé de plusieurs chiffres significatifs.

(7) M. Strachey trouve cette règle remarquable en ce que son application a quelque point de ressemblance avec l'usage des tables de Logarithmes; mais selon M. Delambre, ce n'est rien autre chose que la méthode des *fonds* substitués aux *analogues*, qu'il a expliquée dans son arithmétique des Grecs. A. M.

(8) L'application de cette règle devient superflue pour le cas où les deux facteurs sont l'un et l'autre au-dessous de 5, mais la règle est toujours vraie. Dans le cas même énoncé par l'auteur, le moyen de trouver le produit, formulé par lui, paraîtra inutile au premier abord, mais nous devons réfléchir que cette méthode ne suppose pas la connaissance préalable de la table de multiplication, dite de Pythagore; bien plus, l'existence seule de cette règle peut paraître un argument contre l'opinion avancée par Hutton et beaucoup d'autres après lui, que les Arabes sont redevables de leur algèbre aux Grecs. A. M.

(9) Cette règle est applicable au cas où les deux nombres au lieu d'être resserrés entre 20 et 100, sont compris entre 10 et 100.

A. M.

(10) On observera que l'inspection du Shabacah ou réseau, suffit pour démontrer que le nombre des chiffres d'un produit de deux nombres, a pour maximum la somme des nombres de chiffres des facteurs et pour minimum, cette somme diminuée de 1.

L'usage de cette table ressemble à celui des bâtons de Neper. Suivant M. Taylor de Bombay, cette méthode est enseignée dans toutes les écoles de l'Inde; mais elle ne se trouve dans aucun livre Sanscrit; les astronomes n'en font aucun usage. A. M.

(11) Pour nous qui écrivons de gauche à droite, c'est le second au lieu de l'avant-dernier; ceci doit être observé une fois pour toutes.

(12) Cette règle mérite d'être remarquée; elle suppose l'égalité approximative :

$$\sqrt{a^2+\varepsilon}=a+\frac{\varepsilon}{2a+1}, \text{ d'où } a^2+\varepsilon=a^2+\varepsilon-\frac{\varepsilon}{2a+1}\left(1-\frac{\varepsilon}{2a+1}\right).$$

Or, dans la pratique, $\varepsilon<2a+1$; d'où il suit que l'on obtient pour la racine cherchée, une erreur toujours par défaut. Le maximum d'approximation a lieu pour $\varepsilon=1$, $\varepsilon=2a$; dans ces deux cas, la valeur trouvée pour le carré est trop petite de $\frac{2a}{(2a+1)^2}$; plus ε s'écarte de ces deux limites, et plus l'erreur est grande. Nous devons observer qu'elle sera toujours la même, soit que l'on pose $\varepsilon=1+n$ ou $\varepsilon=2a-n$.

Roushen Ali donne une seconde formule :

$$\sqrt{a^2+\varepsilon}=a+\frac{\varepsilon}{2a}$$

qui fournit une approximation par excès.

(13) Ici il y a erreur, car il peut arriver que le reste soit égal au carré soustrait. Supposons par exemple que la dernière tranche à gauche du nombre proposé soit 8. Le carré que l'on en devra soustraire est 4 et le reste aussi 4. Voici donc un exemple qui prouve que le reste peut égaler le carré soustrait. Si, de même que M. Nesselmann, je suppose que la dernière tranche à gauche soit 3, c'est-à-dire que le plus grand *nombre* cherché soit 1, évidemment j'aurai un reste plus grand que le carré soustrait; mais il me semble que de cet exemple unique, parfaitement vrai au fond, on ne peut ri-

goureusement se prévaloir contre l'auteur; en effet Behâ-Eddin dans son Introduction dit en termes formels : *la vérité est que l'unité n'est pas un nombre;* pour lui 1 ne peut donc être ce plus grand *nombre* parmi les unités qu'il prescrit de chercher.

A. M.

(14) La langue arabe n'a de noms simples que pour les fractions dont le dénominateur ne contient que les nombres depuis 2 jusqu'à 10. De là, pour cette classe de fractions, le nom de *articulées*, qui peuvent s'exprimer seules, sans secours étranger. Quant aux autres fractions, qui portent le nom de *muettes*, elles doivent s'exprimer à l'aide des *articulées*. Les premières, si je peux m'exprimer ainsi, jouent le rôle des voyelles, et les secondes, le rôle des consonnes.

Quand un dénominateur a une valeur plus grande que 10, les Arabes le décomposent en facteurs tous moindres que 11, si cela est possible. Quand cela n'est pas praticable, ils décomposent néanmoins le dénominateur en ses facteurs quelconques, et lisent l'expression qui en résulte, comme ce que nous appelons fractions de fractions.

(15) Ce dernier paragraphe suppose l'année de 360 jours, le mois de 30 jours et la semaine de 7. Cette année n'existe pas chez les Arabes qui ont l'année lunaire de 354 et 355 jours, mais bien chez les Persans, en faisant abstraction toutefois de leurs cinq jours supplémentaires pour compléter l'année solaire.

La lettre Aïn de l'alphabet arabe se rencontre dans les noms arabes des nombres 4, 7, 9, 10.

(16) Le dirhem est vraisemblablement le même mot que drachme. Mais il y avait différentes sortes de dirhems chez les Arabes, de même que différentes sortes de drachmes chez les Grecs; on ne saurait donc établir ici le rapport du dirhem dont il s'agit, à toute autre unité monétaire. A. M.

(17) La suite des opérations à effectuer, indiquées par l'auteur dans cette dernière question, a besoin d'une courte explication.

Le problème mis en équation, donne :

1° $$\left(x+\frac{x}{2}+4\right)+\frac{1}{2}\left(x+\frac{x}{2}+4\right)+4=20.$$

2°
$$\frac{3}{2}\left(x+\frac{x}{2}+4\right)=16$$
$$x+\frac{x}{2}+4=10\frac{2}{3}$$
$$\frac{3}{2}x=6\frac{2}{3}$$
$$x=6\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\left(6\frac{2}{3}\right)=4\frac{4}{9}.$$

(17 bis) Les Arabes donnaient à la droite les noms de ***côté***, ***hauteur***, ***diamètre***, ***diagonale***, ***perpendiculaire***, ***flanc***, etc.

(18) Rouschen Ali s'exprime ainsi : « on ne trouvera dans aucun livre une description de cette sorte de trapèze, pour éclaircir ce point ; Dieu, peut-être, l'apprendra dans un temps à venir. » Le savant docteur Nesselmann avoue n'en savoir rien de plus. D'après le commentaire de Nasr Eddin, sur Euclide, les Arabes avaient pour le trapèze une définition plus large que la nôtre, et qui la renferme comme cas particulier. Une des figures qu'il donne comme représentant un trapèze n'a pas de côtés parallèles, n'a qu'un angle aigu, et paraît avoir des diagonales à angle droit. C'est peut-être là le concombre de Beha-Eddin. A. M.

(19) D'après Rouschen Ali, ces trois figures sont celles du n° 1 de la planche.

(20) Appelons a la base, b le côté moyen, c le plus petit côté, nous aurons :
$$b^2=a^2+c^2-2a-x$$
$$2a-x=a^2+c^2-b^2$$
$$x=\frac{a}{2}-\frac{b^2-c^2}{2a}.$$
Or
$$b^2-c^2=(b+c)(b-c)$$
donc
$$x=\frac{a}{2}-\frac{(b+c)(b-c)}{2a}.$$

A. M.

(21) L'aire du triangle est $\frac{ax}{2}$, en appelant a la base, et x la hauteur.

Mais $x^2=a^2\frac{a^2}{4}=\frac{3a^2}{4}$; d'où $x=\sqrt{\frac{3a^2}{4}}$

donc $\frac{ax}{2}=\frac{a}{2}\sqrt{\frac{3a^2}{4}}=\sqrt{3\frac{a^4}{16}}$. *c. q. f. d.*

A. M.

(22) La seconde règle ici posée pour trouver le volume de la sphère est défectueuse, car son application conduirait à la valeur $\pi = 2, 91\ldots\ldots$, comme le fait remarquer M. Nesselmann. Cependant je n'y puis voir, comme lui, une faute grossière, mais seulement un énoncé mal conçu, que l'on pourrait remplacer par celui-ci : *retranchez du cube du diamètre ses trois quatorzièmes, puis du reste le tiers de ce reste même;* cette règle coïncidera parfaitement avec la formule : vol. sphériq. $= \frac{1}{6}\pi D^3. \left(\pi = \frac{22}{7}\right)$.

Il n'est pas vraisemblable que l'auteur, après avoir donné un premier moyen exact pour mesurer le volume de la sphère, ait pu en proposer et conserver un éminemment faux.

A. M.

(23) Roushen Ali n'a jamais vu la glose dont il est ici question, et il pense que l'auteur a voulu sans doute faire allusion au traité en 20 chapitres, composé par Mohakkik de Thuss.

(24) Je reproduirai ici la note textuelle de M. Nesselmann :

Ici l'auteur est inintelligible et j'avoue que je n'ai pu me tirer de ce labyrinthe, qu'à l'aide du commentaire qui commence ainsi : « Sache que plusieurs divisent l'instrument en douze parties égales et d'autres en sept. Dans le premier cas, chaque ligne d'ombre (de division) reçoit le nom de *doigt;* dans le second cas, on l'appelle *pied.* » Cette explication comparée avec la règle donnée par l'auteur donne l'idée suivante de la construction de l'instrument. Soit le carré ABCD (*fig.* 2), l'alidade tourne autour du point fixe A et si le côté BC est divisé en douze ou en sept parties égales les lignes qui vont de A en E (point de division) se nomment lignes d'ombre. Voici maintenant le procédé qui n'est pas complétement expliqué dans l'auteur. Soit SP la hauteur à mesurer, on se place avec l'instrument $abcd$ en G, de sorte que le rayon Sa rencontre un point de division e, ensuite on amène l'alidade sur la division voisine e' et on marche vers G', jusqu'à ce que l'alidade Sa' passe par e'. Supposons que le nombre des divisions soit représenté par n, on a les proportions suivantes :

$$eb : ba :: aT : TS$$
$$e'b' : b'a' :: a'T : TS$$

mais $ba = b'a'$, on a donc $eb : e'b' :: aT : a'T$.

D'où $eb : e'b' - eb :: aT : GG'$, donc $aT = \frac{eb - GG'}{e'b' - eb}$.

D'où il suit que $TS = \frac{ba.GG'}{e'b' - eb}$.

Le dénominateur $= \frac{ab}{n}$, d'où $TS = n.GG'$.

Ce qui est la règle de Beha-Eddin. Le commentateur observe qu'il faut ajouter à ce résultat la taille de l'observateur, c'est-à-dire Ga ou PT pour avoir la hauteur totale.

(25) L'impossibilité d'obtenir des résultats exacts, par l'une ou l'autre de ces opérations, est assez évidente. La première est fondée sur ce principe, que sur une surface plane, deux points sont à égale distance du pied de la hauteur donnée de l'œil de l'observateur, quand les lignes de vision passant respectivement par ces points, sont également inclinées à l'horizon.

La seconde opération est celle-ci : laissez tomber le corps de A en E (*fig* 3), placez-vous en CD par exemple et observez le corps suivant la ligne DE qui coupe AC en B. Alors vous avez la proportion

$$BC : CD :: AB : AE = \frac{AB \times CD}{BC}.$$

(*Strachey.*)

(26) J'ai conservé les dénomination arabes : Shaï, màl, câb, màl-i-màl, màl-i-câb, etc.., plutôt que d'essayer de les traduire par des mots équivalents, ce que le docteur Nesselmann a pu faire grâce à la facilité avec laquelle la langue allemande se prête à la formation des mots composés.

Les Arabes appelaient l'inconnue (et ils n'en employaient qu'une) *Shaï* (chose). Les premiers algébristes de l'Europe chrétienne, Jean Hispalensis, Gérard de Crémone, Léonard de Pise et ses disciples, ont traduit ce terme par le mot latin correspondant *res* et l'Italien *cosa;* d'où : *Regola della cosa*, Règle de *coss*, pratique *cossike* et nombre *cossike* (racine d'une équation) chez nos plus anciens auteurs (Robert Recorde, *la pierre à aiguiser du jugement);* les Arabes appelaient le carré de l'inconnue *màl* possession ou biens, en latin *census*, en italien *censo*, termes de même signification et pris également par Léonard de Pise sous l'acception du montant des biens ou propriétés (Census : *quicquid fortunarum quis habet.* Steph. *Thes.*). Le cube était appelé par les Arabes *câb*, dé ou cube ; ils combinaient ces termes *mâl* et *câb*, pour la formation de puissances plus élevées, à la manière de DIOPHANTE, en faisant la somme des degrés, et non pas comme les Hindous en considérant leurs produits.

PACIOLO observe expressément qu'en dehors des 6 formes ici prescrites il n'y a pas d'équation possible : *altramente che in questi* 6 *discorsi modi non e possibile alcuna loro equatione*. A. M.

(27) Il est assez curieux que les Grecs, les prétendus inventeurs de l'algèbre, n'aient même pas dans leur langue, un mot pour désigner cette science, et que nous ayons emprunté aux Arabes, un terme qui pour eux exprimait une simple opération pour en faire le nom de la science elle-même. L'opération essentielle, qui consiste à *restaurer*, à *raccommoder*, s'appelle *gebr* ou avec l'article *al gebr*. Quand dans un membre d'une équation une quantité positive (*zäïd*) est suivie ou affectée d'une quantité négative (*nâkis*), on *restaure* la quantité positive, c'est-à-dire qu'on la *rétablit dans son intégrité* (CHASLES). La seconde opération essentielle, qui consiste à *comparer* les termes et à supprimer les valeurs égales de chaque côté, est appelée par les Arabes : *Mokabalah*. De là le nom de *Tarik al gebr wa almokabalah* (Méthode de restauration et de comparaison), pour cette branche de l'analyse, chez les Arabes, de là notre nom d'algèbre emprunté textuellement par LÉONARD de PISE et tous les plus anciens algébristes européens. A. M.

(28) Soit x le nombre des enfants, $\frac{(x+1)x}{2}$ sera le nombre total des *dinars*; $\frac{(x+1)\frac{x}{2}}{x}$ sera la part de chacun, d'après l'énoncé cette dernière valeur est égale à 7, nous aurons donc l'équation $\frac{(x+1)}{2}=7$, d'où $x=13$. Plus généralement, soit n la part rectifiée, le nombre des *dinars* sera nx; d'autre part, d'après le partage primitif, la totalité des *dinars* était $\frac{(x+1)x}{2}$. D'où il suit que $\frac{(x+1)x}{2}=nx$ ou $x=2n-1$.

(29) Pour la définition du nombre parfait, voyez Euclide (livre 7, déf. 22), et pour la règle : livre 9, proposition 36.

(30) Soient x et y les deux parties d'un nombre a :

$$x+y=a$$
$$x=a-y$$
$$x-y=a-2y=2\left(\frac{1}{2}a-y\right)$$

égalité sur laquelle l'auteur s'appuie.

Si $x-y=5$, on a donc $\frac{5}{2}=\frac{1}{2}a-y$.

Si actuellement on ajoute le demi-nombre, l'on a :

$$\frac{5}{2}+5=a-y=x$$

d'où $$x=7\frac{1}{2} \text{ et } y=2\frac{1}{2}.$$

(31) Voici le tableau des opérations indiquées par l'auteur :

$$\left(x+\frac{x}{5}+5\right)\times\frac{2}{3}=5$$
$$x+\frac{x}{5}+5=5+\frac{5}{2}$$
$$x+\frac{x}{5}+\frac{5}{2} \text{ ou } \frac{6x}{5}=\frac{5}{2}$$
$$\frac{6x}{5}-\frac{x}{5}=\frac{5}{2}-\frac{5}{12}$$

d'où : $$x=2\frac{1}{12}.$$

(32) C'est-à-dire que $\frac{7}{12}=\frac{5}{12}+\frac{2}{5}$ de $\frac{5}{12}$.

(33) Soit x ce qu'a la première personne, y ce qu'a la seconde, P le prix du cheval, $\frac{1}{m}$ et $\frac{1}{n}$ les fractions générales substituées à $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{4}$. On a alors : $P=x+\frac{1}{m}y$ et $P=y+\frac{1}{n}x$,

d'où $x+\frac{1}{m}y=y+\frac{1}{n}x$ ou bien $x\left(1-\frac{1}{n}\right)=y\left(1-\frac{1}{m}\right)$

$$\frac{x}{y}=\frac{mn-n}{mn-m}$$

si l'on pose $x=mn-n$ et $y=mn-m$, il en résulte $P=mn-1$.

(34) Soient a, b, c, les nombres de livres de miel, de vinaigre, d'eau. Le mélange contient $(a+b+c)$ livres. De ces $(a+b+c)$

livres, on prend l livres je suppose, et l'on veut trouver dans quelle proportion, pour chaque coupe, le miel, le vinaigre et l'eau concoureront à former ces l livres de mélange.

Pour la 1[re] substance on aura :

$$x = \frac{l.a}{a+b+c}, \text{ pour la 2}^{\text{e}} \frac{lb}{a+b+c}, \text{ pour la 3}^{\text{e}} \frac{lc}{a+b+c}.$$

(35) Dans le texte arabe, on trouve : *d'après la figure de la fiancée*. D'où a pu provenir cette désignation, c'est ce qui n'a pas encore été expliqué.

(36) Comme on l'a vu, l'auteur dit expressément que les questions énoncées ci-dessus, sont inaccessibles aux algébristes de son temps. Les unes sont impossibles, les autres conduisent à des équations de degré superieur, qui n'ont aucune racine rationnelle ; ainsi la troisième donne l'équation finale $x^4-20x^2+x+95=0$, la dernière question fournit les deux équations : $x^2+x+2=y^2$ et $x^2-x-2=z^2$, qui ne donnent pour x, que la valeur négative $-\frac{17}{16}$. La quatrième est la plus intéressante, son impossibilité dépend du fameux théorème, énoncé pour la première fois par Fermat, en 1657, et démontré par Euler. Ainsi les Arabes l'ont eu quelques siècles avant nous.

Il ne paraît pas d'après ce qui précède que les Arabes se servissent de notations algébriques ou de symboles d'abréviation, ni qu'ils eussent quelque connaissance de l'algèbre de Diophante. D'autre part, bien qu'ils ne semblent pas avoir possédé l'algèbre hindoue dans tous ses développements, il est pourtant probable que cette science leur vînt de la même source que l'arithmétique. Les traités d'algèbre arabes et persans, suivant M. Strachey, ainsi que quelques anciens ouvrages européens, commencent par l'arithmétique, que l'on y appelle l'arithmétique des Hindous ; leur seconde partie est consacrée à l'algèbre, mais elle laisse dans une complète ignorance sur l'origine de cette branche des mathématiques. Très-vraisemblablement, leur algèbre étant numérique, les auteurs la regardaient comme partie intégrante, mais dernière partie de l'arithmétique.

A. M.

QUELQUES OBSERVATIONS

Relatives à la figure du carré de l'hypoténuse (*).

PAR M. HENRI D'ANDRÉ,
élève de l'institution Laville.

—

Si sur les côtés d'un triangle rectangle BIB′ (*fig.* 39) dont l'hypoténuse est égale à $2a$, on construit des carrés, et qu'on vienne à supposer le sommet I mobile sur la circonférence BRB′.

1° Les sommets D et D′ sont toujours à égale distance de l'axe Yy élevé sur le milieu de AA′, et les sommets G et G′ à même distance de la droite Zz.

Il résulte en effet de l'égalité des trois triangles B′D′E′, B′KI, G′IN′ d'une part, de l'égalité des triangles BDE, BIK, GIN d'une autre part, qu'on a $BE = B'E' = G'N' = GN = IK$.

2° La diagonale commune DD′ tourne autour d'un point fixe R, qu'on obtient en prenant sur Yy à partir du point O, une distance égale à $3a$.

Pour le démontrer j'observe que

$$CR = \frac{D'E' + DE}{2} = \frac{B'K + BK}{2} = a.$$

On en déduit comme corollaires immédiats que les points G et G′ restent constamment sur une circonférence ayant son centre en R et pour rayon $a\sqrt{2}$, et par suite que les points S

(*) Il y a dans ce travail intéressant des longueurs que nous n'avons pas eu le temps de faire disparaître. Nous y reviendrons. Tm.

et S′ parcourent respectivement les deux circonférences décrites sur BR et B′R comme diamètres.

3° Les points D et D′ décrivent deux circonférences de rayon a, tangentes en R à l'axe des Yy.

Car les lignes AB et DG prolongées déterminent le troisième sommet d'un triangle rectangle égal à BIB′.

4° Si l'on joint DA et D′A′, ces lignes se coupent en un point M dont la distance à l'axe Yy est toujours le tiers de la distance du point mobile I à ce même axe : la même propriété a lieu si l'on joint DA′ et D′A.

La comparaison successive des triangles semblables A′D′F′ et PMA′, PMA et ADF donne les deux proportions :

$$D'F' : MP :: A'F' : PA',$$
$$PM : DF :: PA : AF;$$

d'où en les multipliant par ordre et supprimant les facteurs égaux communs aux deux termes de chaque rapport,

$$D'F' : DF :: PA : PA';$$

on en tire

$$D'F' + DF : PA + PA' :: DF' - DF : PA - PA';$$

or

$$D'F' + DF = 2OR = 6a, \quad PA + PA' = 2a,$$
$$D'F' - DF = B'K - BK = 2CK,$$
$$PA - PA' = 2PO.$$

Donc

$$3a : a :: CK : OP \qquad C.\,Q.\,F.\,D$$

S'il s'agissait du point M′, on comparerait les triangles semblables

A′D′F′ et AM′P′, A′P′M′ et DA′F.

Remarque. Lorsque le point I parcourt la demi-circonférence inférieure, on reconnaît des propriétés analogues, mais dont l'énoncé reçoit certaines modifications ; ainsi on peut voir qu'alors la diagonale DD' tourne autour du centre du carré, et que les distances des points M, M' et I à l'axe Yy sont égales entre elles.

5° Trouver 1° le lieu des points M ; 2° des points M'.

Supposons que le point I parcoure la demi-circonférence BRB' ; nous allons tâcher d'abord de découvrir par des considérations *à priori* la forme du lieu cherché.

La courbe est symétrique par rapport à l'axe des Y ; lorsque le point I est en R que l'on peut regarder comme son point de départ, le point M est situé sur la partie négative de l'axe des Y à une distance égale à $3a$; le point I se meut en parcourant le quart de circonférence BR, le point M s'éloigne de l'axe des X, son abscisse étant toujours le tiers de l'abscisse du point I ; enfin lorsque ce dernier point a atteint l'autre extrémité du quadrant, le point M est situé à une distance infinie de l'axe des X ; quant à son abscisse elle est égale à $\frac{a}{3}$; donc si l'on mène une parallèle à l'axe des Y, à cette distance, cette ligne sera asymptote de la courbe ; en répétant la même figure à gauche et observant que la tangente au point où la courbe coupe l'axe des Y est horizontale (car c'est la limite des positions successives d'une corde parallèle à l'axe des X, lorsque ses deux points d'intersection sont venus se réunir en un seul), on aura ébauché suffisamment la forme de la courbe.

Cherchons son équation ; pour cela, soient x', y' les coordonnées du point I, x et y les coordonnées variables du point M, on aura :

$$(1) \quad (y'-2a)^2+x'^2-a^2=0, \quad x'=-3x. \quad (2)$$

Maintenant reportons-nous à l'une des proportions, dont nous nous sommes servis plus haut,

$$AF : AP :: DF : MP,$$

et remplaçons-y ces côtés par leurs valeurs. On a :

$$y'-2a : a+x :: 3a-x' : y = \frac{(a+x)\,(3a-x')}{y'-2a.}\ (3).$$

Éliminant x' et y' entre ces trois équations, on trouvera :

$$y^2(9x^2-a^2)-9\,(x^2-a^2)^2=0,$$

équation du quatrième degré qu'il s'agit de discuter. Cette équation ne renfermant que des puissances paires d'x et d'y, la courbe qu'elle représente est rapportée à son centre comme origine ; par conséquent il suffit de faire croître x et y positivement. Résolvons-là par rapport à y, on trouve :

$$y=\pm\frac{3\,(a^2-x^2)}{\sqrt{a^2-9x^2}},$$

$$x=0\ldots\ldots\ y=3a.$$

$$x \text{ augmente } < \frac{a}{3}\ldots\ldots y \text{ augmente.}$$

$$x=\frac{a}{3}\ldots\ldots\ y=\infty.$$

Ce tableau nous montre que la courbe est comprise entre deux parallèles menées à des distances de Yy égales à $\frac{a}{3}$, et qu'elle a ses droites pour asymptotes. Le coefficient angulaire de sa tangente

$$-\frac{9xy^2+18\,x\,(a^2-x^2)}{(9x^2-a^2)y}$$

devient nul pour $x=0$; donc aux points s et s' la tangente est horizontale; d'ailleurs chacune des branches est constamment convexe vers l'axe des X; car à cause de la symétrie du lieu, si l'une d'elles était sinueuse, la courbe pourrait être coupée par une ligne droite en plus de quatre points.

En résumant cette discussion, on voit que l'équation nous donne deux branches indéfinies tandis que nous n'avions trouvé dans notre premier aperçu que la branche inférieure. A quoi tient cette anomalie? On peut l'expliquer en remontant aux équations du problème; car la circonférence BRB' et sa symétrique par rapport à l'axe des X ont la même équation; d'un autre côté en vertu de la relation (3), lorsque y change de signe, la quantité $y' - 2a$ change aussi de signe; mais comme elle entre au carré dans l'équation du cercle, l'équation du lieu ne change pas; ainsi par suite de cette particularité de calcul elle se trouve convenir aux points qu'on obtiendrait en effectuant au-dessous de l'axe des X les mêmes constructions qu'au-dessus, quoiqu'elle n'ait pas été formée pour ce cas-là.

La discussion du lieu va confirmer l'exactitude de cette interprétation en nous conduisant à une équation qui dans les mêmes circonstances représentera une courbe non rapportée à son centre.

Nous allons chercher, comme ci-dessus, la forme du lieu en considérant le mouvement du point. Lorsque le point I est en R les droites DA' et D'A' se confondent avec les diagonales du carré, par conséquent la courbe part du centre de ce carré; le point I parcourt le quadrant BR. Le point M' s'élève; mais son abscisse est toujours le tiers de l'abscisse du point I; enfin lorsque ce point est venu en B, l'un des carrés s'est réduit à zéro, l'autre est égal au carré AB A'B'; donc pour avoir le point correspondant il faut mener A'B, prolonger A'B' d'une quantité égale à elle-même, joindre son extrémité avec le point A, et les lignes se couperont au point cherché; son abscisse est égale à $\frac{a}{3}$; il est facile de reconnaître sur la figure que son ordonnée est quadruple de l'abscisse; ce point là est un point limite; par conséquent la parallèle à l'axe des Y menée à une distance $\frac{a}{3}$ sera tangente à la courbe; j'aurai à gauche une partie parfaitement symétrique; d'ailleurs la tangente au point initial est horizontale, donc elle présente sa convexité aux points L et L'.

Pour déterminer l'équation du lieu nous aurons les relations :

$$(y'-2a)^2+x'^2-a^2=0, \quad (1) \quad x'=3x \; (2).$$

Et à cause de la similitude des triangles DA'F, M'A'P',

$$y : 3a-x' :: a+x : y',$$

$$y'=\frac{(3a-x')\,(a+x)}{y}.$$

Et en éliminant x' et y' il viendra :

$$\frac{\{9(a^2-x^2)^2-2ay\}^2}{y^2}+9x^2-a^2=0,$$

ou bien, en réduisant et ordonnant par rapport à y,

$$(3x^2+a^2)y^2-4a(a^2-x^2)y+3(a^2-x^2)^2=0,$$

$$y=\frac{a^2-x^2}{3x^2+a^2}\left(2a\pm\sqrt{a^2-9x^2}\right).$$

La courbe étant symétrique par rapport à l'axe des X nous ferons croître x positivement depuis zéro jusqu'à $\frac{a}{3}$.

$$x=0 \ldots\ldots\; y_1=3a.$$

$$y_2=a.$$

$$x \text{ augmente } < \frac{a}{3} \ldots\ldots\; y_1 \text{ diminue.}$$

$$y_2 \text{ incertain.}$$

$$x=\frac{a}{3} \ldots\ldots\; y_1=y_2=\frac{4a}{3}.$$

La courbe coupe l'axe des Y en deux points à des distances de l'origine égales l'une à a, l'autre à $3a$; de ces points partent deux arcs de courbe qui viennent se réunir en un point L dont l'abcisse est égale à $\frac{a}{3}$, et l'ordonnée à $\frac{4a}{3}$. Même figure à gauche de l'axe des Y.

Le coefficient angulaire de sa tangente est

$$\tang \alpha = -\frac{6xy^2 + 8axy - 12x(a^2 - x^2)}{2(3x^2 + a^2)y - 4a(a^2 - x^2)};$$

pour $x = 0$ elle est parallèle à l'axe des X, et pour $x = \frac{a}{3}$ elle lui est perpendiculaire, comme nous l'avions prévu.

Ainsi la courbe de l'équation, si elle n'offre pas d'inflexions, que semble exclure l'uniformité de la courbe génératrice, a la forme d'une ovale inscrite dans un rectangle dont les dimensions seraient $2a$ et $\frac{2a}{3}$.

On peut remarquer qu'ici le lieu différent du premier n'est plus rapporté à son centre comme origine, et cela ne doit pas étonner, puisque la cause de ce phénomène géométrique a disparu avec la nature des calculs; mais ce deuxième exemple offre une particularité aussi remarquable que le premier; car la discussion de l'équation, nous a donné une ovale entière pour la courbe qu'elle représente, tandis que le point ne décrit effectivement que la partie inférieure terminée brusquement aux points L et L'.

Pourquoi le lieu n'est-il pas fidèlement représenté par l'équation émanée de sa génération?

C'est que lorsqu'on met en équation le lieu d'un point assujetti à un mouvement mécanique, il peut se faire que la relation constante établie entre les coordonnées de chacun des points de ce lieu, ne soit pas exclusive à ces points; ainsi par exemple le lieu du sommet d'un angle, dont les côtés passent par deux points fixes, est un segment de cercle. L'équation à laquelle on est conduit représente le cercle entier. Il serait superflu de multiplier les exemples de ce genre; cette observation suffit pour expliquer le défaut d'harmonie qui existe entre la courbe cherchée et son équation. Il y a plus, on peut même dire qu'il eût été impossible de trouver une équation *algébrique* qui représentât exactement la forme du lieu ; car de pareilles équations n'ont pas de points d'arrêt.

THÉORÈME SUR LA LEMNISCATE.

PAR M. HENRI D'ANDRÉ,
élève de l'institution Laville.

Théorème. Le lieu des points qui ont pour abscisses les cordes inscrites dans un cercle, et pour ordonnées les cordes correspondantes de la moitié de l'arc, est une lemniscate de Bernoulli (les axes sont rectangulaires).

Démonstration. Dans l'équation qui donne la corde en fonction de la corde de la moitié de l'arc,

$$x^2 = R\left(2R - \sqrt{4R^2 - C^2}\right),$$

remplaçons C par y et faisons évanouir le radical, il viendra toutes réductions faites :

$$R^2 y^2 + x^4 - 4R^2 x^2 = 0,$$

équation d'une lemniscate.

Note. Cette observation ingénieuse donne le moyen de construire la lemniscate à l'aide du cercle. Tm.

SOLUTIONS DES PROBLÈMES 122 et 123 (p. 202).

PAR M. HENRI D'ANDRÉ,
élève de l'institution Laville.

Problème 122. La portion d'une normale comprise entre une conique et un axe principal multipliée par la perpendiculaire abaissée du centre sur la tangente qui passe par l'extrémité de sa normale donne un produit constant pour le même axe principal.

Ce théorème énoncé, je crois par M. Chasles, d'une manière un peu différente, sert de base à la belle construction donnée par ce géomètre pour déterminer les axes d'une ellipse de grandeur et de position lorsqu'on connaît deux diamètres conjugués aussi de grandeur et de position; c'est sans doute à cause de cet usage accidentel qu'il a trouvé place dans le cours de géométrie analytique de M. Cirodde, notre professeur. La démonstration analytique de ce théorème est exposée tout au long dans l'ouvrage ci-dessus mentionné; je me suis alors proposé de trouver une démonstration de ce théorème qui fût géométrique autant que possible.

Je prendrai une ellipse pour fixer les idées; la démonstration s'appliquerait à peu de chose près à l'hyperbole.

Je vais démontrer d'abord que

$$OG \times MC' = b^2 \quad (\textit{Fig. } 34).$$

La ligne F'T est divisée harmoniquement aux points

$$F', \ C, \ F, \ T,$$

d'où la proportion

$$F'T : FT :: F'C : FC.$$

Or

$$F'T : FT :: F'H' : FH, \quad F'C : FC :: F'H' - MC : MC - FH.$$

Et à cause du rapport commun

$$F'H' : FH :: F'H' - MC : MC - FH,$$

on en tire :

$$F'H' \times MC - FH \times F'H' = F'H' \times FH - FH \times MC,$$
$$(F'H' + FH)\, MC = 2FH \times F'H' - FH \times MC,$$
$$OG \times MC = b^2.$$

Reste à faire voir que

$$\mathrm{OG} \times \mathrm{MD} = a^2.$$

Pour cela rappelons-nous la valeur de l'abscisse à l'origine de la normale, nous aurons :

$$\mathrm{OC} = \mathrm{MP}\frac{c^2}{a^2}. \text{ ou bien } \frac{\mathrm{OC}}{\mathrm{MP}} = \frac{c^2}{a^2}$$

et à cause des triangles semblables DMP, DOC,

$$\frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{DC}} = \frac{a^2}{c^2},$$

et par suite *dividendo*

$$\frac{\mathrm{MC}}{\mathrm{MD}} = \frac{b^2}{a^2}; \quad \frac{\mathrm{MC} \times \mathrm{OG}}{\mathrm{MD} \times \mathrm{OG}} = \frac{b^2}{a^2}; \quad \mathrm{MD} \times \mathrm{OG} = a^2.$$

C. Q. F. D.

Note. Ce problème a été résolu aussi par M. Henri Dormoy.

Problème 123. Si dans une parabole les rayons vecteurs sont en progression géométrique, les sinus des angles que forment les tangentes menées par les extrémités respectives des rayons vecteurs avec l'axe sont aussi en progression géométrique.

L'équation polaire de la parabole en prenant pour pôle le foyer et pour axe polaire l'axe principal de la parabole est

$$\rho = \frac{p(1 + \cos\varphi)}{\sin^2\varphi},$$

(p désignant le demi-paramètre).

Maintenant je remarque, qu'un rayon vecteur quelconque ρ et la parallèle menée par son extrémité à l'axe polaire sont également inclinées sur la tangente ; donc si α est l'angle que forme cette droite avec l'axe principal,

$$\alpha = \frac{1}{2}\varphi; \text{ donc } \sin\alpha = \sin\frac{1}{2}\varphi;$$

mais en vertu de transformations connues

$$\rho = \frac{p}{2\sin^2 \frac{1}{2}\varphi},$$

d'où l'on déduit :

$$\sin\frac{1}{2}\varphi = \sin\alpha = \sqrt{\frac{p}{2\rho}};$$

or il est clair que si les valeurs données à ρ forment une progression géométrique dont la raison est k, les valeurs correspondantes de sin α en formeront une autre dont la raison sera

$$\frac{1}{\sqrt{k}}. \quad \text{C. Q. F. D.}$$

Note. Ce problème a été résolu aussi par M. Henri Dormoy.

CONSÉQUENCES

De la règle des signes de Descartes (suite, v. p. 239).

PAR M. GUILMIN,
Ancien élève de l'École normale.

—

7. *Le nombre des racines imaginaires d'une équation* f(x)=0, *dont le premier membre est incomplet, n'est jamais moindre que le plus grand nombre de variations que l'on peut introduire, en remplaçant les termes manquants par des termes ayant des signes arbitraires.*

Soit V le nombre des variations du polynôme $F(x)$ obtenu en complétant $f(x)$ de manière à introduire le plus de variations possible ; soit k le nombre des variations nouvelles ;

alors $V = v + k$. Soit V' le nombre des variations de $F(-x)$, on sait que $V + V' = m$. Mais de quelque manière qu'on complète $f(x)$, la somme $V + V'$ relative aux polynômes complets obtenus, $F(x)$ et $F(-x)$, est toujours égale à m; lors donc que V a sa plus grande valeur, ce qui est notre hypothèse, V' a sa plus petite valeur, laquelle est v' (2e Remarque). Puisque $V' = v'$, on a $V + v' = m$; remplaçant V par $v + k$, il vient $v + v' + k = m$, ou $k = m - (v + v')$. Or, on sait que $m - (v + v')$ est le minimum du nombre des racines imaginaires de l'équation $f(x) = 0$. On peut donc dire aussi que le nombre des racines imaginaires d'une équation $f(x) = 0$ n'est jamais moindre que le plus grand nombre de variations qu'il est possible d'introduire en complétant arbitrairement son premier membre.

Conséquences.

8. *Dans toute équation à coefficients réels, s'il manque un terme entre deux termes de mêmes signes, l'équation a au moins deux racines imaginaires*

En effet, entre ces deux termes de mêmes signes + et +, par exemple, on pourra intercaler un terme ayant le signe contraire —, ce qui donnera + — +; on comptera alors 2 variations là où il n'y en avait aucune. Puisqu'il est possible d'augmenter au moins de deux le nombre des variations, le nombre k du théorème précédent est au moins égal à 2; donc, etc.

S'il manque deux termes entre deux termes de signes quelconques semblables, ou dissemblables, l'équation a au moins deux racines imaginaires.

En effet, commençons par introduire un terme de même signe que le deuxième de ceux que nous considérons; le nombre des variations ne sera pas altéré; car ce nouveau terme formera nécessairement 2 permanences avec les 2 existants s'ils étaient de mêmes signes, ou une variation et une permanence s'ils offraient une variation. Nous sommes maintenant retombés dans le cas précédent : il manque un terme entre deux termes de mêmes signes, les deux derniers des trois signes dont nous venons de parler. Il nous sera possible d'introduire deux variations en écrivant un deuxième terme de signe contraire à ceux entre lesquels nous le placerons. Le nombre des variations en $f(x)$ peut donc, dans ce cas, être augmenté au moins de deux ; donc, etc.

Plus généralement, *s'il manque* $2n+1$ *ou* $2n+2$ *termes entre deux termes* t *et* t' *de mêmes signes, l'équation* $f(x)=0$ *a au moins* $2n+2$ *racines imaginaires.*

En effet, supposons qu'entre deux termes positifs,

$$\begin{array}{cc} t, & t', \\ + & + \end{array}$$

il manque $2n+1$ termes, par exemple ; j'introduis d'abord un signe $+$, puis un signe $-$, puis un signe $+$, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on ait intercalé $2n+1$ termes ou $2n+1$ signes, nous aurons une suite comme celle-ci :

$$\begin{array}{lr} t, & t', \\ + - + - + \ldots\ldots & - + \end{array}$$

A chaque signe introduit, on compte évidemment une variation en comparant ce signe au précédent ; j'en introduis $2n+1$, j'ai donc compté ainsi $2n+1$ variations. Mais le premier signe introduit étant $-$, le deuxième $+$, le troisième $-$, etc., le $(2n+1)^e$ sera $-$; or, pour compter $2n+1$ variations, nous n'avons comparé le dernier signe introduit qu'à celui qui le précède, il restera encore à le comparer au signe $+$ de *t' existant* avant l'intercalation ; cela nous donnera une dernière variation, en tout $2n+2$. Ainsi, à la place de deux termes qui formaient permanence, nous avons une suite partielle offrant $2n+2$ variations ; donc, puisqu'on peut augmenter le nombre des variations de $f(x)$, au moins de $2n+2$, cette équation a au moins $2n+2$ racines imaginaires.

S'il manquait $2n+2$ termes entre t et t', en les intercalant comme dans le cas précédent, on créerait $2n+2$ variations nouvelles, comptées en comparant chaque nouveau signe à son précédent :

$$\begin{array}{l} t, \qquad\qquad\qquad\qquad\quad t', \\ (+-+-\ldots\ldots\ldots\ldots++); \end{array}$$

mais le $(2n+2)^{ième}$ signe introduit étant $+$, d'après ce qu'on a dit, ne ferait pas variation avec le signe $+$ de t' ; on aura une suite partielle offrant $2n+2$ variations à la place de deux termes qui n'en offraient aucune ; donc, etc.

S'il manque 2n *ou* 2n + 1 *termes entre deux termes*, t *et* t', *de signes contraires*, *l'équation* f(x) = 0 *admet au moins* 2n *racines imaginaires.*

Intercalons des termes comme précédemment entre les deux termes considérés, que nous supposerons avoir les signes $+$ et $-$, nous aurons une suite

$$\begin{array}{l} t, \qquad\qquad\qquad\qquad\quad t', \\ +-+-+\ldots\ldots\ldots\ldots-. \end{array}$$

S'il manque $2n$ termes, on comptera $2n$ variations en comparant chaque *nouveau* signe au précédent ; le $2n^{ième}$ signe introduit étant $+$, formera variation avec le signe $-$ du deuxième terme t' comprenant la lacune ; à la place de deux termes offrant une variation, on aura donc une suite partielle offrant $2n+1$ variations ; on en aura introduit $2n$; donc, etc.

S'il manque $2n+1$ termes, outre t et t', l'introduction de $2n+1$ termes arbitraires produira $2n+1$ variations, que l'on comptera en comparant chaque signe introduit à celui qui le précède ; le $(2n+1)^{ième}$ signe introduit sera —, et formera une permanence avec le signe de t', de sorte que le nombre des variations de t à t' sera en tout $2n+1$; de t à t' il y avait une seule variation auparavant ; on en a donc introduit $2n$; donc le nombre des racines imaginaires n'est pas moindre que $2n$.

Ainsi, le seul cas où l'on ne peut affirmer qu'une équation incomplète $f(x) = 0$ *a des racines imaginaires est celui où il manque seulement un terme entre deux termes de signes contraires.*

9. *Si une équation* $f(x) = 0$ *a au moins trois coefficients consécutifs en progression géométrique, elle a des racines imaginaires.*

Soit

$$f(x) = \dots Ax^n + Aqx^{n-1} + Aq^2x^{n-2} + \dots$$

Multiplions le premier membre $f(x)$ par $x - q$, nous aurons :

$$f(x)\,(x-q) = \begin{cases} \dots Ax^{n+1} + Aqx^n + Aq^2x^{n-1} + \dots \\ \dots -Aqx^n - Aq^2x^{n-1} - Aq^3x^{n-2} \dots \end{cases}$$
$$= \dots Bx^{n+1} + Cx^{n-2} \dots$$

B étant la somme algébrique des coefficients de x^{n+1} dans les deux lignes ; C étant la somme algébrique des coefficients de x^{n-2} dans les mêmes. Dans le premier membre de l'équation $f(x)\,(x-q) = 0$, il manquera deux termes entre deux signes consécutifs ; cette équation a au moins deux racines imaginaires, lesquelles appartiennent aussi à l'équation $f(x) = 0$, puisque, à l'exception de la racine réelle q, toutes les racines sont les mêmes dans les deux équations

$$f(x) = 0, \quad f(x)\,(x-q) = 0.$$

L'équation $f(x) = 0$ a donc au moins deux racines imaginaires.

10. *Si une équation* $f(x) = 0$ *a au moins quatre coefficients consécutifs en progression arithmétique, cette équation a des racines imaginaires.*

Soit

$$f(x) = \ldots . Ax^n + (A+d)x^{n-1} + (A+2d)x^{n-2} + (A+3d)x^{n-3} \ldots .$$

Multiplions $f(x)$ par $x - 1$.

$$\begin{array}{l}
\ldots . Ax^n + (A+d)x^{n-1} + (A+2d)x^{n-2} + (A+3d)x^{n-3} + \ldots . \\
x - 1 \\
\hline
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|r|r|l}
\ldots . Ax^{n+1} + (A+d) & x^n + (A+2d) & x^{n-1} + (A+3d) & x^{n-2} + \ldots\ldots\ldots . \\
\ldots\ldots\ldots . -A & -A-d & -A-2d & (-A-3d)x^{n-3} \ldots
\end{array}$$

$$f(x)(x-1) = \ldots . Bx^{n+1} + dx^n + dx^{n-1} + dx^{n-2} + Cx^{n-3} + \ldots$$

Nous savons ce que représentent B et C.

Le premier membre de l'équation, $f(x)(x-1) = 0$, ayant trois termes consécutifs en progression géométrique, cette équation a des racines imaginaires (théorème précédent). Mais ces racines appartiennent aussi à l'équation $f(x) = 0$, puisque toutes les racines de $f(x) = 0$ et de $f(x)(x-1) = 0$ sont les mêmes, à l'exception de la racine $x = 1$, qui est en plus dans $f(x)(x-1) = 0$.

$f(x) = 0$ a donc au moins deux racines imaginaires.

Note. Lorsqu'un symptôme annonce n couples de racines imaginaires et un autre symptôme n' couples ; on ne peut en conclure l'existence de $n + n'$ couples, puisqu'il peut y avoir coïncidence de racines ; or, dans le théorème de M. Sturm, annoncé page 115, si $fx(x-a)$ renferme $2k+1$ variations de plus que dans fx, il y a au moins k couples de racines imaginaires dans fx ; mais s'il y a n lacunes impaires entre permanences dans $fx(x-a)$, il y a aussi n couples de racines imaginaires. La démonstration que j'ai donnée de ce théorème (page 115) apprend qu'il existe au moins $k + n$ couples de racines imaginaires ; et c'est ce qu'on ne voit pas d'après la démonstration de la page 242 (voir aussi t. II, p. 250). Tm.

CONSTRUCTION APPROXIMATIVE

du Polygone de 17 côtés, note rectificative de celle de la page 226.

PAR M. BRETON (DE CHAMP),
Ingénieur des ponts et chaussées.

La construction indiquée à la page 226 ne fournit qu'une approximation grossière admissible tout au plus dans des figures de petites dimensions. Une erreur de calcul me l'avait fait croire plus grande. Pour dédommager les lecteurs qui ont pris la peine d'essayer cette construction, je ne crois pouvoir mieux faire que de leur offrir cette autre construction plus satisfaisante. *D'un point de la circonférence avec les* $\frac{74}{100}$ *du diamètre (trois quarts moins un centième) décrivez un cercle; les arcs dans lesquels il la partagera en feront sensiblement* $\frac{8}{17}$ *et* $\frac{9}{17}$.

THÉORÈME

sur les Surfaces et les Courbes algébriques.

PAR M. EUGÈNE JUBÉ,
licencié ès sciences mathématiques et physiques.

Si par deux points de l'espace on mène, parallèles entre elles deux sécantes à une surface dont l'équation est algébrique, de manière qu'elles la rencontrent suivant le plus de points possible, et qu'on fasse pour chaque sécante le produit des segments compris entre le point d'où elle émane, et ceux où elle rencontre la surface, le rapport entre ces deux produits est indépendant de la direction commune des deux droites.

Soient α, β, γ les coordonnées d'un point par lequel on mène une droite qui coupe suivant le plus de points possible une surface dont l'équation $F(x, y, z) = 0$ est algébrique. Transportons l'origine en ce point; l'équation de la surface deviendra $F(x + \alpha, y + \beta, z + \gamma) = 0$; ou en nommant r, θ, ψ les trois coordonnées polaires du point (x, y, z), elle sera $F(r \cos \theta + \alpha, r \sin \theta \cos \psi + \beta, r \sin \theta \sin (\psi + \gamma)) = 0$. En supposant que θ et ψ se rapportent à la sécante menée par la nouvelle origine, les valeurs de r données par l'équation seront celles des segments faits sur la droite, et toutes ces valeurs seront réelles, puisque par hypothèse la sécante coupe la surface suivant le plus de points possible. Le produit de tous ces segments sera donc égal au terme indépendant de r, divisé par le coefficient de sa plus haute puissance. Soit $\varphi(\theta, \psi)$ ce coefficient. Le terme sans r sera $F(\alpha, \beta, \gamma)$, et le produit des segments aura pour valeur $\frac{F(\alpha, \beta, \gamma)}{\varphi(\theta, \psi)}$. Pour une autre sécante parallèle partant d'un point $(\alpha'\beta'\gamma')$, on trouvera pour le produit semblable $\frac{F(\alpha', \beta', \gamma')}{\varphi(\theta, \psi)}$, où le dénominateur sera le même que précédemment.

Le rapport des deux produits sera donc indépendant de la direction commune des sécantes.

Ce théorème, comme on le voit aisément, a lieu aussi pour une courbe algébrique.

Si une des droites est tangente à la surface ou à la courbe, il faut considérer dans le produit correspondant le carré du segment compris entre le point de départ et le point de contact : ce sont alors deux ou plusieurs segments devenus égaux.

Si l'une des sécantes, ou toutes les deux, ne rencontraient pas la surface ou la courbe suivant le plus de points possible, il y aurait des segments imaginaires, et cependant le produit de tous les segments réels ou imaginaires de l'une serait toujours, quelle que fût la direction commune, dans un même rapport avec le produit de tous les segments réels ou imaginaires de l'autre. Mais dans ce cas, les valeurs des segments ne pourraient être considérées que comme des symboles analytiques. (V. t. III, p. 512.)

Ce théorème général appliqué aux surfaces ou aux courbes du second degré conduit naturellement à ces théorèmes de Newton :

Si à une courbe ou surface du second degré douée d'un centre on mène par un même point deux sécantes, les produits des segments faits sur chacune d'elles sont proportionnels aux carrés des diamètres qui leur sont parallèles ;

Deux tangentes partant d'un même point sont proportionnelles aux diamètres qui leur sont parallèles.

Que par deux points O, O' de l'espace on mène deux sécantes à une surface du second degré, parallèles entre elles ; comme le rapport des produits des segments de chacune d'elles est indépendant de leur direction, si la première tourne autour du point O, de telle sorte que le second point d'intersection avec la surface s'éloigne de plus en plus, il en sera de même pour sa parallèle ; et enfin, quand le second point d'intersection de la première sécante avec la surface sera à l'infini, auquel cas cette droite serait un diamètre de la surface (celle-ci étant alors un paraboloïde), sa parallèle menée par O' sera aussi un diamètre. On conclut aisément de ce qui précède que les sections faites sur une surface du second degré par deux plans parallèles sont semblables de forme et de position.

En effet, si l'une d'elles est une parabole, on pourra lui mener un diamètre; puis, par un point pris sur le plan de l'autre section une parallèle à ce diamètre, de manière à rencontrer la seconde courbe, et d'après ce qui vient d'être démontré, cette nouvelle sécante devra aussi avoir son dernier point d'intersection situé à l'infini. La seconde courbe d'intersection sera donc aussi une parabole semblable à la première de forme et de position.

Si la première courbe d'intersection a un centre, on peut par ce point mener deux diamètres quelconques, puis par le centre de la seconde courbe deux diamètres parallèles aux premiers; d'après le théorème général, les diamètres de l'une des sections seront proportionnels à ceux de l'autre; donc ce seront deux courbes semblables de forme et de position.

Enfin le théorème général appliqué à une section conique peut servir à démontrer la proposition de l'hexagramme de Pascal, savoir : quand un hexagone a ses sommets sur une même section conique, les points de concours des côtés opposés sont en ligne droite.

Soit en effet $aa'bb'cc'$ cet hexagone. Prolongeons les côtés alternatifs jusqu'à leur rencontre en A, B, C, et par un point quelconque O pris dans l'intérieur de la courbe, menons trois sécantes parallèles à AB, AC, BC. Nommons S, S', S'' les trois produits des segments faits sur chacune d'elles à partir du point O, et, pour abréger l'écriture, posons :

$$\mathrm{B}a = a_1 \quad \mathrm{C}b = b_1 \quad \mathrm{A}c = c_1 \quad \mathrm{C}a = a_2 \quad \mathrm{A}b = b_2 \quad \mathrm{B}c = c_2$$
$$\mathrm{B}a' = a'_1 \quad \mathrm{C}b' = b'_1 \quad \mathrm{A}c' = c'_1 \quad \mathrm{C}a' = a'_2 \quad \mathrm{A}b' = b'_2 \quad \mathrm{B}c' = c'_2.$$

On aura donc :

$$\frac{a_1a'_1}{\mathrm{S}''} = \frac{c_2c'_2}{\mathrm{S}}, \quad \frac{b_1b'_1}{\mathrm{S}'} = \frac{a_2a'_2}{\mathrm{S}''}, \quad \frac{c_1c'_1}{\mathrm{S}} = \frac{b_2b'_2}{\mathrm{S}'},$$

et en multipliant membres à membres

$$a_1a'_1b_1b'_1c_1c'_1 = a_2a'_2b_2b'_2c_2c'_2. \qquad (1)$$

Soient α, β, γ les points d'intersection des côtés du triangle ABC avec les droites $b'c$, ac', $a'b$, et posons :

$$B\alpha = \alpha_1 \qquad C\beta = \beta_1 \qquad A\gamma = \gamma_1$$
$$C\alpha = \alpha_2 \qquad A\beta = \beta_2 \qquad B\gamma = \gamma_2.$$

Les transversales $b'c$, ac', $a'b$ donnent :

$$\alpha_1 b'_1 c_1 = \alpha_2 b'_2 c_2, \ \beta_1 c'_1 a_1 = \beta_2 c'_2 a_2, \ \gamma_1 a'_1 b_1 = \gamma_2 a'_2 b_2,$$

d'où en multipliant membres à membres, et en vertu de l'équation (1), il vient :

$$\alpha_1\beta_1\gamma_1 = \alpha_2\beta_2\gamma_2.$$

Cette dernière relation exprime, comme on sait, que les trois points α, β, γ sont en ligne droite, et ce sont les points de concours des côtés opposés de l'hexagone.

Si on suppose que les points a et a', b et b', c et c' viennent à coïncider, le triangle ABC est circonscrit à la section conique, et la relation (1) devient :

$$a_1b_1c_1 = a_2b_2c_2;$$

d'où on conclut que les droites Aa, Bb, Cc se coupent au même point. De là ce théorème connu :

Les droites qui joignent aux points de contact, les sommets d'un triangle circonscrit à une section conique, concourent en un même point (*).

BIBLIOGRAPHIE.

MÉMOIRE DE MATHÉMATIQUE, par R. Chauvet, docteur ès sciences. Marseille, in-8°, 1846, 120 pag. sans planches.

Les monographies sont aussi utiles, aussi nécessaires dans

(*) V. Roguet, t. III, p. 304. Tm.

les doctrines mathématiques, que dans les sciences naturelles, et le public géomètre accueille avec faveur les travaux exécutés sur un point spécial de la science. Dans le present mémoire, l'auteur s'occupe principalement de la théorie des contacts dans les lignes et surfaces du second degré et de divers théorèmes qui en dérivent. La méthode indiquée pour mener les tangentes et les plans tangents consiste à opérer la division dans $\frac{f(x')-f(x'')}{x'-x''}$, et à faire ensuite $x'=x''$ dans le quotient. Ce procédé employé par Fermat, dans les problèmes de *maximis*, a été développé en 1764 par le géomètre anglais Landen, et aussi dans un mémoire devenu très-rare et intitulé : *Recherches sur les calculs différentiel et intégral, par le citoyen Ensheim. Paris, an VII*, in-4° de 28 pages. En suivant cette marche, l'auteur parvient à une équation qui se sépare en deux autres, dont l'une donne soit la corde, soit le plan de contact; une méthode analogue donne les diamètres et les plans diamétraux conjugués et autres. Il se livre à beaucoup de considérations sur le cône tangent à la surface du second degré; on y rattache sept autres cônes, passant par la même courbe de contact et ayant avec le premier cône d'intéressantes relations géométriques qui sont analytiquement développées, qu'il faut lire dans l'ouvrage et que l'on peut aussi consulter avec fruit pour ce qui concerne quelques propriétés des diamètres conjugués et la surface sphérique, lieu du sommet d'un angle trièdre trirectangle, circonscrit à une surface quelconque du second degré; on a d'ailleurs maintenant, des démonstrations fort simples de ce théorème de Monge, déduites soit de la géométrie pure, soit de l'analyse ou même de la théorie du mouvement (*V.* P. Breton; *Journal de Liouville*, t. III). Le mémoire est terminé par les moyens d'obtenir les différentielles des fonctions circulaires, exponentielles et logarithmiques ; en suivant toujours le même système, l'auteur suppose qu'on connaisse les développements en séries de sinus x, cos x; ensuite, il effectue la division dans $\frac{f(x)-f(x')}{x-x'}$, dans le quotient il pose $x'=x$, il trouve une nouvelle série qui est celle de cos x; d'où il conclut $\frac{d\sin x}{dx}=\cos x$, et ainsi de suite. L'auteur traite finalement de l'intégration des équations différentielles partielles du second ordre, à trois variables. Ce procédé d'intégration est celui qui a été mis en usage par Euler, qui consiste à ramener cette opération à l'intégration d'équations différentielles ordinaires ; méthode qui a pris de si grands développements, dans ces derniers temps.

Il s'est glissé des fautes typographiques assez graves ; nous devons signaler entre autres l'énoncé d'un théorème, au haut de la page 16, énoncé qui nous paraît faux. Nous attribuons à la même cause quelques locutions douteuses. Du reste, on doit féliciter M. Chauvet de s'être tenu à hauteur, de ne pas se traîner dans les ornières du vulgarisme élémentaire, et nous apprenons avec plaisir l'annonce d'un ouvrage plus étendu, et où il prendra sans doute en considération les travaux de ses devanciers. Tm.

NOTE SUR LES ANNUITÉS.

PAR M. HUET,
licencié ès sciences mathématiques,
professeur de mathématiques au collége de Toulon (*).

La démonstration par laquelle on établit ordinairement la

(*) Feu M. Serres, professeur de mathématiques à l'école de Sorèze, démonformule relative aux annuités, exige que l'on sache calculer la somme des termes d'une progression géométrique. On pourrait encore démontrer cette formule très-simplement sans le secours des progressions.

Soit C le capital emprunté, a la quotité de l'annuité, n le nombre des années et r l'intérêt de 1 franc par an. Il est clair que payer chaque année a francs, en commençant un an après le jour de l'emprunt, jusqu'à la fin de la $n^{ième}$ année, revient à donner au créancier le jour de l'emprunt une somme d'argent $\frac{a}{r}$, qui rapporterait a francs chaque année, en stipulant que cette somme d'argent serait rendue à la fin de la $n^{ième}$ année. Or, la somme $\frac{a}{r}$, au bout de n années, vaut $\frac{a}{r}(1+r)^n$; sur cette somme on doit rendre $\frac{a}{r}$, donc la dette est payée par le reste

$$\frac{a}{r}(1+r)^n-\frac{a}{r}=\frac{a}{r}\left\{(1+r)^n-1\right\}.$$

Mais cette dette reportée à la fin de la $n^{ième}$ année est $C(1+r)^n$; on a donc l'équation

$$\frac{a}{r}\left\{(1+r)^n-1\right\}=C(1+r)^n;$$

d'où

$$a=\frac{Cr(1+r)^n}{(1+r)^n-1},$$

qui est la formule connue au moyen de laquelle on calcule la quotité de l'annuité.

---

trait aussi la formule des annuités sans le secours des progressions; mais j'ignore quel était son genre de démonstration. Ce même professeur donnait aussi dans son cours depuis cinquante ans la note sur l'analyse indéterminée, trouvée depuis par M. Pilatte (*Annales de Gergonne*, tome II, page 230) et reproduite dans les *Nouvelles Annales*, tome II, p. 471 et tome III, page 97. Il m'a communiqué cette note il y a neuf ans, lorsque j'étais son collègue à l'école de Sorèze.

SOLUTION DU PROBLÈME 113 (page 167).

PAR M. DORMOY,
élève en spéciales.

—

Problème.

Étant donnée une progression arithmétique de n termes, la moitié de n fois le dernier terme, est toujours comprise entre la somme de tous les termes, et cette somme diminuée du dernier terme; démontrer cette proposition par la géométrie.

Solution.

L'énoncé suppose évidemment la progression croissante. Soit donc une pareille progression :

$$\div\ a.\ b.\ c.\ d.\ \ldots\ldots\ v.\ x.\ y.\ z.$$

Pour la représenter géométriquement, sur une droite indéfinie xy, je porte autant de longueurs égales (*fig.* 35), AB, BC. . . . VX, XY, YZ que la progression renferme de termes moins un; j'élève aux points A,B,C.....Y,Z, les perpendiculaires AA$'=a$, BB$'=b$, CC$'=c$ . . . . YY$'=y$, ZZ$'=z$, dont les sommets se trouveront évidemment tous sur la droite A$'$Z$'$; on peut ainsi représenter une progression arithmétique quelconque.

Cela posé, nous devons avoir :

$$a+b+c+d+\ldots\ldots+y+z>\frac{nz}{2}>a+b+c\ \ldots\ldots+x+y;$$

il suffira de faire voir que l'on a :

$$2(a+b+c+d+\ \ldots\ +y+z)>nz>2(a+b+\ \ldots\ +x+y).$$

A cet effet, prolongeons ZZ$'$ de Z$'$Z$''=a$, et AA$'$ de A$'$A$''=z$, tirons la droite $A''Z''$, et prolongeons les perpendiculaires qui représentent les différents termes de la progression ; on voit de suite que $B'B''=y$; $C''C'=x$.....

Il suit de là que :

$$AA''+BB''+\ldots+YY''+ZZ''=2(a+b+c+d\ldots+y+z).$$

Mais

$$AA''+BB''+\ldots+YY''+ZZ''=n.ZZ''=n(a+z),$$

et par conséquent :

$$2(a+b+c+\ldots+y+z)=n(z+a);$$

ce qui démontre la première partie de l'inégalité.

De l'expression précédente, nous tirons :

$$2(a+b+\ldots+y)=nz+na-2z;$$

pour que la seconde partie de l'inégalité

$$2(a+b+\ldots+x+y)<nz$$

soit satisfaite, il faudra donc que l'on ait :

$$na<2z,$$

et cette condition sera nécessaire et suffisante.

RECUEIL DE FORMULES

et de valeurs relatives aux fonctions circulaires et logarithmiques.

(Suite, v. p. 224.)

—

46. $$\left(1-2x\cos\frac{\pi}{2n}+x^2\right)\left(1-2x\cos\frac{3\pi}{2n}+x^2\right)\times\left(1-2x\cos\frac{5\pi}{2n}+x^2\right)+\ldots\left(1-2x\cos\frac{2n-1}{2n}+x^2\right)=$$
$$=x^{2n}+1$$ (Côtes) ; n nombre positif entier.

47. $(\cos x+\sqrt{-1}\sin x)^m=\cos mx+\sqrt{-1}\sin mx$. (Moivre) ; m quelconque.

48. $x+y+z=2\pi$; $1-\cos^2 x-\cos^2 y-\cos^2 z+2\cos x\cos y\cos z=$ $=0$.

49. $\sin x=\frac{1}{2}[\sqrt{1+\sin 2x}-\sqrt{1-\sin 2x}]$.

50. $\cos x=\frac{1}{2}[\sqrt{1+\sin 2x}+\sqrt{1-\sin 2x}]$.

51. $2\ \text{arc tang}=x=\text{arc tang}=\frac{2x}{1-x^2}$.

52. $\sin x\pm\sin y=2\sin\frac{1}{2}(x\pm y)\cos\frac{1}{2}(x\pm y)$.

53. $\cos x+\cos y=2\cos\frac{1}{2}(x+y)\cos\frac{1}{2}(x-y)$.

54. $\cos x-\cos y=2\sin\frac{1}{2}(x+y)\sin\frac{1}{2}(x-y)$.

55. $\sin(x+y)\sin(x-y)=\frac{1}{2}[\cos 2y-\cos 2x]$.

56. $\sin(x+y)\cos(x-y)=\frac{1}{2}[\sin 2x+\sin 2y)$.

57. $a\,\text{tang}\,x=b\,\text{tang}\,y$; $\text{tang}(x-y)=$

$$=\frac{(b-a)\,\text{tang}\,y}{a+b\,\text{tang}^2 y}=\frac{(b-a)\sin 2y}{b+a-(b-a)\cos 2y}.$$

58. $\cos 2x=2\cos^2 x-1$

$\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x$

$\cos 4x=8\cos^4 x-8\cos^2 x+1$

$\cos 5x=16\cos^5 x-20\cos^3 x+5\cos x$

$\cos 6x=32\cos^6 x-48\cos^4 x+18\cos^2 x-1$

$\cos 7x=64\cos^7 x-112\cos^5 x+56\cos^3 x-7\cos x$.

59. $\sin 2x=2\sin x\cos x$

$\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x$

$\sin 4x=\sin x(8\cos^3 x-4\cos x)$

$\sin 5x=\sin x(16\cos^4 x-12\cos^2 x+1)$

$$\sin 6x=\sin x(6\cos x-32\cos^3 x+32\cos^5 x)$$
$$\sin 7x=7\sin x-56\sin^3 x+112\sin^5 x-64\sin^7 x$$
$$\sin 8x=\sin x[128\cos^7 x-192\cos^5 x+80\cos^3 x-8\cos x]$$
$$\sin 9x=9\sin x-120\sin^3 x+432\sin^5 x-576\sin^7 x+$$
$$+256\sin^9 x.$$

60. $$\sin nx=2^{n-1}\sin x\sin\left(\frac{\pi}{n}-x\right)\sin\left(\frac{\pi}{n}+x\right)\sin\left(\frac{2\pi}{n}+x\right)\times$$
$$\times\sin\left(\frac{2\pi}{n}-x\right)\sin\left(\frac{3\pi}{n}+x\right)\sin\left(\frac{3\pi}{n}-x\right)\ldots\ldots$$

(autant de facteurs qu'il y a d'unités dans n).

$$\cos nx=2^{n-1}\cos\left(\frac{n-1}{n}\pi+x\right)\cos\left(\frac{n-1}{n}\pi-x\right)\times$$
$$\times\cos\left(\frac{n-3}{n}\pi+x\right)\cos\left(\frac{n-3}{n}\pi-x\right)\cos\left(\frac{n-5}{n}\pi+x\right)\ldots$$

(autant de facteurs que d'unités dans n).

61. $$n\,\text{séc}\,nx=\text{séc}\left(\frac{m}{n}\pi+x\right)+\text{séc}\left(\frac{m}{n}\pi-x\right)+$$
$$+\text{séc}\left(\frac{m-1}{n}\pi+x\right)+\text{séc}\left(\frac{m-1}{n}\pi-x\right)+$$
$$+\text{séc}\left(\frac{m-2}{n}\pi+2\right)+\text{séc}\left(\frac{m-2}{n}\pi+x\right)$$
$$+\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ \pm\text{séc}\,x\ ;\ (n=2m+1).$$

$$n\,\text{coséc}\,nx=\text{coséc}\,x+\text{coséc}\left(\frac{\pi}{n}-x\right)-\text{coséc}\left(\frac{\pi}{n}+x\right)-$$
$$-\text{coséc}\left(\frac{2\pi}{n}-x\right)+\text{coséc}\left(\frac{2\pi}{n}+x\right)+$$
$$+\text{coséc}\left(\frac{3\pi}{n}-x\right)-\text{coséc}\left(\frac{3\pi}{n}+x\right)$$
$$\ldots\ \mp\text{coséc}\left(\frac{m\pi}{n}-x\right)\pm\text{coséc}\left(\frac{m\pi}{n}+x\right);n=2m+1.$$

THÉORÈME SUR LES INTERSECTIONS DE CERCLES.

PAR M. GUSTAVE GUFFLET,
Elève de l'institution Barbet.

Étant données deux circonférences O et O′ (*fig.* 30) dans un même plan, proposons-nous de trouver le lieu géométrique des centres des cercles, qui coupent ces deux circonférences en des points situés aux extrémités d'un même diamètre.

Je prends des axes rectangulaires; pour origine, le centre O d'un des cercles; pour axe des x la ligne OO′ des centres; les équations des deux cercles seront alors :

$$(1) \qquad x^2+y^2=R^2; \qquad\qquad (2) \qquad y^2+(x-d)^2=R'^2,$$

d étant la distance des deux centres.

Soient α, 6 les coordonnées d'un point du lieu; l'équation d'une de ces circonférences sera, en appelant K son rayon :

$$(3) \qquad (y-6)^2+(x-\alpha)^2=K^2.$$

Retranchant l'équation (3) successivement de chacune des deux équations (1) et (2), on aura :

$$26y+2\alpha x-6^2-\alpha^2-R^2+K^2=0;$$
$$26y+2(\alpha-d)x-6^2-\alpha^2-R'^2+K^2=0;$$

équations qui représentent précisément les cordes d'intersection de chacun des deux cercles donnés avec la circonférence décrite du point (α, 6) comme centre. Exprimons que la première passe par le centre du cercle représenté par l'équation (1), et la seconde par le centre du cercle représenté par l'équation (2). On aura les deux relations :

$$(4) \quad \alpha^2+6^2=K^2-R^2; \qquad (5) \quad (\alpha-d)^2+6^2=K^2-R'^2.$$

Retranchant membre à membre pour éliminer K^2, on a :

$$\alpha = \frac{d^2 - (R^2 - R'^2)}{2d}.$$

Telle est l'équation du lieu. On voit qu'elle représente une droite perpendiculaire à la ligne des centres.

Actuellement, je remarque que les équations (4) et (5) ne sont autre chose que les équations des deux cercles donnés, dans lesquelles on aurait remplacé R^2 par $K^2 - R^2$ et R'^2 par $K^2 - R'^2$; or, comme en retranchant ces deux équations membre à membre, K^2 disparaît, on peut dire que, pour trouver le lieu cherché, il suffit de retrancher membre à membre les équations des deux cercles, après avoir changé toutefois R^2 en $-R^2$ ou R en $R\sqrt{-1}$.

2. On sait que, pour trouver l'axe radical de deux cercles, il faut retrancher leurs équations l'une de l'autre. Ainsi, si l'on a les trois équations :

$$A = R^2, \qquad A' = R'^2, \qquad A'' = R''^2 ;$$

(A, A', A'' représentant les premiers membres qui sont de la forme $(x - x')^2 + (y - y')^2$, y' et x' pouvant être nuls), les équations des axes radicaux seront :

$$(a) \quad A - A' = R^2 - R'^2, \quad A - A'' = R^2 - R''^2, \quad A' - A'' = R'^2 - R''^2 ;$$

et d'après ce que nous venons de voir, les équations des trois droites qui jouissent de la propriété énoncée dans la question seront :

$$(b) \quad A - A' = R'^2 - R^2, \quad A - A'' = R''^2 - R^2, \quad A' - A'' = R''^2 - R'^2.$$

D'un autre côté, la perpendiculaire élevée sur le milieu de la ligne des centres étant le lieu géométrique des points également distants de ces deux centres, si on désigne par x, y les coordonnées d'un point quelconque de la perpendiculaire élevée sur ce milieu de OO″ (*fig.* 30), par exemple, on aura la relation

$$y^2 + x^2 - (y - b)^2 - (x - a)^2 = 0\,,$$

a et b étant les coordonnées du point O″.

Mais cette équation n'est autre que la différence des deux équations des cercles O et O″ dans lesquelles on aurait fait le rayon égal à 0 On conclut de là que, pour avoir les équations des perpendiculaires élevées sur le milieu de la ligne des centres, il suffit de faire dans les équations des cercles, $R, R' \ldots = 0$, et de retrancher ensuite deux à deux ces équations ainsi modifiées. Ainsi, pour les trois cercles donnés, on aura les trois équations :

$$(c) \qquad A - A' = 0\,, \qquad A - A'' = 0\,, \qquad A' - A'' = 0.$$

On sait que les axes radicaux de trois cercles se coupent en un même point, et qu'il en est de même des perpendiculaires élevées sur le milieu de la ligne des centres ; on voit aussi que les trois droites représentées par les équations (b) se coupent en un même point ; car l'une quelconque des équations peut s'obtenir en prenant la différence des deux autres

3. Proposons-nous maintenant de démontrer que ces trois points d'intersection sont en ligne droite, et que le point d'intersection des perpendiculaires élevées sur le milieu de la ligne des centres est à égale distance des deux autres.

Supposons $\qquad R > R', \quad R' > R''.$

D'après le système d'axes que nous avons choisi, les équations des trois cercles sont :

$$y^2 + x^2 = R^2\,;$$
$$y^2 + (x - d)^2 = R'^2\,;$$
$$(y - b)^2 + (x - a)^2 = R''^2.$$

Pour avoir chaque point d'intersection, il suffit de deux lignes. Je prendrai donc seulement les deux premières équations de chacun des groupes (a), (b), (c). J'aurai en remplaçant A, A', A'' par leur valeur :

$$a' \begin{cases} 2dx - d^2 = R^2 - R'^2, \\ 2by + 2ax - b^2 - a^2 = R^2 - R''^2. \end{cases}$$

$$b' \begin{cases} 2dx - d^2 = R'^2 - R^2, \\ 2by + 2ax - b^2 - a^2 = R''^2 - R^2. \end{cases}$$

$$c' \begin{cases} 2x - d = 0, \\ 2by + 2ax - b^2 - a^2 = 0. \end{cases}$$

Si je désigne par x, y les coordonnées du point d'intersection des droites (a'); par $x'y'$ celles du point d'intersection des droites (b') et par $x''y''$ celles du point d'intersection des deux droites (c'), j'aurai :

$$x = \frac{d^2 + R^2 - R'^2}{2d}; \quad y = \frac{d(a^2+b^2+R^2-R''^2) - a(d^2+R^2-R'^2)}{2bd}.$$

$$x' = \frac{d^2 - R^2 + R'^2}{2d}; \quad y' = \frac{d(a^2+b^2+R''^2-R^2) - a(d^2-R^2+R'^2)}{2bd}.$$

$$x'' = \frac{d}{2}; \quad y'' = \frac{a^2+b^2-ad}{2b}.$$

Pour que ces points soient en ligne droite, il faut que l'on ait la relation

$$\frac{y''-y}{x''-x} = \frac{y''-y'}{x''-x'}.$$

Or, si on substitue pour x, x'.... leurs valeurs, on a :

$$\frac{y''-y'}{x''-x'} = \frac{d(R^2-R''^2) - a(R^2-R'^2)}{b(R^2-R'^2)},$$

$$\frac{y''-y}{x''-x} = \frac{d(R^2-R''^2) - a(R^2-R'^2)}{b(R^2-R'^2)}.$$

Donc ces trois points sont en ligne droite. De plus, si on prend les différences $x''-x$, $x''-x'$ entre l'abscisse du point d'intersection des perpendiculaires élevées sur le milieu de la ligne des centres et les deux autres points, on a :

$$x'' - x' = \frac{R^2 - R'^2}{2d}, \qquad x'' - x = \frac{R'^2 - R^2}{2d}.$$

Ces différences sont égales et de signe contraire ; ce qui nous montre que le point d'intersection des perpendiculaires élevées sur le milieu de la ligne des centres est à egale distance des deux autres. C. Q. F. D.

Les valeurs de x, x', x'' n'étant autre chose que les premières équations des trois groupes (a'), (b'), (c'), mises sous une autre forme, nous montrent, en supposant toujours les rayons différents, que l'axe radical de deux cercles est plus près du centre de celui qui est le plus petit, tandis que l'autre droite est plus rapprochée de celui qui est le plus grand ; du reste, ces deux lignes sont à égale distance de la perpendiculaire élevée sur la ligne des centres.

Si nous supposons $R=R'-R''$; alors les équations (a), (b), (c) se réduisent au seul groupe (2) ; donc alors l'axe radical, le lieu des centres des cercles qui coupent les deux autres en des points situés aux extrémités d'un même diamètre, se confondent en une seule droite, qui est la perpendiculaire élevée sur le milieu de la ligne des centres ; ce qui devait être en effet.

4. Proposons-nous maintenant cette question : Étant donné trois cercles extérieurs, en décrire un quatrième qui coupe les trois autres en des points situés aux extrémités d'un même diamètre.

D'après ce que nous venons de voir, il est clair que le centre du cercle cherché n'est autre chose que le point d'intersection des trois lignes représentées par les trois équations (b), il suffira d'en construire deux, et leur intersection donnera le centre.

On tire de la première :

$$x = \frac{d^2 - (R^2 - R'^2)}{2d}.$$

Construisons cette valeur ; pour cela je mène O'K (*fig.* 30) perpendiculaire à OO'; du point B comme centre avec OA pour rayon ; je décris un arc de cercle qui la coupe en K. Sur OO' je décris une demi-circonférence ; je porte O'K en O'K', je joins OK' et je prends OD = OK'. Je prolonge OO' d'une quantité O'M = OO'. Je mène K'M ; par le point D, je mène DC parallèle à K'M. Je porte OC en OG, et j'ai OG qui est précisément la valeur de x. Par le point G je mène une perpendiculaire à OO', et GL est la ligne cherchée.

Pour construire l'autre droite, je n'emploierai pas l'équation :

$$2by + 2ax - a^2 - b^2 = R''^2 - R^2.$$

Je remarque que si j'avais pris la ligne OO'' pour axe des x, j'aurais eu pour x, c'est-à-dire pour la distance de la droite au point O, une valeur qui ne différerait de celle que je viens de construire qu'en ce que d y serait remplacé par d' et R' par R''. Je construirai donc cette valeur comme j'ai construit la première, et j'aurai ainsi la droite PH. Le point P est donc le centre du cercle cherché. Pour avoir le rayon, je mène PO et QQ' perpendiculaires à PO. Je joins PQ', et si du point P, comme centre avec PQ' pour rayon, je décris un cercle, les points QQ', VV', SS' doivent se trouver aux extrémités d'un même diamètre.

Note. Soient $(x-m)^2+y^2=r^2$; $(x-m')^2+y^2=r'^2$ les équations des cercles donnés, et $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=k^2$ l'équation du cercle variable ; on aura :

$$2\beta y + 2x(\alpha - m) = \alpha^2 + \beta^2 - m^2 + r^2 - k^2$$

pour équation de l'axe radical du premier et du troisième cercle.

Si nous représentons par p la distance de cet axe au centre du premier cercle, on aura :

$$[2\alpha m - m^2 + k^2 - r^2 - \alpha^2 - \beta^2]^2 = 4p^2[\beta^2 + (m-\alpha)^2].$$

On a d'une manière analogue pour le deuxième et le troisième cercle :

$$[2\alpha m' - m'^2 + k^2 - r'^2 - \alpha^2 - \beta^2]^2 = 4p'^2[\beta^2 + (m'-\alpha)^2] ;$$

p et p' sont des longueurs données.

L'élimination de k donne la relation cherchée entre α et β, ligne du quatrième ordre ; passant aux coordonnées polaires, et faisant $m = 0$, on obtient :

$$2\rho(m'\cos\varphi - p) + e^2]^2 = 4p'^2(\rho^2 - 2d\rho\cos\varphi + m'^2),$$

ou $$e^2 = r'^2 + m'^2 - r^2 ;$$

si $p' = 0$, le second axe radical devient un diamètre, et l'équation du lieu est $2\rho(m'\cos\varphi - p) + e^2 = 0$; c'est celle d'une conique qui se réduit à une droite perpendiculaire à l'axe polaire, lorsqu'on a aussi $p = 0$, et alors les deux axes radicaux sont des diamètres ; c'est le cas du problème actuel. On étend facilement le même genre de calcul aux plans radicaux de trois sphères données relativement à une quatrième sphère variable (*V.* t. III, p. 101). Tm.

QUESTION

du concours d'admission à l'école normale, en 1845.

PAR M. DROT,
bachelier ès sciences.

Problème. Étant donnés un cercle O (*fig.* 36) et une droite PP' perpendiculaire au diamètre OH, trouver un point K tel qu'en menant par ce point une sécante quelconque MKM', et qu'en abaissant des points M et M', où elle rencontre la circonférence, des perpendiculaires MP et M'P' sur la droite PP', on ait la relation $\frac{1}{\mathrm{MP}} + \frac{1}{\mathrm{M'P'}} =$ constante k.

Solution. I. Prenons la droite PP' pour axe des y et la droite OH pour axe des x, H pour origine, et les axes rectangulaires. En posant $OH = d$, et appelant r le rayon du cercle, son équation sera :

$$y^2 + x^2 - 2dx + d^2 - r^2 = 0.$$

Posons la distance inconnue $HK = x'$; la droite MM' sera représentée par l'équation

$$y = m(x - x').$$

Cherchons les abscisses des points où cette droite rencontre le cercle : pour cela, remplaçons y par $mx - mx'$ dans l'équation du cercle ; on aura alors, après avoir ordonné :

(1) $$(m^2 + 1)x^2 - 2(m^2x' + d)x + m^2x'^2 + d^2 - r^2 = 0.$$

Remarquons que les valeurs de x données par cette équation ne sont autres que MP et M'P'. Or on doit avoir :

$$\frac{1}{MP} + \frac{1}{M'P'} = k,$$

ou, en chassant les dénominateurs,

(2) $$\frac{MP + M'P'}{MP \times M'P'} = k.$$

$MP + M'P'$ est la somme des racines de l'équation (1), et $MP \times M'P'$ en est le produit ; donc on a :

$$MP + M'P' = \frac{2(m^2x' + d)}{m^2 + 1},$$

$$MP \times M'P' = \frac{m^2x'^2 + d^2 - r^2}{m^2 + 1},$$

et, par suite, l'équation (2) devient :

$$\frac{2(m^2x' + d)}{m^2x'^2 + d^2 - r^2} = k,$$

ou, en chassant le dénominateur et ordonnant par rapport à m,

(3) $$x'(2 - kx')m^2 + 2d - (d^2 - r^2)k = 0.$$

Cette relation doit avoir lieu quel que soit m ; donc on doit avoir séparément :

$$x'(2 - kx') = 0, \tag{4}$$

$$2d - (d^2 - r^2)k = 0. \tag{5}$$

L'équation (4) donne pour seule solution convenable :

$$x' = \frac{2}{k};$$

l'équation (5) donne :

$$k = \frac{2d}{d^2 - r^2};$$

donc on a :

$$x' = \frac{d^2 - r^2}{d} = d - \frac{r^2}{d},$$

ce qui montre que le point k est le pôle de la droite PP'.

II. La discussion de la valeur de $\text{OK} = d - x' = \frac{r^2}{d}$ montre que : 1° quand la droite PP' est extérieure au cercle, le point K lui est intérieur ; 2° quand la droite PP' est tangente au cercle, le point K devient le point de tangence ; 3° quand la droite PP' coupe le cercle, le point K lui est extérieur.

Note. Soit $Ay^2 + Cx^2 + Ex + F = 0$ l'équation d'une conique rapportée à des axes conjugués quelconques, l'axe des x étant un diamètre ; soient x', y' les coordonnées du pôle de l'axe des y ; on a $x' = -\frac{2F}{E}$; $y' = 0$; l'équation d'une droite passant par ce point est $y = m\left(x + \frac{2F}{E}\right)$; les abscisses x des intersections de cette droite avec la conique sont données par l'équation :

$$E^2x^2(Am^2 + C) + Ex(4AFm^2 + E^2) + F(4AFm^2 + E^2) = 0.$$

La somme des racines inverses de cette équation est $-\frac{E}{F}$ quantité constante.

Donc le théorème subsiste pour une conique quelconque.

En prolongeant la droite MM′ jusqu'à ce qu'elle rencontre la droite PP′ en N, les quatre points M, K, M′, N sont situés harmoniquement, d'après une propriété connue des pôles et polaires; d'où il suit directement que KH est une moyenne harmonique entre PM et P′M′. Les quatre points P, H, P′, N sont aussi situés harmoniquement. Donc HN est une moyenne harmonique entre PN et P′N. Tm.

PROBLÈME 119, p. 202.

PAR MM. VAUQUELIN ET WOESTYN,
Élèves de l'École normale.

Une droite de longueur constante se mouvant entre deux droites fixes données dans l'espace, chaque point de la droite mobile décrit une ellipse. Toutes les ellipses sont dans des plans parallèles; leurs centres sont sur la plus courte distance entre les droites fixes; le lieu des ellipses est une surface du quatrième degré; la droite mobile tourne à chaque instant autour d'une droite de direction constante perpendiculaire aux deux plans parallèles déterminés par les droites fixes.

AB, A′B′ (*fig.* 37) sont les deux droites fixes; AA′ leur perpendiculaire commune. Je prendrai cette dernière droite pour axe des x, et pour origine le milieu O de la distance AA′. Un plan mené par le point O perpendiculairement à l'axe des x sera le plan des zy; l'axe des z sera la bissectrice de l'angle formé dans ce plan en menant par le point O des parallèles aux deux droites fixes ; l'axe des y sera une perpendiculaire à cette droite.

Les équations des deux directrices et de la droite mobile seront :

$$\left.\begin{array}{l} x=h \\ y=az \end{array}\right\}; \quad \left.\begin{array}{l} x=-h \\ y=-az \end{array}\right\}; \quad \left.\begin{array}{ll} x=mz+p & (1) \\ y=nz+q & (2) \end{array}\right\}.$$

La génératrice devant rencontrer chacune des directrices, on aura les deux équations :

$$(h-p)(a-n)=qm, \qquad (\alpha)$$
$$(h+p)(a+n)=qm. \qquad (\beta)$$

La droite interceptée doit être d'une longueur constante que je représenterai par $2r$; ce qui fournit une troisième relation :

$$h^2+a^2p^2=m^2(r^2-h^2). \qquad (3)$$

Au lieu des équations (α) et (β), on peut prendre celles que l'on obtient en les additionnant ou les soustrayant :

$$ha+pn=qm, \qquad (4)$$
$$nh+ap=0. \qquad (5)$$

Je dis d'abord que la génératrice en se mouvant fait un angle constant avec l'axe des x ; on a, en appelant α cet angle : $\cos^2\alpha=\dfrac{m^2}{m^2+n^2+1}$; je substitue à m^2 et n^2 leurs valeurs tirées des équations (3) et (5), $\dfrac{h^2+a^2p^2}{r^2-h^2}$, $\dfrac{a^2p^2}{h^2}$: je trouve alors :

$$\cos^2\alpha=\frac{h^2}{r^2}.$$

Le second membre est plus petit que l'unité, puisque la perpendiculaire commune est la plus courte ligne que l'on puisse mener entre deux droites données : de plus il est constant. Il suit de là que la génératrice se meut en faisant constamment le même angle avec l'axe des x.

Chaque génératrice fera de même avec un plan mené par une des directrices parallèlement à l'autre, un angle constant qui sera le complémentaire de α. Il en résulte alors qu'un même point de la droite interceptée restera dans un plan perpendiculaire à l'axe des x, puisque, dans chaque position de la génératrice, la distance au plan mené par l'une des directrices parallèlement à l'autre sera constante.

Il est facile de voir que ce point décrira une ellipse. Je projette, pour cela, les deux directrices en ab, ab' sur le plan de la courbe cherchée, les différentes génératrices se projetteront suivant des lignes de longueur constante [$2r \sin \alpha$] inscrites dans l'angle bab'; or on sait qu'un point quelconque de la projection de la génératrice décrit pendant son mouvement une ellipse dont le centre est en a, c'est-à-dire sur la plus courte distance.

Je vais chercher l'équation de la surface engendrée par la droite mobile; il me faut pour cela éliminer, entre les équations (1), (2), (3), (4), (5), les quatre quantités m, n, p, q; l'équation en x, y, z qui résultera sera l'équation de la surface cherchée.

Les équations (1), (2), (4), (5) donnent pour m et p les valeurs suivantes : $m = \frac{a(x^2 - h^2)}{azx - hy}$, $p = \frac{h(ahz - xy)}{azx - hy}$; je porte ces valeurs dans (3), et j'obtiens pour l'équation du lieu :

$$h^2(azx - hy)^2 + a^2h^2(xy - ahz)^2 + a^2(h^2 - r^2)(x^2 - h^2)^2 = 0.$$

Cette équation est bien du quatrième degré.

Je vais démontrer par le calcul qu'un plan perpendiculaire à l'axe des x coupe cette surface suivant une ellipse, résultat que j'ai obtenu plus haut par une autre méthode. Un plan $x = k$ coupera la surface suivant une courbe dont les équations seront :

$$x = k,$$
$$h^2(akz - hy)^2 + ah^2(ky - ahz)^2 + a(h^2 - r^2)(k^2 - h^2)^2 = 0.$$

Cette intersection est une courbe du second degré ; c'est une ellipse, car si je cherche ce que devient la quantité analogue à $B^2 - 4AC$, je trouve à un facteur positif près $-(k^2 - h^2)^2$, quantité négative, mais qui devient nulle pour $k = \pm h$. C'est qu'en effet, les sections faites par les plans dont les équations sont $x = \pm h$ sont les directrices elles-mêmes ; cette ellipse, obtenue par le plan dont l'équation est $x = k$ a son centre sur l'axe des x, puisque les termes du premier degré en y et z manquent dans son équation.

Note. Soit MM′ une position quelconque de la droite mobile ; M étant sur AB et M′ sur A′B′ ; par les points M et M′ menons des droites MI, M′I′ respectivement perpendiculaires à AB et A B′, et dans des plans déterminés par les droits fixes. Soit II′ la plus courte distance de ces deux perpendiculaires ; et dans les mêmes plans parallèles décrivons des circonférences, des points I et I′ comme centres respectifs et avec les rayons IM, I′M′ ; ces circonférences touchent les directrices AB, A′B′ en M et M′ ; dans une position infiniment voisine, la droite mobile pourra être considérée comme restant sur les deux circonférences ; elle tend donc à décrire un hyperboloïde de révolution autour de l'axe II′, qui est ainsi l'*axe instantané de rotation* autour duquel la droite MM′ tend à tourner ; il est aisé de voir que la distance de II′ à AA′ reste constante ; donc l'axe instantané de rotation décrit autour de AA′, une surface cylindrique, circulaire, droite. Le plan MII′ est perpendiculaire sur la directrice AMB ; de même, le plan M′II′ est perpendiculaire sur la directrice A′M′B′ ; donc l'axe instantané II′ est l'intersection de deux plans menés perpendiculairement aux directrices par les points M et M′.

Si les directrices sont des courbes quelconques, la droite mobile se meut à chaque instant sur des tangentes à ces courbes ; donc les intersections des deux plans normaux menés à ces courbes par les points M et M′ donnent la position correspondante de l'axe instantané de rotation. L'axe AA′ décrit une surface gauche dépendant des deux directrices et de leurs positions dans l'espace. L'axe instantané II′ décrit une surface gauche, enveloppe d'une surface cylindrique, circulaire, droite, décrite autour de l'axe variable AA′ ; et la droite mobile MM′ décrit une surface gauche, enveloppe d'une surface du quatrième degré, à sections parallèles elliptiques. Ces considérations peuvent servir à la solution du problème 120. Tm.

ENVELOPPE

d'une perpendiculaire menée à un diamètre de l'ellipse, par l'extrémité de ce diamètre.

d'après M. l'abbé Tortolini (*Raccolta scientifica.* Num. 6, an II).

—

Problème. Une ellipse étant donnée, trouver l'enveloppe d'une perpendiculaire menée à un diamètre par son extrémité.

Solution. Soit $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (1) ; l'équation de l'ellipse rapportée à ses axes principaux, x et y désignant un point déterminé de cette ellipse, extrémité d'un diamètre, et on aura pour la perpendiculaire menée par ce point au diamètre correspondant l'équation $Xx+Yy=x^2+y^2$ (2) où X et Y sont les coordonnées courantes de la perpendiculaire. On a

$\frac{x}{a^2}+\frac{yy'}{b^2}=0$; $X+Yy'=2x+2yy'$ où y' est la dérivée de y par rapport à x; éliminant y', il vient

$$a^2yX-b^2xY=2(a^2-b^2)xy \qquad (3);$$

éliminant x et y entre les trois équations (1), (2), (3), l'équation finale en X, Y est, d'après la théorie connue, l'équation de l'enveloppe.

Les équations (2) et (3) donnent :

$$a^2b^2X=x[y^2(a^2-b^2)+a^2b^2]$$
$$a^2b^2Y=[a^2(y^2-x^2)+2b^2x^2)y$$

faisant $x=a\cos\varphi$; $y=a\sin\varphi$; on obtient :

$$aX=\cos\varphi\,[a^2+(a^2-b^2)\sin^2\varphi]$$
$$bY=\sin\varphi\,[b^2-(a^2-b^2)\cos^2\varphi].$$

Ces équations donnent en remplaçant $\cos^2\varphi$ par $1-\sin^2\varphi$ et mettant x, y pour X, Y,

$$\left.\begin{array}{l} a^2x^2=a^4-a^2(2b^2-a^2)u^2-(a^4-b^4)u^4-(a^2b^2)^2u^6 (4)\\ b^2y^2=(2b^2-a^2)^2u^2+2(a^2-b^2)(2b^2-a^2)u^4+(a^2-b^2)^2u^6 (5)\end{array}\right\}\text{ou } u=\sin\varphi$$
$$a^2x^2+b^2y^2=a^4-(a^2-b^2)\,[2(2b^2-a^2)u^2+3(a^2-b^2)u^4]$$

résolvant par rapport à u^2, et prenant la valeur de la quantité sous le radical il vient :

$$4(a^4+b^4-a^2b^2)-3(a^2x^2+b^2y^2)=[3(a^2-b^2)u^2+2b^2-a^2]^2 \quad (6)$$

on a :

$$2a^2-b^2-(2b^2-a^2)=3(a^2-b^2);$$

donc

$$9a\,(2a^2-b^2)\,(a^2-b^2)^2-9(2b^2-a^2)\,(a^2-b^2)^2=[3(a^2-b^2]^3;$$

multipliant donc les valeurs de a^2x^2 et de b^2y^2 respectivement par $9(2b^2-a^2)$ et $9(2a^2-b^2)$, il vient :

$$9a^2(2b^2-a^2)x^2+9b^2(2a^2-b^2)y^2=[3(a^2-b^2)u^2+(2b^2-a^2)]^3+$$
$$+4(a^2+b^2)\,(2a^2-b^2)\,(2b^2-a^2),$$

d'où l'on tire :

$$9a^2(2b^2-a^2)x^2+9b^2(2a^2-b^2)y^2-4(a^2+b^2)(2a^2-b^2)(2b^2-a^2)=$$
$$=[3(a^2-b^2)u^2+2b^2-a^2]^3 \qquad (7)$$

L'équation (6) et (7) donne :

$$[4(a^4+b^4-a^2b^2)-3(a^2x^2+b^2y^2)]^3=[9a^2(2b^2-a^2)x^2+$$
$$+9b^2(2a^2-b^2)y^2-4(a^2+b^2)(2a^2-b^2)(2b^2-a^2)]^2$$

équation du sixième degré, celle de l'enveloppe cherchée. Développant il vient :

$$Aa^6x^6+Bb^6y^6+Ca^4b^2x^4y^2+Db^4a^2x^2y^4+Ea^4x^4+Fb^4y^4+$$
$$Ga^2b^2x^2y^2+Ha^2x^2+Ib^2y^2=K$$

$$A=B=1\ ;\ C=D=3,\ E=8b^4-a^4-8a^2b^2\ ;$$
$$F=8a^4-b^4-8a^2b^2\ ;\ G=38a^2b^2-20(a^4+b^4)\ ;$$
$$H=8b^2[a^4(a^2+b^2)-2b^4(2a^2-b^2)]\ ;\ I=8a^2[b^4(a^2+b^2)-$$
$$2a^4(2b^2-a^2)]\ ;\ K=16a^4b^4(a^2-b^2)^2.$$

Remarque 1. Si $a^2=2b^2$; ou $b^2=2a^2$, on obtient l'équation de la courbe donnée par Legendre (*Fonctions elliptiques*, t. II, p. 591) ; dans ces ellipses, les extrémités des petits axes sont des centres de courbure.

Remarque 2. Si $a=b$, on trouve l'équation du cercle $x^2+y^2=a^2$; et le centre comme point conjugué.

Remarque 3. Par le centre O et un point M de l'ellipse faisons passer un cercle touchant l'ellipse en M ; menant par ce point une perpendiculaire à OM, son intersection avec le cercle est évidemment le point de l'enveloppe répondant à M ; l'enveloppe est donc aussi celle des cercles ainsi décrits ; elle se compose évidemment de quatre quadrants.

Remarque 4. Les arcs de cette enveloppe s'expriment en fonctions elliptiques incomplètes de première espèce, plus une fonction algébrique qui s'anéantit lorsque l'arc est un quadrant et la fonction elliptique devient complète. Cette propriété a perdu de son importance depuis que M. Serret nous a appris à former une infinité de courbes algébriques, possédant cette propriété.

THÉORÈME

sur l'ellipse et l'hyperbole, de mêmes axes principaux.

PAR M. GUSTAVE DE BAILLEUL,
Elève externe du collége Saint-Louis.

La question à résoudre est la suivante : On donne une ellipse et une hyperbole (*fig.* 38) ayant les mêmes axes (*). On mène une tangente en un point quelconque O de l'hyperbole. Puis par les points d'intersection P et Q de cette tangente avec l'ellipse, on mène deux tangentes à l'ellipse, qui se rencontrent en M. Trouver le lieu des points M.

Solution. Soient x', y' les coordonnées du point O; x'', y'' celles du point M.

La droite PQ peut être considérée et comme tangente à l'hyperbole, et comme corde de contact du point M. Donc on a pour cette droite les deux équations suivantes :

(1) $$a^2yy'-b^2xx'=-a^2b^2$$

(2) $$a^2yy''+b^2xx''=+a^2b^2$$

et l'équation de l'hyperbole est $a^2y^2-b^2x^2=-a^2b^2$.

Si des équations (1) et (2) je tire la valeur de y, j'aurai

$$y=\frac{b^2(xx'-a^2)}{a^2y'} \quad \text{pour l'équation} \quad (1)$$

$$y=\frac{-b^2(xx''-a^2)}{a^2y''} \quad \text{pour l'équation} \quad (2)$$

(*) Coniques *supplémentaires* de M. Poncelet. Tm.

Or, ces deux résultats doivent être identiques ; ce qui exige que l'on ait $y' = -y''$ et $x' = x''$ (5).

Donc si dans l'équation $a^2y'^2 - b^2x'^2 = -a^2b^2$ je remplace x' et y' par leurs valeurs, j'aurai l'équation suivante

$$a^2y''^2 - b^2x''^2 = -a^2b^2.$$

Donc le lieu cherché est l'hyperbole elle-même, et les valeurs de y' et x' nous apprennent en outre qu'en construisant l'ordonnée du point O et en la prolongeant jusqu'à sa rencontre avec l'autre branche de l'hyperbole, le point d'intersection est précisément celui des tangentes à l'hyperbole.

Note. Le théorème peut s'énoncer ainsi : une ellipse et une hyperbole ayant les mêmes axes principaux ; un point pris sur une de ces courbes a pour polaire relativement à la seconde courbe, une tangente à la première courbe.

Démonstration. Soient

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2 \quad \text{équation de l'ellipse.}$$
$$a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2 \quad \text{équation de l'hyperb.}$$

Soit x', y' coordonnées d'un point pris sur l'ellipse, sa polaire par rapport à l'hyperbole a pour équation

$$a^2yy' - b^2xx' = -a^2b^2.$$

Or, ceci est aussi l'équation d'une tangente à l'ellipse ayant pour point de contact x' et $-y'$; donc, etc.

Corollaire. Chacune de ces courbes se confond avec sa polaire réciproque, prise par rapport à l'autre courbe ; ainsi considéré, le théorème est d'une vérité intuitive.

Le théorème subsiste encore lorsque les deux courbes ont en commun le même système de diamètres conjugués, de grandeur et de position, et il est facile de voir qu'on peut aussi l'étendre à un ellipsoïde et à un hyperboloïde à deux nappes, ayant un même système de diamètres conjugués, de grandeur et de position. Les moyens de démonstration sont les mêmes que ci-dessus. Tm.

DISCUSSION

de la surface du troisième degré, donnée par l'équation

$$zy^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0.$$

—

AVIS. — *Les élèves qui savent discuter cette sorte de surfaces, connaissent les coniques; ceux qui ne savent pas les discuter, ne connaissent pas les coniques; critérium infaillible.*

Pour fixer les idées, nous supposons que les cinq coefficients constants sont positifs; γ = angle des x, y;

β = angle des x, z; α = angle des y, z.

A. *Sections parallèles au plan des* xy.

I. Les sections parallèles au plan xy sont des coniques; considérant z comme une constante, nous aurons

$m = B^2 - 4Cz$; $k = 2Ez - BD$; $k' = 2CD - BE$; $l = D^2 - 4Fz$;
$l' = E^2 - 4CF$; $n = DE - 2BF$;
$L = l'z - BDE + CD^2 + FB^2 = l'z + Q$; $N = A + C - B\cos\gamma$;
(V. t. I, p. 489).

II. *Lieu des centres des sections parallèles.* Soient X, Y, z les coordonnées du centre d'une section, on a :

$$X = \frac{2Ez - BD}{B^2 - 4Cz}; \quad Y = \frac{k'}{B^2 - 4Cz};$$

éliminant z, il vient $k'(2Cx + By + E) = 0$.

1^er^ cas. *k' n'est pas nul.*

On a donc $2Cx + By + E = 0$ (1); le lieu des centres est dans le plan parallèle à l'axe des z, et dont la trace sur le plan

xy est donnée par l'équation (1) ; la projection de ce lieu, soit sur le plan des xz, soit sur celui de yz, est une hyperbole ; donc ce lieu étant plan, est aussi une hyperbole.

Cherchons l'équation de cette courbe dans son plan. A cet effet, prenons la droite (1) pour axe des x, et pour origine le point où cette droite rencontre l'axe des y, et conservons l'axe des z ; nommons δ l'angle que fait la droite (1) avec l'axe des y ; on aura $x_1 \sin\delta = x \sin\gamma$, x_1 désignant l'abscisse de l'hyperbole dans son plan ; donc $\frac{x_1 \sin\delta}{\sin\gamma} = \frac{2Fz - BD}{B^2 - 4Cz}$; donc l'équation de l'hyperbole dans son plan est

$$4Czx_1 \sin\delta + 2Ez \sin\gamma - B^2 x_1 \sin\delta - BD \sin\gamma = 0 \,;$$

les asymptotes sont parallèles aux axes ; les coordonnées du centre sont $Z = -\frac{E \sin\gamma}{2C \sin\delta}$; $X_1 = \frac{B^2}{4C}$; appelons cette courbe *l'hyperbole centrale.*

$$a)\,; \qquad z \text{ positif et } < \frac{B^2}{4C}\,; \quad l' > 0\,; \quad Q > 0.$$

Chaque section est une hyperbole ayant son centre sur l'hyperbole centrale ; plus z augmente et plus l'axe focal augmente, et plus le centre s'éloigne.

$$b)\,; \qquad z = \frac{B^2}{4C}\,; \quad l' > 0\,; \quad Q > 0.$$

Pour cette valeur de z, celle de x_1 est infinie ; le centre de l'hyperbole est situé à l'infini ; chaque branche de l'hyperbole devient une parabole ; situées, l'une à une distance finie, et l'autre à l'infinie ; de sorte que depuis $z = 0$ jusqu'à $z = \frac{B^2}{4C}$ la surface est formée de deux nappes : l'une que nous désignons par nappe de *droite* commence par une hyperbole pour $z = 0$, et se termine par une parabole pour $z = \frac{B^2}{4C}$;

l'autre que nous désignons par nappe de *gauche* commence aussi par une branche d'hyperbole, et s'approche asymptotiquement du plan $z = \frac{B^2}{4C}$.

c) $\qquad z > \frac{B^2}{4C};\ l' > 0;\ Q > 0.$

La nappe de gauche disparaît; celle de droite se continue; mais les sections sont des ellipses qui vont toujours en s'aplatissant; et pour z infini, l'ellipse se réduit à son grand axe; de sorte qu'en désignant par Z' ce demi grand axe, on a pour z infini $Z'^2 = \frac{4LN}{m^2} = \frac{4C^2}{l'}$ (t. I, p. 493); c'est par cette portion de droite Z' que se termine à l'infini la nappe de droite; on voit ici la transition immédiate de l'hyperbole à la parabole, et de celle-ci à l'ellipse, et finalement de celle-ci à la droite limitée.

d) $\qquad z$ négatif; $l' > 0;\ Q > 0;\ Q + l'z > 0.$

Les deux nappes se continuent au-dessous du plan xy, par des branches d'hyperboles dont les axes focaux vont en diminuant à mesure que z croît négativement.

e) $\qquad z$ négatif; $l' > 0;\ Q > 0;\ Q + l'z = 0.$

Les deux nappes se pénètrent suivant deux droites dont le système est représenté par l'équation

$$\frac{l'}{Q}y^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0 \text{ (t. II, p. 30)};$$

les deux nappes se séparent ensuite et se continuent par des branches hyperboliques, qui se ferment et se rapprochent de plus en plus de leurs axes focaux, et enfin pour $z = -\infty$, les deux branches de l'hyperbole se réduisent aux prolongements infinis dans les deux sens, de l'axe focal dont le carré est égal à $\frac{l'}{C^2}$ (t. I, p. 493).

2me cas. $k' = 0$.

L'hyperbole centrale est alors située dans le plan des xz, et il n'y a rien à changer dans la discussion.

III. Dans ce qui précède, nous avons toujours supposé l' et Q positifs ; admettons maintenant que Q soit négatif, et remarquons qu'on a l'identité $\frac{B^2}{4C} + \frac{Q}{l'} = \frac{k'^2}{4Cl'}$.

$$a) \qquad z > \frac{B^2}{4C};\ l' > 0;\ Q < 0.$$

A cause de l'identité, on ne peut avoir $z = -\frac{Q}{l'}$ ou $L = 0$; donc l'hyperbole ne peut se changer en deux droites, et les deux nappes supérieures restent séparées

$$b) \qquad z = \frac{B^2}{4C};\ l' > 0;\ Q < 0.$$

L'hyperbole atteint sa limite parabolique.

$$c) \qquad z \text{ positif} < \frac{B^2}{4C};\ l' > 0;\ Q < 0.$$

On peut avoir $z = \frac{Q}{l'}$; ou $L = 0$; l'ellipse se réduit en un point ; de sorte que le plan $z = \frac{Q}{l'}$ est tangent à la nappe de droite.

$$d) \qquad z \text{ négatif};\ l' > 0;\ Q < 0.$$

L ne peut jamais devenir nul ; par conséquent au-dessus du plan xy, les deux nappes restent toujours séparées, et se terminent encore à l'infini par deux droites.

B. *Sections parallèles au plan* xz.

Toutes ces sections sont des paraboles.

C. *Sections parallèles au plan des yz.*

Courbes du troisième degré, à deux asymptotes, dont l'une est double ou de l'espèce parabolique.

Nous engageons les élèves à construire ces courbes ; à discuter le cas où $l' < 0$; et à construire la surface où B est remplacé par z, etc....

Tm.

PROBLÈME

sur les angles dièdres du tétraèdre.

par M. T. Clausen (Crelle, t. VIII, p. 138, 1832). (*)

Problème. Trouver une relation entre les six angles dièdres d'un tétraèdre.

Solution. Soient A, B, C, D les quatre points de contact des faces du tétraèdre avec la sphère inscrite ; joignant ces points deux à deux par les arcs de grands cercles AB, BC, CA, CD, AD, BD, désignés respectivement par α, α', α'', β, β', β'', on obtient quatre triangles sphériques dont les côtés sont les suppléments des angles dièdres du tétraèdre ; soient $\theta, \theta', \theta''$ les trois angles sphériques formés en D ; on a, d'après les formules connues dans les triangles formés par les côtés α, β', β'' :

$$\cos\theta = \frac{\cos\alpha - \cos\beta'\cos\beta''}{\sin\beta'\sin\beta''}.$$

De même :

$$\cos\theta' = \frac{\cos\alpha' - \cos\beta''\cos\beta}{\sin\beta''\sin\beta}\,; \quad \cos\theta'' = \frac{\cos\alpha'' - \cos\beta\cos\beta'}{\sin\beta\sin\beta'}.$$

(*) Le même problème a été résolu par plusieurs. Voir Gergonne, t. VI, p. 253 ; la solution de M. Clausen renferme une simplification finale.

or $$\theta + \theta' + \theta'' = 2\pi.$$

Donc $1 - \cos^2\theta - \cos^2\theta' - \cos^2\theta'' + 2\cos\theta\cos\theta'\cos\theta'' = 0.$

Et de là, en mettant pour les cosinus, leurs valeurs :

$$\sin^2\beta\sin^2\beta'\sin^2\beta'' - \sin^2\beta[\cos\alpha - \cos\beta'\cos\beta'']^2 -$$
$$-\sin^2\beta'[\cos\alpha' - \cos\beta\cos\beta'']^2 - \sin^2\beta''[\cos\alpha'' - \cos\beta\cos\beta']^2 +$$
$$+2[\cos\alpha - \cos\beta'\cos\beta''][\cos\alpha' - \cos\beta\cos\beta''][\cos\alpha'' - \cos\beta\cos\beta'] = 0.$$

ou, d'après une facile réduction :

$$1 - \cos^2\alpha - \cos^2\alpha' - \cos^2\alpha'' + 2\cos\alpha\cos\alpha'\cos\alpha'' - \sin^2\alpha\cos^2\beta -$$
$$-\sin^2\alpha'\cos^2\beta' - \sin^2\alpha''\cos^2\beta'' + 2\cos\beta'\cos\beta''(\cos\alpha - \cos\alpha'\cos\alpha'') +$$
$$+2\cos\beta''\cos\beta(\cos\alpha' - \cos\alpha''\cos\alpha) +$$
$$+2\cos\beta\cos\beta'(\cos\alpha'' - \cos\alpha\cos\alpha') = 0. \qquad (1)$$

Désignons par λ, λ', λ'' les angles opposés aux côtés α, α', α'' dans le triangle formé par ces côtés, il vient :

$$\cos\alpha - \cos\alpha'\cos\alpha'' = \cos\lambda\sin\alpha'\sin\alpha'',$$
$$\cos\alpha' - \cos\alpha\cos\alpha'' = \cos\lambda'\sin\alpha''\sin\alpha,$$
$$\cos\alpha'' - \cos\alpha\cos\alpha' = \cos\lambda''\sin\alpha\sin\alpha'.$$

Faisons $\mu = \sin\frac{1}{2}(\alpha + \alpha' + \alpha'')$; $b = \sin\alpha\cos\beta$;

$\mu' = \sin\frac{1}{2}(-\alpha + \alpha' + \alpha'')$; $b' = \sin\alpha'\cos\beta'$;

$\mu'' = \sin\frac{1}{2}(\alpha - \alpha' + \alpha'')$; $b'' = \sin\alpha''\cos\beta''$;

$\mu''' = \sin\frac{1}{2}(\alpha + \alpha' - \alpha'')$.

La formule (1) devient, d'après des relations connues :

$$b^2 + b'^2 + b''^2 - 2b'b''\cos\lambda - 2bb''\cos\lambda' - 2bb'\cos\lambda'' - 4\mu\mu'\mu''\mu''' = 0\,;$$

relation cherchée.

On a d'ailleurs :

$$\tang^2\frac{1}{2}\lambda' = \frac{\mu'''\mu'}{\mu\mu''}\,; \quad \tang^2\frac{1}{2}\lambda'' = \frac{\mu'\mu''}{\mu\mu'''},$$
$$\tang^2\frac{1}{2}\lambda = \frac{\mu''\mu'''}{\mu\mu'}.$$

DES TROIS MOYENNES,

arithmétique, géométrique et harmonique, dans le cercle, d'après Pappus.

Soit la droite AB partagée en deux segments AP, PB, entre lesquels il s'agit d'insérer les trois moyennes. Sur AB comme diamètre, de O comme centre, on décrit une demi-circonférence ; on élève en P une perpendiculaire à AB, terminée en M à la circonférence ; de P on abaisse la perpendiculaire PQ sur le rayon OM ; alors OM est la moyenne arithmétique ; PM la moyenne géométrique ; MQ la moyenne harmonique entre les deux segments AP, PB. Car on a :

$$OM=\frac{1}{2}(AP+PB)\,;\quad PM^2=AP\,.\,BP\,;\quad MQ=\frac{\overline{PM}^2}{OM}.$$

Ainsi la moyenne harmonique, géométrique, arithmétique se suivent selon l'ordre ascendant de grandeur. Tm.

QUESTIONS.

124. Soit OMP un triangle dont le sommet fixe O est sur une droite fixe OL située dans le plan du triangle ; on a

$$OP=1\,,\quad MP=\sqrt{2}\ \text{ et }\ \cos(MOP-2OMP)=\cos MOL\,;$$

le lieu du point M est une lemniscate et la tangente en M passe par le centre du cercle circonscrit au triangle OPM. (SERRET.)

125. Soient les équations de deux ellipses rapportées aux mêmes axes

$$(ax+by)^2+(a'x+b'y)^2=c^2\,;\quad (ax+a'y)^2+(bx+b'y)^2=c^2\,;$$

les aires des ellipses sont égales et si les axes sont rectangulaires, les ellipses sont égales. (JACOBI.)

BIBLIOGRAPHIE.

Éléments de Géométrie, par *G. Lionnet*, professeur de mathématiques au collége royal de Louis-le-Grand ; troisième édition. Ouvrage adopté par le Conseil royal de l'Université pour l'usage des colléges. Paris, 1846 ; in-8° de 344 pages (*).

Un ouvrage destiné à l'enseignement élémentaire ne peut être convenablement apprécié que par les personnes vouées à cette honorable et pénible fonction. Je dois donc m'en rapporter au jugement favorable porté sur cet ouvrage par mon excellent co-rédacteur, qui dirige avec distinction une des premières institutions mathématiques de la capitale. C'était en 1842, lors de la première édition, et nos lecteurs auront à regretter que de nombreuses occupations, à l'approche des examens, empêchent le même rapporteur à rendre compte de cette troisième édition. Le plan méthodique, la logique sévère, la dichotomie technique qui règnent dans l'ouvrage ont été parfaitement indiqués, et nous n'avons rien à y ajouter (*v.* t. I, p. 431). Il nous reste à signaler les principales améliorations que l'auteur, fidèle à son système, rigoureusement progressif, a faites dans cette troisième édition.

Géométrie plane.

Livre III. On sait que deux cercles dans un plan peuvent avoir un point ou deux en commun, ou n'avoir aucun point

(*) Dezobry, Magdeleine et comp., rue des Maçons-Sorbonne, 1.

en commun. Les conditions géométriques, relatives à ces six situations, où chacune se divise en deux, sont démontrées ici *directement*; discussion qu'on devrait établir d'une manière analogue pour le même objet dans la géométrie analytique. Cette discussion est l'objet de huit théorèmes (p. 67-73). Toutefois, on a omis le cas où les deux cercles se coupent de manière que les deux centres sont du même côté de la corde commune.

Livre III, page 88. Un ami de l'auteur, M. le professeur Lebesgue, profond arithmologue, croit qu'il est bon de démontrer en géométrie l'existence des lignes incommensurables, avant de s'occuper de rapports, des proportions et de la mesure des surfaces (t. III, p. 436). Conformément à ce conseil, on lit (p. 88) une démonstration de l'incommensurabilité de la diagonale et du côté du carré, où l'on ne fait pas usage de la théorie des lignes proportionnelles.

Géométrie de l'espace.

Voici la nouvelle disposition, très-rationnelle, adoptée pour la succession des théorèmes :

Lignes droites et plans parallèles;
Lignes droites perpendiculaires aux plans;
Plans perpendiculaires entre eux;
Distances et lieux géométriques.

Les théorèmes VIII et IX (livre II), relatifs aux angles trièdres supplémentaires (triangles polaires de la trigonométrie) sont démontrés pour la première fois avec toute la rigueur désirable. La direction des perpendiculaires est ici nécessaire à prendre en grande considération.

Le théorème XIV du même livre (p. 212), consacré à établir la possibilité de couper un système de droites par un plan qui le rencontre, est très-digne d'attention et manque dans les traités élémentaires. Il est sous-entendu dans quelques démonstrations de Legendre, et on en a besoin en statique pour démontrer qu'on peut toujours mener un plan qui soit coupé par toutes les directions des forces du système.

Le livre III est intitulé : *Des trois corps ronds*; toutefois on s'y occupe presque exclusivement de la sphère. On sait que la discussion des cas douteux des triangles sphériques, au nombre de quarante, est ordinairement conduite d'après des principes trigonométriques; M. Lionnet ramène le tout à un seul théorème de géométrie pure.

Le livre IV est intitulé : *Les polyèdres semblables et la mesure des angles* (p. 273); faire succéder la mesure des angles à la théorie de la similitude semble présenter quelque étrangeté; elle disparaît en se rappelant que l'auteur définit l'angle, soit plan, soit dièdre, soit solide, par le même mot : *ouverture*; définition qui présente l'avantage de l'uniformité et l'inconvénient d'être un peu vague. Une hyperbole présente aussi une *ouverture*, et il n'y a pas là matière à angle. Nous pensons que ce mot indique une différence de direction de deux droites ou de deux plans. L'angle solide est improprement ainsi nommé; il désigne le rapport d'une portion de la sphère à la sphère entière. En creusant le sujet, on trouve que la mesure des angles est intimement liée à la théorie des trajectoires orthogonales, à l'idée primordiale du mouvement circulaire. Pour l'angle plan, ces trajectoires sont des cercles; pour l'angle dièdre, des cylindres, et des sphères pour l'angle solide; de sorte que cette mesure n'est qu'un rapport *déguisé* entre des longueurs et des surfaces; rapports *rationnels*, ou *numériques*, ou rapports *irrationnels*, *innumériques*, s'il était permis de s'exprimer ainsi. L'égalité de rapports, soit pour les angles, soit pour les dimensions des corps constitue l'idée première, l'idée innée de la similitude.

L'auteur adopte une définition conforme à cette idée. Une note de Legendre sur le nombre des conditions nécessaires pour établir l'égalité soit entre les polygones, soit entre les polyèdres, a fait introduire dans la science une autre définition de similitude, qui a l'avantage de s'appliquer à des lignes et à des surfaces courbes quelconques. Cette manière de définir la similitude présente l'avantage d'être plus générale et l'inconvénient d'être peu naturelle. Le choix entre les deux définitions est indifférent ; car, ainsi que dit d'Alembert, les définitions sont choses arbitraires (*Voir* Note, t. I, page 435).

Nous appelons aussi l'attention sur la manière dont l'auteur démontre la mesure des surfaces cylindriques et coniques (p. 323). D'après cet exposé succinct, on voit que rien n'a été négligé pour perfectionner un bon ouvrage. Ayant en vue l'intérêt des étudiants, l'auteur est revenu à la méthode ancienne et a placé les figures gravées sur cuivre, dans le texte. Nous croyons, dans le même intérêt, que l'auteur devrait imiter Bezout et placer à la fin, une table des énoncés de toutes les propositions. Ces panoramas scientifiques sont utiles même aux professeurs. Nous terminerons par faire observer que l'auteur a judicieusement supprimé certaines définitions, axiomes et théorèmes, qui appartiennent au domaine public du bon sens. Il reste peut-être encore par-ci, par-là (*), quelque chose de ce genre à élaguer ; car, comme nous avons toujours les défauts de nos qualités, les amis de la rigueur portent quelquefois cet amour à l'extrême. *Ne quid nimium* est un précepte à suivre surtout en s'adressant à la jeunesse.

Nous signalons comme une heureuse innovation, l'orthographe conforme à l'étymologie des mots *isoscèle*, avec une

(*) Nous citerons, liv. I, théor. III, IV et V; liv. II, théor. I, II.

s; *polygône* avec un accent circonflexe sur la voyelle *o*; et *parallélépipède* au lieu de *parallélipipède*. Par contre, on peut espérer de voir disparaître les accents absurdes, des *binômes*, *trinômes*, *polynômes*. L'Académie française semble avoir abandonné aux géomètres le soin de faire ces corrections. Tm.

COURS COMPLET DE MATHÉMATIQUES à l'usage des aspirants à toutes les écoles du gouvernement, renfermant toutes les connaissances exigées pour l'admission aux écoles polytechnique, normale, navale, militaire, de Saint-Cyr, forestière, des arts et manufactures et des beaux-arts; par M. *Auguste Blum*, professeur de mathématiques, ancien élève de l'école polytechnique. Tome deuxième, géométrie élémentaire, trigonométrie rectiligne, trigonométrie sphérique, éléments de géométrie descriptive. Paris, 1845, in-8°, t. XLIII, 477 p., 24 pl. gravées (*).

Il faut distinguer deux sortes d'ouvrages didactiques; les uns ayant pour but unique la science et ceux qui l'apprennent par goût, peuvent être très-courts; les autres ayant en vue les examens et ceux qui veulent avoir des emplois, doivent être très-longs. Les uns ne s'occupent que de la théorie dont les limites sont resserrées; les autres ne se préoccupent que de réponses à faire à des questions possibles dont le champ est illimité. Le titre que nous donnons *in extenso*, suffit donc pour justifier la grosseur du volume et le recommander aux candidats pour les diverses écoles. L'ouvrage débute par une table des matières très-développée, contenant successivement les définitions, les théorèmes, les problèmes;

(*) Carilian-Gœury et Vor Dalmont, éditeurs.

même avec les n^{os} des figures qui s'y rapportent, objet essentiel qui facilite singulièrement l'étude et les recherches; un traité scientifique sans table des matières est un labyrinthe sans fil.

La géométrie élémentaire proprement est divisée en deux parties; division très-rationnelle et introduite, à ce que je sache, par M. Vincent; chaque partie est subdivisée en quatre livres; de sorte qu'on retrouve les huit livres de Legendre, qui a calqué sa géométrie sur celle de Thomas Simpson, ainsi que notre illustre géomètre le dit dans la préface à la première édition.

A l'instar d'Euclide, toutes les définitions sont en tête. Quelque respectable que soit une telle autorité, je n'en suis pas partisan. On ne doit parler des objets qu'à mesure qu'on en a besoin et pas auparavant, et surtout avant de connaître la possibilité d'existence; pourquoi mentionner sans nécessité les parallèles, les rectangles, les carrés, avant de savoir si de telles figures peuvent se réaliser? C'est à la fin du volume qu'on devrait placer par ordre lexicographique, les définitions des termes techniques. Ces petits dictionnaires réunis faciliteraient la composition d'un dictionnaire général de toute la science.

Pour la théorie des parallèles, on a très-judicieusement suivi le conseil de M. Gergonne; en admettant, comme fait de conscience, que par un point ne passe qu'une seul parallèle à un point donné; toutes les sciences sont obligées d'avoir recours à des faits de ce genre; la droite, sa direction, la différence et l'égalité de direction, sont les données du sens intime, ont la plus forte certitude possible et par conséquent échappent à toute démonstration, à tout moyen discursif.

Le sens intime est le dernier refuge de la certitude; aller au delà est une entreprise aussi vaine que déraisonnable. Les métaphysiciens enfantent des volumes sur les caractères de la certitude; comment acquiert-on la certitude d'avoir ces caractères? Ce genre de questions ne présente qu'un avantage littéraire, une satisfaction d'auteur; on peut écrire dessus indéfiniment, et lorsque nos soixante siècles de traditions historiques seront doublés, on sera toujours au point du départ; il ne faut pas confondre le mouvement de rotation autour d'un axe fixe, quelque vif, quelque agité et bruyant que soit ce mouvement avec celui de translation dans l'espace; le seul qui constitue le progrès. Mais revenons à notre affaire.

La méthode dite des incommensurables est donnée d'une manière très-élémentaire. Voici ce que l'auteur dit à cet égard dans la note IV (p. 455) : « Il ne faut pas perdre de vue » que les conditions de l'enseignement de géométrie sont » maintenant changées. Les examens pour les grades d'as- » pirants de marine forcent les candidats de commencer à » douze ans une étude que des jeunes gens de dix-huit ans » commençaient à peine il y a cinquante ans, alors que le » traité *fameux* de géométrie élémentaire de Legendre fut » composé. Comment présenter à des enfants des notions » abstraites et non justifiées; comment effrayer les premiers » regards des élèves par des expressions compliquées et sur- » tout par des démonstrations longues? »

Trente-six problèmes terminent la géométrie plane; la moyenne et extrême raison n'est pas mentionnée dans la table; il est vrai qu'elle est comprise dans le problème XX; mais par son importance elle exige une mention explicite.

A l'instar du *Manuel de géométrie*, les *lieux* sont enfin introduits dans l'enseignement de la géométrie élémentaire. Mais pourquoi s'arrêter là et pourquoi, à l'instar du même ouvrage, ne pas traiter comme des *lieux*, les trois coniques? Quel inconvénient y a-t-il à ce que cette foule d'élèves, et c'est l'immense majorité, qui n'est pas tenu d'apprendre la géométrie analytique, ait quelques connaissances des propriétés des coniques qu'on rencontre partout, dans les arts, dans la mécanique, dans la physique, dans l'astronomie, dans toute la nature? Jusqu'à quand resterons-nous, avec l'antiquité païenne, en adoration perpétuelle devant la droite et le cercle? les seuls lignes, hormis dans les cristaux, qu'on ne rencontre pas dans l'univers?

La géométrie de l'espace est aussi suivie de 13 problèmes. Dans un appendice à la géométrie élémentaire (p. 215), l'auteur a eu l'heureuse idée de consigner les *énoncés* seulement de beaucoup de théorèmes et de problèmes intéressants. Quelquefois, on indique les moyens de solution, on met sur la voie; exercice dont l'utilité est incontestable. A la suite de l'appendice, on trouve des notions sur la théorie des transversales, des points et faisceaux harmoniques, poles et polaires.

Ces diverses théories qui occupaient une si grande place chez les anciens avaient disparu avec raison des écrits des géomètres du XVIII^e siècle; les progrès de la géométrie contemporaine rendent de nouveau nécessaire l'introduction de ces théories dont l'absence devrait désormais être signalée comme une véritable lacune; et même sous certains rapports, comme un manque de patriotisme, car la nouvelle direction donnée aux études géométriques est due à des savants français, aux Servois, Brianchon, Poncelet, Chasles, etc.

L'auteur a aussi enrichi son ouvrage du théorème de M. Cauchy sur l'égalité des polyèdres, si remarquablement simplifié par M. Thibault (t. II, p. 163); théorème fondamental dans la stéréométrie. Il est presque superflu d'ajouter que l'auteur a soin de ne pas citer l'endroit ou il a pris ce théorème, pour deux raisons : la première est que cela faciliterait les recherches; et la seconde, c'est que ce serait contraire à tous les usages adoptés par les géomètres français.

C'est en vue des élèves de la marine que l'auteur a ajouté la trigonométrie sphérique, et quoique non exigée, c'est une abondance qui ne saurait être nuisible.

Dans les éléments de géométrie descriptive se trouvent résolues les difficultés de construction qu'amènent des variations dans les donnés des problèmes et pour lesquelles les méthodes générales deviennent inappliquables, difficultés qui embarrasseraient les élèves s'il n'y étaient convenablement préparés.

D'après cet exposé, on voit que l'auteur a fidèlement rempli la mission de réunir tous les matériaux géométriques dont doivent être munis, à des degrés divers, ceux qui aspirent à entrer dans les écoles du gouvernement. Tm.

CALCUL DE L'AIRE ASYMPTOTIQUE

dans l'hyperbole ordinaire.

PAR M. COURTOIS,
Professeur de mathématiques spéciales au Collége royal de Grenoble.

On sait que pour calculer l'aire asymptotique AMNB, (*fig.* 41), on insère entre l'abscisse $OA = a$ et $OB = b$ un nombre n de moyennes proportionnelles, et la difficulté consiste à trouver la limite de l'expression

$$n\left\{\sqrt[n]{\frac{b}{a}}-1\right\}m^2 \sin\theta,$$

à mesure que n grandit (m^2 est la puissance de l'hyperbole). Je considère a et b comme faisant partie de la progression géométrique de Néper

$$\ldots\ldots 1 : (1+\alpha)^1 : (1+\alpha)^2 : (1+\alpha)^3 \ldots\ldots a \ldots\ldots b \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots 0 \,.\quad \alpha \quad .\quad 2\alpha \quad .\quad 3\alpha \quad \ldots\ldots m\alpha \,.\,.\, (n+m)\alpha \ldots$$

Ainsi :

$$a=(1+\alpha)^m, \qquad b=(1+\alpha)^{m+n} \;\ldots\ldots$$

puisque b est placé n rangs plus loin que a.

Comme il y a n termes entre a et b, la raison de la progression par quotient peut être désignée par

$$\sqrt[n]{\frac{b}{a}}=1+\alpha \;\ldots\ldots$$

Donc :

$$n\left\{\sqrt[n]{\frac{b}{a}}-1\right\}=n\alpha=\text{L.}\ b-\text{L.}\ a=\text{L.}\ \frac{b}{a}.$$

En désignant par la simple lettre L un logarithme népérien. Donc l'aire hyperbolique est égale à

$$m^2 \sin\theta \times \text{L.}\ \frac{b}{a}. \qquad (1)$$

Une des abscisses a et b, ou toutes les deux pourraient être à gauche du terme 1, et en ayant égard au signe des logarithmes, on aurait toujours un résultat *analogue.* Mais on pourra toujours éviter l'emploi des logarithmes négatifs, en séparant l'aire hyperbolique en deux, limitées par l'ordonnée qui correspond à l'abscisse 1. Et, si cette aire est en entier antérieure à cette ordonnée, sans la morceler, on la comptera au rebours depuis cette ordonnée.

(*) Dire ce que c'est que la base de Néper serait ici superflu, puisque cette base est étudiée dans la théorie des logarithmes.

Le produit entier peut être regardé comme Log. $\frac{b}{a}$ pris dans la base, dont le module est $m^2 \sin \theta$.

Si l'on veut avoir des aires hyperboliques qui soient les logarithmes népériens des abscisses terminales; il faut prendre une hyperbole, pour laquelle $m^2 \sin \theta = 1$, et compter les aires asymptotiques depuis l'abscisse $a = 1$. Par exemple une hyperbole dont l'angle asymptotique est $\theta = 30°$, et dont la puissance $m^2 = 2$. Ainsi :

Le logarithme népérien d'un *nombre* a pour équivalent géométrique l'aire asymptotique d'une hyperbole, pour laquelle $m^2 \sin \theta = 1$, cette aire étant comptée depuis l'abscisse 1 jusqu'à l'abscisse égale au *nombre*.

L'hyperbole équilatère n'est donc pas la seule dont les aires asymptotiques puissent représenter les logarithmes de Néper.

NOTE

sur les aires des coniques planes.

Ellipse.

Soit $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ l'équation d'une ellipse rapportée à des diamètres conjugués faisant un angle égal à γ; soit O le centre; OA le demi-diamètre a, axe des x; OM un demi-diamètre quelconque, x' l'abscisse et y' l'ordonnée de M ; on aura :

$$\text{Aire du secteur elliptique MOA} = \frac{1}{2} ab \sin \gamma \text{ arc sin} \frac{y'}{b}.$$

Hyperbole.

$a^2y^2 - b^2x^2 = - a^2b^2$; équation de l'hyperbole ; même notation que pour l'ellipse.

Aire du secteur MOA $= \frac{1}{2} ab \sin\gamma \log\left(\frac{x'}{a} + \frac{y'}{b}\right)$.

Observation. Plus x' augmente et moins $\frac{x'}{a}$ et $\frac{y'}{b}$ diffèrent ; donc pour $x' = \infty$; l'aire totale asymptotique a pour expression $ab \sin\gamma \log 2\frac{x'}{a}$ qui doit être indépendante de $ab \sin\gamma$; donc cette dernière quantité est constante ; propriété connue.

2. Menant l'ordonnée MP ; on a aire

MAP $= \frac{1}{2} \sin\gamma \left[x'y' - ab \log\left(\frac{x'}{a} + \frac{y'}{b}\right)\right]$, pour $x' = \infty$;

le premier terme se réduit à $\frac{bx'^2}{a}$ qui est infiniment grand, relativement au second terme. Donc, l'aire asymptotique quoique infinie, est infiniment petite relativement à l'aire de l'hyperbole.

Parabole.

Soit MM' une corde de parabole ; I son milieu ; IA la portion de diamètre interceptée entre la corde et la courbe ; γ l'angle de la corde et du diamètre ; on a aire du segment MAM' $= \frac{2}{3}$ MM'. AI $\sin\gamma$.

Observation. On peut trouver ces diverses expressions d'une manière pénible par la voie élémentaire et en quelques traits de plume, par le calcul intégral : pourquoi ne pas en enseigner les principes aux élèves, principes plus faciles que le théorème de Sturm, le théorème de Cauchy, les méthodes d'éliminations etc., qu'on enseigne pourtant dans nos classes ?

Tm.

NOTE

sur la résolution d'une classe particulière d'équations à plusieurs inconnues.

PAR M. DROT,
Admissible à l'Ecole normale.

Cette note est relative à la résolution des équations à plusieurs inconnues, dans chacune desquelles les inconnues ont les mêmes exposants et les mêmes coefficients ; c'est-à-dire que ces équations peuvent être toujours ramenées à la forme

$$x^m + y^m + z^m + u^m + \ldots\ldots = a.$$

1° Je supposerai d'abord qu'il s'agisse de deux équations à deux inconnues, de la forme

$$x^m + y^m = a$$
$$x^n + y^n = b.$$

Je prendrai pour inconnues auxiliaires la somme $x+y=u$ des racines, et leur produit $xy=v$. Il est clair que u et v étant connus, x et y seront les deux racines de l'équation du second degré $X^2 - uX + v = 0$. Or il est facile d'obtenir deux relations entre u et v qui les feront connaître. En effet, élevons les deux membres de l'équation $x+y=u$ à la puissance m, il viendra

$$x^m + y^m + mxy(x^{m-2} + y^{m-2}) +$$
$$+ \frac{m(m-1)}{1.2} x^2y^2 (x^{m-4} + y^{m-4}) + \ldots\ldots = u^m.$$

Si m est pair, le premier nombre se terminera par

$$+ \frac{m(m-1)\ldots\ldots\left(\frac{m}{2}+1\right)}{1.2.3\ldots\frac{m}{2}} x^{\frac{m}{2}} y^{\frac{m}{2}} ;$$

S'il est impair, ce sera par

$$+\frac{m(m-1)\ldots\ldots\left(m-\frac{m-1}{2}+1\right)}{1.2.3.\ldots\ldots\frac{m-1}{2}}x^{\frac{m-1}{2}}y^{\frac{m-1}{2}}(x^1+y^1).$$

L'équation $(x+y)^m=u^m$ devient donc ainsi :

$$a+mv(x^{m-2}+y^{m-2})+\frac{m(m-1)}{1.2}v^2(x^{m-4}+y^{m-4})+\ldots.=u^m.$$

Or $x^{m-2}+y^{m-2}$, $x^{m-4}+y^{m-4}$, ... pourront toujours être exprimés en fonction d'une somme de puissances de x et de y plus petites; car, élevant les deux membres de $x+y=u$ successivement aux puissances $m-2$, $m-4$, ... on pourra en tirer $x^{m-2}+y^{m-2}$, $x^{m-4}+y^{m-4}$, ... en fonction de u, de v, et de binômes plus simples que les précédents. En continuant ainsi, ces binômes pourront être exprimés en fonction de $x+y$ ou de u, ou de v; de sorte que l'équation $(x+y)^m=u^m$ deviendra :

$$a+mvf(u,v)+\frac{m(m-1)}{1.2}v^2f_2(u,v)+\ldots\ldots\ldots\ldots=u^m,$$

c'est-à-dire en général $F_1(u,v)=0$.

En élevant ensuite les deux membres de $x+y=u$ à la puissance n, il viendra une autre équation $F_2(u,v)=0$, entre u et v. Les deux équations F_1 et F_2 détermineront souvent d'une manière facile u et v, du moins dans les cas peu compliqués.

Faisons quelques applications.

Soit à résoudre les équations

$$x+y=a$$
$$x^4+y^4=b.$$

Ici la somme des racines étant connue, il n'y a qu'à prendre pour inconnue auxiliaire le produit $xy=v$. Élevons les deux membres de $x+y=a$ à la quatrième puissance, il viendra :

$$x^4+y^4+4xy(x^2+y^2)+6x^2y^2=a^4,$$

ou

$$b+4v(x^2+y^2)+bv^2=a^4,$$

en élevant les deux membres de la même équation au carré, il vient : $x^2+y^2=a^2-2v$; donc on a :

$$b+4v(a^2-2v)+bv^2=a^4$$

ou

$$2v^2-4a^2v+a^4-b=0.$$

On tire de là : $v=a^2\pm\sqrt{a^4-\frac{a^4+b}{2}}=a^2\pm\sqrt{\frac{a^4+b}{2}}$.

Par suite

$$x=\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{3a^2}{4}\pm\sqrt{\frac{a^4+b}{2}}}$$

$$y=\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{3a^2}{4}\mp\sqrt{\frac{a^4+b}{2}}}.$$

Soit encore à résoudre les équations

$$x^3+y^3=a$$
$$x^4+y^4=b.$$

Posons $x+y=u$, $xy=v$. Élevant les deux membres de $x+y=u$ successivement aux puissances 3 et 4, il vient :

$$x^3+y^3+3xy(x+y)=u^3,$$

ou

$$a+3uv=u^3,$$

et

$x^4+y^4+4xy(x^2+y^2)+6x^2y^2=u^4$, ou $b+4v(u^2-2v)+6v^2=u^4$,

ou enfin

$$2v^2-4vu^2+u^4-b=0.$$

Tirant v de la première, et remplaçant dans la seconde, l'élimination sera faite.

2° Soient maintenant les trois équations

$$x^m+y^m+z^m=a$$
$$x^n+y^n+z^n=b$$
$$x^p+y^p+z^p=c.$$

Je prendrai pour inconnues auxiliaires les expressions

$$x+y+z=u,\ xy+xz+yz=v,\ xyz=t;$$

alors x, y, z seront les trois racines de l'équation du troisième degré $X^3-uX^2+vX-t=0$, et une fois u, v, t connus, la question sera résolue. Or, en élevant les deux membres de l'équation $x+y+z=u$ à la puissance m, à la puissance n et à la puissance p, on comprend que, par des transformations semblables à celles que l'on a faites dans la première partie, on puisse arriver à des équations de la forme

$$F_1(u,v,t)=0,\ F_2(u,v,t)=0,\ F_3(u,v,t)=0,$$

qui feront connaître u, v, t.

Prenons pour application les trois équations

$$\begin{aligned} x+y+z&=a\\ x^2+y^2+z^2&=b\\ x^3+y^3+z^3&=c. \end{aligned}$$

Ici je dois prendre pour inconnues auxiliaires

$$xy+yz+xz=u,\ xyz=v.$$

Élevant les deux membres de $x+y+z=a$ au carré, il vient :

$$x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+xz)=a^2,$$

ou

$$b+2u=a^2.$$

Élevant ensuite les deux membres de la même équation au cube, il vient :

$$x^3+y^3+z^3+3(xy+yz+xz)(x+y+z)-3xyz=a^3,$$

ou

$$c+3au-3v=a^3.$$

La première équation donne $u=\dfrac{a^2-b}{2}$, et la deuxième,

$$v=\frac{c+\dfrac{3a(a^2-b)}{2}-a^3}{3},$$ et le problème est résolu.

Il faut bien remarquer que cette méthode ne doit être employée que dans les cas les plus généraux. Dans certains cas simples, il y aura souvent autant d'avantage à opérer autrement.

Ainsi dans le cas des équations :

$$x+y+z=a,$$
$$x^2+y^2+z^2=b,$$
$$x^3+y^3+z^3=c,$$

il y a autant d'avantage à prendre pour inconnue auxiliaire $xy=u$, et à élever successivement l'équation $x+y=a-z$ au carré et au cube, ce qui donnera finalement deux équations en u et z ; mais une des équations sera du troisième degré en z, et par conséquent ne pourra être résolue algébriquement.

Si l'on avait les équations :

$$x+y+z=a,$$
$$x^2+y^2+z^2=b,$$
$$x^4+y^4+z^4=c,$$

on pourrait trouver les valeurs des racines en employant cette dernière méthode, et en posant de plus $a-z=t$.

Si l'on avait quatre équations de la forme :

$$x^m+y^m+z^m+u^m=a,$$
$$x^n+y^n+z^n+u^n=b,$$
$$x^p+y^p+z^p+u^p=c,$$
$$x^q+y^q+z^q+u^q=d,$$

la méthode générale serait la même, et on prendrait pour inconnues auxiliaires :

$$x+y+z+u=v,$$
$$xy+yz+zu+xz+xu+yu=t,$$
$$xyz+yzu+xyu+xzu=s,$$
$$xyzu=w;$$

et x, y, z, u, seraient les quatre racines de l'équation

$$X^4 - vX^3 + tX^2 - sX + w = 0.$$

On comprend la loi de résolution pour plus de quatre équations.

Note. Cette méthode revient à trouver les coefficients d'une équation de degré n, lorsqu'on connaît les valeurs de n fonctions symétriques des racines de cette équation ; fonctions symétriques qui sont toujours exprimables en fonctions rationnelles des coefficients de l'équation, et ces nouvelles n équations sont le plus souvent plus compliquées que les équations données. Tm.

NOTE

sur un problème fourni par les jeux de cartes.

PAR M. A. VACHETTE,
licencié ès sciences mathématiques et physiques.

—

1° Avec un jeu de boston de 52 cartes battues et mêlées, on peut faire la distribution suivante, en ayant soin de compter une carte pour la valeur qu'elle indique, et toutes les figures pour 10 points : on retourne la première carte, qui se trouve un 8 par exemple, et on met sur cette première carte 5 autres cartes, sans faire attention à leur valeur, de façon à compléter le nombre 13; on retourne la carte suivante qui se trouve un 2 par exemple, et on met sur elle 11 autres cartes, et qui forme le deuxième paquet ; on continue ainsi à former les autres paquets : si à la fin on n'a plus que 6 cartes, et que la première de ces cartes soit un 3, on ne peut pas compléter un paquet, et on tient compte de ces 6 cartes restantes. Cela posé, en comptant chacun des quatre premiers paquets pour un point, chacun des suivants pour 14, et ajoutant le nombre des cartes restantes, on a la somme des points contenus dans toutes les premières cartes des paquets formés.

En effet, soient x le nombre des paquets formés, y le nombre des cartes restantes; $a_1, a_2, a_3 \ldots a_x$ les nombres respectifs de points marqués sur les premières cartes des x paquets; le nombre des cartes du 1^er^ paquet est $14 - a_1$, du 2^me^ $14 - a_2, \ldots$ du x^{me} $14 - a_x$; en y ajoutant les y cartes restantes, on doit avoir 52; donc

$$14x - (a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_x) + y = 52,$$

d'où $$a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_x = 14x - 52 + y.$$

Ajoutant au deuxième membre $+4-4$, on aura:

$$a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_x = 4 + 14(x-4) + y,$$

ce qui donne la règle énoncée.

Il est évident que la même règle aurait lieu, si l'on comptait le valet pour 11, la dame pour 12, et le roi pour 13. C'est ce qui ressort d'ailleurs de la généralisation suivante de ce problème.

Si on conçoit a séries des b numéros $1, 2, 3, \ldots b-1, b$, mêlées et battues ensemble; en exécutant une distribution analogue à la précédente, soient x le nombre des paquets, y le nombre des cartes restantes; $n_1, n_2, \ldots n_x$ les numéros respectifs des premières cartes de chaque paquet; on aura dans le 1^er^ paquet un nombre de cartes $b+1-n_1$, dans le 2^me^ $b+2-n_2, \ldots$, dans le x^{me} $b+1-n_x$; ajoutant les y cartes restantes, la somme est ab : ainsi

$$(b+1)x - (n_1 + n_2 + \ldots\ldots + n_x) + y = ab,$$

d'où $$n_1 + n_2 + \ldots\ldots + n_x = (b+1)x - ab + y;$$

ajoutant au deuxième membre $+a-a$, on aura:

$$n_1+n_2+\ldots\ldots+n_n=a+(b+1)(x-a)+y,$$

règle analogue à la précédente, avec laquelle elle est identique pour $a=4$ et $b=13$.

INTÉGRATION

D'une équation différentielle;

PAR M. TURQUAN,
professeur au collége royal de Pontivy.

—

L'équation $\frac{d^2y}{dx^2}+\varphi y\frac{dy^2}{dx^2}=\psi y$ (1) peut toujours être intégrée, quelles que soient les fonctions φy et ψy, c'est-à-dire que la valeur de x en y peut toujours s'obtenir par de simples quadratures.

On pose d'abord $\frac{dy}{dx}=p$; d'où $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dp}{dx}=p\frac{dp}{dy}$; on changera ainsi l'équation proposée en

$$p\frac{dp}{dy}+p^2\varphi y=\psi y \text{ (2).}$$

On cherchera ensuite l'intégrale de $p\frac{dp}{dy}+p^2\varphi y=0$; et l'on trouvera $p=\mathrm{A}e^{-\int\varphi ydy}$.

Or, on peut déterminer A en fonction de y, de telle sorte que cette valeur de p soit l'intégrale de l'équation (2). En effet, si on différentie, en regardant A comme fonction de y, on aura $\frac{dp}{dy}=-\mathrm{A}\varphi ye^{-\int\varphi ydy}+\frac{d\mathrm{A}}{dy}e^{-\int\varphi ydy}$, et l'équation (2) deviendra :

$$A\frac{dA}{dy} = \psi y e^{2\int \varphi y dy},\ \text{d'où}\ A = \sqrt{B + \psi y e^{2\int \varphi y dy}},$$

B étant une constante arbitraire. Ainsi,

$$p = e^{-\int \varphi y dy}\left(\sqrt{B + \psi y e^{2\int \varphi y dy}}\right);$$

d'où
$$dx = \frac{dy\, e^{\int \varphi y dy}}{\sqrt{B + \psi y e^{2\int \varphi y dy}}},$$

et
$$x = \int \frac{dy\, e^{\int \varphi y dy}}{\sqrt{B + \psi y e^{2\int \varphi y dy}}}.$$

THÉORÈME

Sur les fractions périodiques.

PAR M. P. LAFITTE,

Elève en élémentaires (collége Henri IV, classe de M. Meissas).

—

Théorème. Une fraction irréductible à dénominateur nombre premier absolu, et réduite en fraction décimale, donne une période à nombre pair de chiffres; la première moitié ajoutée à la seconde moitié donne une somme qui ne contient que des 9.

Démonstration. Soit $\frac{m}{p}$ la fraction irréductible, p un nombre premier absolu, et $2n$ le nombre de chiffres de la période. Soit M la première moitié de la période, à gauche, et N la seconde moitié, à droite; ainsi la période est égale à $M.10^n + N$, et, d'après la théorie connue,

$\frac{m}{p} = \frac{M.10^n + N}{10^{2n} - 1}$; d'où $m.10^n + 1.10^n - 1 = p[M.10^n + N]$;

Or p est premier avec m et aussi avec $10^n - 1$; car p étant un nombre premier et la période étant de $2n$ chiffres, la première puissance de 10, qui laisse un pour reste, est 10^{2n}; donc p divise $10^n + 1$; par conséquent

$$M.10^n + N = M.(10^n - 1) + M + N$$

est divisible par $10^n - 1$. Il faut donc que $M + N$ soit divisible par $10^n - 1$; mais la plus haute valeur de M ou de N est $10^n - 1$, et les deux nombres sont inégaux : la somme est donc moindre que $2.10^n - 1$; donc $M + N = 10^n - 1$. C. Q. F. D.

Corollaire II. Dans la réduction en décimales, il suffit donc de calculer la moitié de la période, à gauche, et on en conclut, par une simple soustraction, l'autre demi-période.

Corollaire II. 10^n+1 est divisible par p ; donc $m.10^n+m-p$ est un multiple de p; donc $m.10^n$ divisé par p laisse pour reste $p - m$, ou simplement $-m$. Ainsi quand, dans l'opération, on sera parvenu au reste $-m$, on aura la première demi-période.

Théorème. Lorsqu'en réduisant en fraction décimale $\frac{m}{p}$, on parvient à un reste $-m$, le nombre des chiffres de la période est nécessairement pair.

Démonstration. Soit n le nombre des chiffres de la période ; de sorte que $m.10^n - m$ est un multiple de p ; et, par hypothèse, on a $m.10^k + m$, aussi un multiple de p; donc $10^k + 1$ est multiple de p, ou, ce qui revient au même, 10^k est un multiple de p, ce multiple étant diminué de 1 ; aussi 10^{2k} est un multiple de p, ce multiple étant augmenté de 1 ; ou bien $10^{2k}-1$ et aussi $m.10^{2k}-m$ est un multiple de p, ainsi $n=2k$: donc n est pair.

Corollaire. Dès qu'on sera arrivé au reste $-m$, on est sûr que la période est paire. Ainsi, le théorème réduit à moitié le calcul des chiffres du quotient et des séries des résidus, lorsque la période est paire, et qu'elle provient d'un dénominateur nombre premier absolu.

Note. La théorie des fractions périodiques a été introduite par Robertson : *Theory of circulation fractions*, Philosoph. Transact., 1764, et ensuite retravaillée par Bernoulli, Mémoires de l'Académie de Berlin, 1771. Les théorèmes énoncés ci-dessus sont connus depuis longtemps. *Voir* Midy : *De quelques propriétés des nombres*, in-4°, 1835, p. 12. Tm.

NOTE

Sur le sinus de la moitié d'un arc,

PAR M. AYNARD,
Professeur de mathématiques.

Lorsque l'on donne le sinus d'un arc, et que l'on cherche à exprimer en fonction de cette unique donnée le sinus et le cosinus de sa moitié, on obtient, en combinant les deux équations,

$$2\sin\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\alpha=\sin\alpha,$$

$$\cos^2\frac{1}{2}\alpha+\sin^2\frac{1}{2}\alpha=1\,;$$

les deux relations suivantes :

$$\left.\begin{aligned}\sin\frac{1}{2}\alpha+\cos\frac{1}{2}\alpha&=\sqrt{1+\sin\alpha},\\ \sin\frac{1}{2}\alpha-\cos\frac{1}{2}\alpha&=\sqrt{1-\sin\alpha}\,;\end{aligned}\right\}\qquad(2)$$

d'où l'on déduit facilement les valeurs cherchées :

$$\sin\frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{1+\sin\alpha} + \frac{1}{2}\sqrt{1-\sin\alpha},$$

$$\cos\frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{1+\sin\alpha} - \frac{1}{2}\sqrt{1-\sin\alpha}.$$

Aucune difficulté ne se présente lorsque l'on suppose, ainsi que l'énoncé du problème le comporte, que l'arc α est donné par son sinus ; chacune des expressions a quatre valeurs à cause de la duplicité des signes dont chacun des radicaux peut être affecté, et l'on vérifie trigonométriquement qu'il en doit être ainsi. Mais, si l'arc α est donné par lui-même conjointement avec son sinus, il est clair qu'une seule détermination doit être acceptée pour le sinus de sa moitié et il reste à trouver le signe qui, dans ce cas, affecte chaque radical, ou, en d'autres termes, à préciser, dans l'équation (2), le signe des sommes

$$\sin\frac{1}{2}\alpha + \cos\frac{1}{2}\alpha, \quad \text{et} \quad \sin\frac{1}{2}\alpha - \cos\frac{1}{2}\alpha.$$

On peut y parvenir plus simplement qu'on ne le fait ordinairement par les considérations suivantes. On a :

$$\sin\frac{1}{2}\alpha + \text{Cos}\frac{1}{2}\alpha = \sin\frac{1}{2}\alpha + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\alpha\right),$$

$$\sin\frac{1}{2}\alpha - \cos\frac{1}{2}\alpha = \sin\frac{1}{2}\alpha - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\alpha\right),$$

ou, en développant les seconds membres de ces égalités d'après les formules qui servent à transformer en un produit, soit la somme, soit la différence de deux sinus :

$$\sin\frac{1}{2}\alpha + \cos\frac{1}{2}\alpha = 2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right),$$

$$\sin\frac{1}{2}\alpha - \cos\frac{1}{2}\alpha = 2\cos\frac{\pi}{4}\sin\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right).$$

On voit par là que les signes des radicaux sont ceux de

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4}\right) \quad \text{et de} \quad \sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4}\right);$$

mais, puisque l'arc α est connu, l'arc $\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4}$ pourra être calculé ; l'on saura dans quel quadrant tombe son extrémité, et par suite le signe de son sinus et de son cosinus. Toute ambiguïté relative aux signes des radicaux disparaîtra par là même (*V.* p. 49).

NOTE

Sur la distance d'un point à une droite dans l'espace; axes rectangulaires.

PAR M. AYNARD,
Professeur de mathématiques.

—

Le procédé que l'on emploie d'ordinaire en géométrie analytique pour trouver la distance d'un point à une droite exige un calcul assez laborieux ; on peut désirer d'arriver au résultat d'une manière plus simple.

Soient

$$x = az + \alpha, \quad y = bz + \beta,$$

les équations de la droite donnée, et désignons par x', y', z' les coordonnées du point dont il s'agit. L'équation du plan perpendiculaire à la droite, et passant par le point donné, sera

$$a(x - x') + b(y - y') + z - z' = 0. \qquad (1)$$

La marche directe consisterait à tirer de ces trois équations les valeurs de x, de y et de z pour les substituer dans la formule

$$d = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')},$$

expression de la distance du point donné au point où la droite perce le plan. On forme ordinairement les différences $x - x'$, $y - y'$, $z - z'$ pour les élever ensuite au carré ; l'artifice suivant a pour objet d'éviter la seconde partie de ce calcul. On peut mettre les équations de la droite sous la forme équivalente :

$$x - x' = a(z - z') - m, \tag{2}$$

$$y - y' = b(z - z') - n, \tag{3}$$

en posant, pour plus de simplicité,

$$x' - az' - \alpha = m, \quad \text{et} \quad y' - bz' - \beta = n.$$

Les équations (1), (2) et (3) donneront, par un calcul simple,

$$z - z' = \frac{ma + nb}{a^2 + b^2 + 1},$$

$$y - y' = \frac{a(mb - na) - n}{a^2 + b^2 + 1},$$

$$x - x' = \frac{b(na - mb) - m}{a^2 + b^2 + 1}.$$

Multiplions l'équation (2) par $x - x'$, l'équation (3) par $y - y'$, et ajoutons les deux produits avec l'identité

$$(z - z')^2 = (z - z')^2,$$

il vient, en ayant égard à l'équation (1),

$$d^2 = -m(x - x') - n(y - y').$$

Substituant à la place de $x - x'$ et de $y - y'$ les valeurs précédemment trouvées, on a :

$$d^2 = \frac{m^2 + n^2 + (ma - nb)^2}{a^2 + b^2 + 1};$$

d'où enfin, en remplaçant m et n par leurs valeurs, et simplifiant autant que possible,

$$d = \sqrt{\frac{(x' - az' - \alpha)^2 + (y' - bz' - \beta)^2 + [a(y' - \beta) - b(x' - \alpha)]^2}{a^2 + b^2 + 1}}.$$

(*V.* t. III, p. 549.)

DISTANCE

du centre du cercle inscrit au point de rencontre des hauteurs dans un triangle rectiligne.

PAR M. MENTION,
élève en spéciales.

—

Soit d cette distance, je dis qu'on a :

$$d^2 = 4R^2 + 2r^2 - \frac{a^2+b^2+c^2}{2},$$

D, Δ désigneront les mêmes distances que dans l'article de la page 193 de ce volume, et δ sera la distance du centre du cercle inscrit au centre du cercle circonscrit.

Soient A, B, C, G (*fig.* 42) le centre du cercle inscrit, le centre du cercle circonscrit, le point de rencontre des hauteurs, le centre de gravité.

Le point G est, comme on le sait, au tiers de BC ; d'où la relation, remarquant que BC $=$ 3D,

$$9\Delta^2 = 6\delta^2 + 3d^2 - 18D^2$$

ou

$$3\Delta^2 = 2\delta^2 + d^2 - 6D^2,$$

ce qui donne

$$d^2 = 3\Delta^2 - 2\delta^2 + 6D^2.$$

Or

$$\Delta^2 = r^2 + \frac{(p-a)^2+(p-b)^2+(p-c)^2}{3},$$

$$-\frac{a^2+b^2+c^2}{9} = r^2 + \frac{a^2+b^2+c^2-p^2}{3} - \frac{a^2+b^2+c^2}{9},$$

$$\delta^2 = R^2 - 2Rr,\quad D^2 = R^2 - \frac{a^2+b^2+c^2}{9}.$$

(*Voyez* page 196.)

Substituant dans la valeur de d^2, il vient :

$$d^2 = 3r^2 - p^2 + 4R^2 + 4Rr = 4R^2 + 2r^2 + r^2 - p^2 + 4Rr.$$

$$r^2 = \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p},$$

d'où
$$r^2 - p^2 = \frac{(p-a)(p-b)(p-c) - p^3}{p}$$
$$= -2p^2 + ab + ac + bc - \frac{abc}{p};$$

remarquant que $4Rr = \frac{abc}{p}$ il viendra pour d^2 :

$$d^2 = 4R^2 + 2r^2 - 2p^2 + ab + ac + bc = 4R^2 + 2r^2 - \frac{a^2+b^2+c^2}{2},$$

puisque
$$p^2 = \left(\frac{a+b+c}{2}\right)^2 = \frac{a^2+b^2+c^2}{4} + \frac{ab+ac+bc}{2}.$$

Comme corollaire, nous pouvons prouver que le cercle passant par les milieux des côtés d'un triangle est tangent au cercle inscrit et aux cercles ex-inscrits.

Le centre de ce cercle (considérations sur le triangle rectiligne, t. II, p. 197) est situé au milieu I de BC, et son rayon est $\frac{R}{2}$.

Dans le triange BAC, on aura :

$$2\overline{AI}^2 = \delta^2 + d^2 - \frac{9D^2}{2}$$

ou remplaçant d^2 par sa valeur ainsi que δ^2 et D^2,

$$2\overline{AI}^2 = \frac{R^2}{2} - 2rR + 2r^2 = 2\left(\frac{R}{2} - r\right)^2.$$

On le prouverait de même pour les cercles ex-inscrits, seulement on aurait pour d'^2 (d' étant la distance analogue à d, et α le rayon du cercle ex-inscrit) :

$$d'^2 = 4R^2 + 2\alpha^2 - \frac{a^2+b^2+c^2}{2}, \quad \delta'^2 = R^2 + 2R\alpha.$$

PROBLÈME

sur deux coniques qui se touchent; proposé au concours d'école normale, 1843 (V. t. II, p. 410).

PAR M. H. HENNE,
de Douai.

Deux courbes du second degré étant tangentes l'une à l'autre en deux points, démontrer analytiquement que si d'un point quelconque de la droite qui joint les deux points, on mène les quatre tangentes à ces courbes, les points de contact sont en ligne droite.

Soient

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0,$$
$$A'y^2+B'xy+C'x^2+D'y+E'x+F'=0,$$

les équations des deux courbes.

Je prends la droite AB (*fig.* 41 *bis*) pour axe des y et la tangente en B pour axe des x.

Je fais $x=0$, et j'indique que les deux équations résultantes ont chacune une racine nulle; et que les deux autres racines sont égales.

Ce qui donne $\quad F=0;\ F'=0;\ \frac{D}{A}=\frac{D'}{A'}.$

Les équations deviennent alors en divisant tous les coefficients par A et par A':

$$y^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex=0,$$
$$y^2+B'xy+C'x^2+Dy+E'x=0.$$

Je fais ensuite $y=0$ et j'indique que les deux équations ont chacune deux racines nulles. Ce qui me donne les nouvelles conditions $E=0$; $E'=0$.

J'obtiens donc en définitive les deux équations

$$y^2+Bxy+Cx^2+Dy=0, \qquad (1)$$
$$y^2+B'xy+C'x^2+Dy=0\,; \qquad (2)$$

or, si j'appelle β l'ordonnée d'un point quelconque C de la droite AB, les cordes de contact des tangentes passant par ce point seront

$$(2\beta+D)\,y+B\beta x+D\beta=0,$$
$$(2\beta+D)\,y+B'\beta x+D\beta=0.$$

Pour prouver que ces deux équations sont identiques, il suffit de démontrer que $B'=B$. Pour cela, j'élimine y^2 entre les équations (1), (2).... et je divise le résultat par x. J'obtiens

$$(B-B')\,y+(C-C')\,x=0,$$

qui représente la droite AB ; identifiant avec l'équation $x=0$. J'obtiens $B=B'$, donc les deux cordes de contact sont identiques et par conséquent les quatre points sont en ligne droite. C. Q. F. D.

Nota. Deux coniques à double contact peuvent être considérées comme les perspectives de deux cercles concentriques (*Prop. projectives*, p. 65) dont la corde de contact est à l'infini ; considérant un point à l'infini comme pôle, sa polaire est un diamètre commun aux deux cercles ; et ce diamètre commun est la perspective de la polaire du point C par rapport aux deux coniques ; donc, etc. Tm.

BIBLIOGRAPHIE.

De l'examen des candidats a l'école polytechnique, par un ancien élève de cette école : Paris, Janvier 1846, in-8 de 43 pages (*).

Nous commencerons par transcrire une note qu'on lit au bas de la page 12, « il n'entre certes pas dans mes inten- » tions de faire ici la critique de MM. les Examinateurs, » dont, j'honore, je respecte infiniment le mérite et l'im- » partialité, et qui ne sont nullement responsables des ré- » sultats dus à un système d'examen vicieux. »

Pour établir les vices du système, l'auteur compare les numéros d'admission à l'école polytechnique, et de sortie de la même école, de 28 élèves entrés en 1844 à l'école des ponts et chaussées, et parvient à ce résultat.

Ceux qui avaient en entrant les numéros de

1 à 10	ont été bien classés.
11 à 20	assez bien classés.
21 à 30	médiocrement bien classés.
31 à 60	mal classés.
61 à 100	très-mal classés.
101 et plus	classés d'une manière absurde.

On trouve en effet que le 167^{me} en entrant avait le n°15 en sortant. C'est un fait isolé. Il serait instructif d'avoir de ces tableaux pour plusieurs années consécutives, et aussi de connaître les rangs d'admission des anciens élèves, aujourd'hui membres de l'Académie des sciences. L'auteur va au-devant

(*) Chez Carilian-Gœury et V^{ve} Dalmont, libraires.

d'une objection. Qu'importe que les élèves soient mal classés en entrant, pourvu qu'ils soient bien classés en sortant? il importerait en effet assez peu si les candidats, comme les médecins, les avocats, pouvaient se représenter indéfiniment. Il n'en est pas ici de même, en classant mal un élève, vous brisez sa carrière irrévocablement. Si le 167e peut devenir le 15e, qui vous garantit que le 200e non admissible, ne serait pas devenu le 10e en sortant? Voici d'ailleurs un fait dont je garantis l'authenticité. A une séance du conseil d'admission, un examinateur dit à haute voix, *sujet distingué*, *éminemment admissible*; aussitôt son co-examinateur s'écrie relativement au même élève, *sujet stupide*, *incapable de suivre les cours*. Qui avait raison? Ce qu'il y a de certain, c'est qu'un critérium qui amène une telle divergence est difficile à qualifier.

Voici à quoi l'auteur attribue les inconvénients du mode actuel.

Pour réussir aux examens il faut trois choses: 1° La science. 2° La mémoire. 3° La hardiesse, assurance ou présence d'esprit.

« On rencontre souvent des mathématiciens très-instruits,
» très-savants, et qui sont néanmoins de fort mauvais pro-
» fesseurs, débitant leur *marchandise* d'un ton lourd et mo-
» notone peu propre à faire connaître leur mérite réel. Or
» un élève *au tableau* est précisément un professeur qui
» montre au public et surtout à l'examinateur, comment
» doivent être résolues les questions qu'on lui adresse : il
» peut très-souvent arriver que la manière dont il répond
» soit un indice fort incertain de sa capacité. S'il est timide,
» qu'il n'ait pas de facilité à exprimer ses idées, la frayeur
» s'empare de lui, paralyse ses moyens, et plus il lui serait
» nécessaire d'avoir toute sa présence d'esprit, et moins il
» en jouit. Si sa mémoire n'est pas parfaitement sûre, elle
» le sera bien moins encore en ce fatal moment; son trouble

» augmentera de plus en plus, il aura comme un voile devant » les yeux, et une question mal comprise et mal résolue, le » conduira à mal comprendre, et à ne pas résoudre les » autres. »

L'auteur pense que la science devrait être la partie prépondérante, et toutefois ce sont les deux facultés, la mémoire et la présence d'esprit qui exercent la plus forte influence. De là découlent les classements bisarres du mode actuel; pour y remédier, l'auteur propose trois mesures.

« 1° Restreindre le nombre des aspirants à l'école poly» technique, en détournant de cette carrière ceux qui n'ont » notoirement aucune aptitude aux sciences mathématiques.

» 2° Adopter une méthode uniforme d'enseignement et de » préparation aux cours de cette école, où tous ceux qui y » sont admis, ont les mêmes professeurs, reçoivent la même » instruction, se livrent aux mêmes exercices.

» 3° Faire d'une composition écrite, offrant à tous les as» pirants le même degré de difficulté, l'épreuve principale » qu'ils aient à subir, et de l'examen oral, l'épreuve acces» soire. » (Pages 23 et 24.)

Lacroix, dans son excellent ouvrage sur l'*Enseignement*, prescrit aussi cette dernière mesure, comme critérium principal.

Nous pensons que le mode adopté pour les examens de l'école de Saint-Cyr, pourrait s'appliquer avec plus de succès encore à l'école polytechnique. Les examinateurs actuels parcoureraient la France, pour dresser la liste, sans aucuns coefficients, de ceux qui auraient le droit de se présenter aux examens. Il serait formé un jury composé de trois membres de l'Académie des sciences, et parmi lesquels, au moins un professeur à l'école polytechnique. Ce jury se transporterait dans les diverses localités immédiatement après les premiers examens, et dresserait la liste définitive et graduée d'admissibilité. Il serait peut-être plus convenable encore que ce jury restât à Paris, et les candidats s'y rendraient soit à leurs frais, soit, en cas de besoin, à l'aide d'une subvention départementale. On aurait ainsi toutes les garanties qu'il est humainement possible d'obtenir.

Pour l'exécution de la seconde mesure, l'auteur propose de faire composer *officiellement* un cours contenant toutes les matières exigées; ouvrage officiel, soumis tous les cinq ans à une révision; le seul sur lequel devraient porter exclusivement les interrogations. On éviterait ainsi aux élèves, cette grande perte de temps qu'entraînent les *rédactions* particulières à chaque professeur; c'est même là, à ce qu'il nous semble, le grave inconvénient de nos classes littéraires; les élèves y écrivent trop, et ne lisent pas assez; et pourtant c'est seulement par la lecture assidue des bons auteurs qu'on apprend à penser, qu'on apprend à écrire.

Si ces idées sont jamais admises, le gouvernement devrait charger des membres de l'Académie d'écrire des *Éléments*. N'oublions pas que les Euler, les Clairaut, les Bezout, les Lacaille, les Bossut, les Lagrange, les Legendre ont composé des ouvrages élémentaires; que ces ouvrages, quoique vieillis et arriérés, malgré les vicissitudes des temps, ont conservé une valeur intrinsèque; leurs divers mérites étaient fondés, non sur la position des auteurs, chose qui s'en va avec et quelquefois avant l'homme; mais sur le génie des auteurs, ce qui est fort différent.

Cet écrit, où l'on remarque un grand esprit de modération, cachet de la véritable force, sera lu avec fruit par ceux qui s'intéressent à ces matières, et surtout par ceux qui ont mission de s'en occuper.

Toutefois, nous devons blâmer fortement l'idée singulière, en vue de diminuer le nombre des candidats, de faire déposer une certaine somme par chacun d'eux; somme qui serait acquise au gouvernement en cas d'admission, et qui serait rendue en cas de non-admission; une proposition si illibérale contraste avec l'esprit généreux de l'époque et avec celui qui règne dans l'ouvrage.

Avant de finir, qu'on nous permette une question. La loi dispense les septuagénaires des fonctions du jury; car, la loi suppose avec raison qu'à cet âge, on ne peut plus suivre avec attention pendant des heures entières, les dépositions des témoins, les débats judiciaires. Est-il plus facile, au même âge, de suivre pendant un mois entier, pendant des journées entières, les calculs, les raisonnements abstraits des sciences exactes, et étant à la fois juré et juge, de prononcer sur le mérite relatif et sur le sort des candidats? c'est fort douteux. Tout homme consciencieux arrivé à un certain âge, qui sans être forcé par une impérieuse nécessité, accepte de telles fonctions, une aussi grave responsabilité, annonce par cette acceptation même, des facultés qui baissent. La loi ne devrait-elle pas garantir les citoyens contre une telle occurrence, si elle se présentait? Tm.

RECUEIL DE FORMULES

Et de valeurs relatives aux fonctions circulaires et logarithmiques.

(Suite, v. p. 351.)

—

62. $$\sin a + \sin(a+b) + \sin(a+2b) + \ldots \sin(a+nb) = \frac{\sin\left(a+\frac{1}{2}nb\right)\sin\frac{1}{2}(n+1)b}{\sin\frac{1}{2}b}.$$

63. $\cos a + \cos(a+b) + \cos(a+2b) + \ldots . \cos(a+nb) =$

$$= \frac{\cos\left(a+\frac{1}{2}nb\right)\sin\frac{1}{2}(n+1)b}{\sin\frac{1}{2}b}.$$

64. $\cos a + \cos 3a + \cos 5a + \ldots . \cos(2n+1)a = \frac{1}{2};$

$(2n+3)a = \pi$ (V. t. III, 518).

65. $\cos 2a + \cos 4a + \cos 6a + \ldots . \cos 2(n+1)a = -\frac{1}{2};$

$(2n+3)a = \pi.$

66. $\cos a + \cos 3a + \cos 5a + \ldots . \cos(2n-1)a = 0;$

$2na = \pi.$

67. $\cos 2a + \cos 4a + \cos 6a + \ldots . \cos 2(n-1)a = 0;$

$2na = \pi.$

Trigonométrie sphérique.

a, b, c côtés ; A, B, C, angles respectivèment opposés.

68. $\sin a \sin B = \sin b \sin A$; en fournit deux autres.

69. $\cos a = \cos b \cos c + \cos A \sin b \sin c$; id.

70. $\cos A = -\cos B \cos C + \cos a \sin B \sin C$; id.

71. $\sin a \sin B \cot A = \cos a \sin c - \cos B \sin a \cos c$ en fournit cinq autres.

72. $\sin A \sin b \cot a = \cos A \sin C + \cos b \sin A \cos C$; id.

$$p = \frac{1}{2}(a+b+c); \quad P = \frac{1}{2}(A+B+C).$$

73. $\sin^2\frac{1}{2}A \sin b \sin c = \sin(p-b)\sin(p-c)$; fournit deux autres.

74. $\cos^2\frac{1}{2}A \sin b \sin c = \sin p \sin(p-a)$; id.

75. $\tang^2\frac{1}{2}A \sin p \sin(p-a) = \sin(p-c)\sin(p-b)$; id.

76. $\sin^2\frac{1}{2}a \sin B \sin C = -\cos P \cos(P-A)$; id.

77. $\cos^2\frac{1}{2}a\sin B\sin C=\cos(P-B)\cos(P-C)$; fournit deux autres.

78. $\tang^2\frac{1}{2}a\cos(P-B)\cos(P-C)=-\cos P\cos(P-A)$; id.

79. $\tang\frac{b-a}{2}.\sin\frac{1}{2}(A+B)=\tang\frac{1}{2}c\sin\frac{1}{2}(B-A)$; id.

80. $\tang\frac{a+b}{2}.\cos\frac{1}{2}(A+B)=\tang\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}(B-A)$; id.

81. $\tang\frac{B-A}{2}.\sin\frac{1}{2}(a+b)=\cot.\frac{1}{2}C\sin\frac{1}{2}(b-a)$; id.

82. $\tang\frac{(B+A)}{2}.\cos\frac{1}{2}(a+b)=\cot.\frac{1}{2}C\cos\frac{1}{2}(b-a)$; id.

SOLUTION DE LA QUESTION 118.

PAR M. DROUETS,
Élève au Collége royal militaire.

Si on élève à la même puissance positive les côtés d'un triangle rectangle, la somme des puissances des côtés est plus grande que la puissance de l'hypoténuse lorsque l'exposant de cette puissance est moindre que 2, et moins grande si cet exposant surpasse 2.

Démonstration. Soient a, b, c les côtés, $a^2=b^2+c^2$ exprimera que le triangle est rectangle. La seule puissance positive inférieure à 2 est 1, et on sait que a est $<b+c$ pour que le triangle soit possible. D'ailleurs

$$(b+c)^2=b^2+c^2+2bc=a^2+2bc;$$

donc $(b+c)^2>a^2$, ou $b+c>a$.

(*) Les solutions des problèmes 111 et 119 du même élève sont parvenues trop tard.

Soit m un exposant positif entier et supérieur à 2, on a à comparer a^m avec b^m+c^m. Or $a^2=b^2+c^2$; donc $a=(b^2+c^2)^{\frac{1}{2}}$, $a^m=(b^2+c^2)^{\frac{m}{2}}$. Il faut donc comparer $(b^2+c^2)^{\frac{m}{2}}$ avec b^m+c^m, ou bien élevant de part et d'autre au carré $(b^2+c^2)^m$ avec $(b^m+c^m)^2$. En développant de part et d'autre, il vient

$b^{2m}+mb^{2m-2}c^2+,\ldots.+mb^2c^{2m-2}+c^{2m}\ldots.$, et $b^{2m}+2b^mc^m+c^{2m}$.

On supprime $b^{2m}+c^{2m}$ partie commune.

Or, en ne considérant que les deux termes

$$mb^{2m-2}c^2+mc^{2m-2}b^2,$$

on a une somme supérieure à $2b^mc^m$; car cette somme est égale à

$$mb^2c^2(b^{2m-4}+c^{2m-4}), \qquad 2b^mc^m.$$

Divisant par b^2c^2,

$$m(b^{2m-4}+c^{2m-4}), \qquad 2b^{m-2}c^{m-2};$$

or, b^{2m-4} est le carré de b^{m-2}, c^{2m-4} est le carré de c^{m-2}. $b^{2m-4}+c^{2m-4}$ est donc $>$ que $2b^{m-2}c^{m-2}$, de plus m est au moins égal à 2; donc enfin $a^m > b^m+c^m$.

Note. Il reste à démontrer le cas où m est un nombre fractionnaire.

DÉMONSTRATION

de quelques formules d'Euler ; déduction de celles de Monge.

D'après M. Grunert, professeur à Brandebourg. (Crelle, t. VIII, p. 153, 1832.)

---

1. Soient Ox, Oy, Oz trois axes rectangulaires, dans le sens des coordonnés positives ; Ox'' un quatrième axe, dans

le sens positif, autour duquel tourne le système des trois axes qui viennent respectivement dans la position Ox', Oy', Oz'; on a évidemment :

$$xOx''=x'Ox''=\alpha\,;\quad yOx''=y'Ox''=\beta\,;\quad zOx''=z'Ox''=\gamma\,;$$

soit φ l'angle formé par les plans $x''Ox$, $x''Ox'$; ou bien par $x''Oy$ et $x''Oy'$; ou encore par $x''Oz$ et $x''Oz'$; car ces trois angles sont égaux.

2. On a, d'après les formules connues :

$$\begin{array}{llll} & x=Ax'+By'+Cz'\,; & x'=Ax+A'y+A''z\,; & \\ (1) & y=A'x'+B'y'+C'z'\,; & y'=Bx+B'y+B''z\,; & (2) \\ & z=A''x'+B''y'+C''z'\,; & z'=Cx+C'y+C''z\,; & \end{array}$$

ou
$$\begin{array}{lll} A=\cos xx'\,; & B=\cos xy'\,; & C=\cos xz'\,; \\ A'=\cos y'x'\,; & B'=\cos yy'\,; & C'=\cos yz'\,; \\ A''=\cos zx'\,; & B''=\cos zy'\,; & C''=\cos zz'\,; \end{array}$$

prenons une longueur positive $Ox''=x''$, et projetons-la sur les six axes; on aura :

$$x=x'=x''\cos\alpha\,;\ y=y'=x''\cos\beta\,;\ z=z'=z''\cos\gamma\,;$$

substituant ces valeurs dans les six équations, et divisant par x'', il vient :

$$\begin{array}{ll} \cos\alpha=A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma\,; & \cos\alpha=A\cos\alpha+A'\cos\beta+A''\cos\gamma \\ \cos\beta=A'\cos\alpha+B'\cos\beta+C'\cos\gamma\,; & \cos\beta=B\cos\alpha+B'\cos\beta+B''\cos\gamma \\ \cos\gamma=A''\cos\alpha+B''\cos\beta+C''\cos\gamma; & \cos\gamma=C\cos\alpha+C'\cos\beta+C''\cos\gamma; \end{array}$$

faisons

$$A'-B=p,\ A'+B=p';\quad A''-C=q,\ A''+C=q'\,;$$
$$B''-C'=r,\ B''+C'=r'.$$

On tire de ces six équations les suivantes :

$$p\cos\beta+q\cos\gamma=0\,;\ p\cos\alpha+r\cos\gamma=0\,;\ q\cos\alpha+r\cos\beta=0;$$
$$2(1-A)\cos\alpha=p'\cos\beta+q'\cos\gamma\,;\ 2(1-B')\cos\beta=p'\cos\alpha+r'\cos\gamma;$$
$$2(1-C'')\cos\gamma=q'\cos\alpha+r'\cos\beta\,;$$

la trigonométrie sphérique donne :

$$A=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\cos\varphi\ ;\ B'=\cos^2\beta+\sin^2\beta\cos\varphi\ ;$$
$$C''=\cos^2\gamma+\sin^2\gamma\cos\varphi\ ;$$

substituant dans les trois dernières équations, elles se changent en celles-ci :

$$2\sin^2\alpha\cos\alpha(1-\cos\varphi)=p'\cos\beta+q'\cos\gamma\ ;$$
$$2\sin^2\beta\cos\beta(1-\cos\varphi)=p'\cos\alpha+r'\cos\gamma\ ;$$
$$2\sin^2\gamma\sin\gamma(1-\cos\varphi)=q'\cos\alpha+r'\cos\beta\ ;$$

tirant les valeurs de p',q',r', et faisant attention qu'on a

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1\ ;$$

il vient :

$$p'=2\cos\alpha\cos\beta(1-\cos\varphi)\ ;\ q'=2\cos\alpha\cos\gamma(1-\cos\varphi)\ ;$$
$$r'=2\cos\beta\cos\gamma(1-\cos\varphi)\ ;$$
$$p=\cos\gamma\sqrt{p^2+q^2+r^2};\ q=\cos\beta\sqrt{p^2+q^2+r^2};\ r=\cos\alpha\sqrt{p^2+q^2+r^2}.$$

Donc, lorsqu'on connaît les neuf quantités A, B, C.....C''; on connaîtra α,β,γ et aussi φ ; ainsi on peut toujours faire coïncider un angle trièdre rectangle, avec un autre de même sommet, au moyen d'une seule rotation autour d'un axe ; et la position de cet axe est déterminée par les angles α,β et γ ; cherchons p,q,r en fonctions de ces angles.

3. Les équations (1) donnent :

$$x'=\frac{x[B'C'']+y[B''C]+z[BC']}{L};\ y'=\frac{x[A''C']+y[AC'']+z[A'C]}{L};$$
$$z'=\frac{x[A'B'']+y[A''B]+z[AB']}{L};$$

où les crochets représentent des *binômes alternés* ;

$$[B'C'']=B'C''-B''C'$$

et ainsi des autres ; L est la *résultante*, dénominateur commun ; ayant égard aux équations (2), on a les relations connues :

$$[B'C'']=LA\,;\ [B''C]=LA'\,;\ [BC']=LA''\,;\ [A''C']=LB\,;$$
$$[AC'']=LB'\,;\ [A'C]=LB''\,;\ [A'B'']=LC\,;\ [A''B]=LC'\,;$$
$$[AB']=LC''\,;$$

mais l'on a aussi :

$$A^2+A'^2+A''^2=1\,;\ B^2+B'^2+B''^2=1\,;\ A''^2+B''^2+C''^2=1\,,$$

d'où $$A''^2+B^2=1-A^2-B'^2-C''^2.$$

Combinant cette dernière équation avec celle-ci

$$A'B=AB'-LC''\,;$$

on en déduit :

$$(A'-B)^2=p^2=1+C''^2-(A+B')^2+2LC''=$$
$$=(1+C'')^2-(A+B')^2-2(1-L)C''$$
$$(A'+B)^2=p'^2=1+C''^2-(A-B')^2+2LC''=$$
$$=(1-C'')^2-(A-B')^2+2(1-L)C''\,;$$

or :

$$1-C''=\sin^2\gamma\,(1-\cos\varphi)\,;\ A-B'=(\sin^2\beta-\sin^2\alpha)\,(1-\cos\varphi)\,;$$

d'où $$(1-C'')^2-(A-B')^2=4\cos^2\alpha\cos^2\beta(1-\cos\varphi)^2\,;$$
$$p'^2=4\cos^2\alpha\cos^2\beta(1-\cos\varphi)^2+2(1-L)C''\,;$$

comparant cette valeur de p'^2 avec celle qu'on a trouvée ci-dessus; on en conclut $L=1$; donc $p^2=(1+C'')^2-(A+B')^2$; or :

$$1+C''+A+B'=1+\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma+(\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma)\cos\varphi=$$
$$=2(1+\cos\varphi)\,;$$
$$1+C''-A-B'=1+\cos^2\gamma-\cos^2\alpha-\cos^2\beta+(\sin^2\gamma-\sin^2\alpha-\sin^2\beta)\times$$
$$\cos\varphi=2\cos^2\gamma(1-\cos\varphi)\,;$$

d'où $$p^2=4\cos^2\gamma\sin^2\varphi\,;\ p=\pm2\cos\gamma\sin\varphi\,;$$

et par conséquent

$$q=\mp2\cos\beta\sin\varphi\,;\ r=\pm2\cos\alpha\sin\varphi\,;$$

mais

$$A'=\frac{1}{2}(p+p')\,;\ B=\frac{1}{2}(p'-p)\,;\ A''=\frac{1}{2}(q+q'),\ C=\frac{1}{2}(q'-q)\,,$$
$$B''=\frac{1}{2}(r'+r),\ C'=\frac{1}{2}(r'-r)\,;$$

conséquemment l'on a :

$$A=\sin^2\alpha\cos\varphi+\cos^2\alpha\,;\quad A'=\pm\cos\gamma\sin\varphi+\cos\alpha\cos\beta\,(1-\cos\varphi)\,;$$
$$A''=\mp\cos\beta\sin\varphi+\cos\alpha\cos\gamma(1-\cos\varphi)\,;$$
$$B'=\sin^2\beta\cos\varphi+\cos^2\beta\,;\quad B''=\pm\cos\alpha\sin\varphi+\cos\beta\cos\gamma(1-\cos\varphi)\,;$$
$$B=\mp\cos\gamma\sin\varphi+\cos\alpha\cos\beta(1-\cos\varphi)\,;$$
$$C''=\sin^2\gamma\cos\varphi+\cos^2\gamma\,;\quad C=\pm\cos\beta\sin\varphi+\cos\alpha\cos\gamma(1-\cos\varphi)\,;$$
$$C'=\mp\cos\alpha\sin\varphi+\cos\beta\cos\gamma(1-\cos\varphi).$$

Les doubles signes sont relatifs à l'axe de rotation Ox'' selon qu'il est pris dans l'angle dièdre, ou qu'on en prenne le prolongement dans l'angle opposé; ces belles formules sont celles qu'Euler a données dans le tome XX des *Nouveaux Mémoires de Saint-Pétersbourg*, 1775, pour le mouvement de rotation, et sur lesquelles M. Jacobi a attiré l'attention en les citant (*Crelle*, t. II, p. 188), à cause de leur élégance, mais sans en donner la démonstration.

4. On a :
$$1+A+B'+C''=2(1+\cos\varphi)=M$$
$$1+A-B'-C''=2\cos^2\alpha(1-\cos\varphi)=N$$
$$1-A+B'-C''=2\cos^2\beta(1-\cos\varphi)=P$$
$$1-A-B'+C''=2\cos^2\gamma(1-\cos\varphi)=Q\,;$$

d'où :

$$2A'=p'+p=\sqrt{PN}+\sqrt{MQ}\,;\ 2B''=r'+r=\sqrt{PQ}+\sqrt{MN}\,;$$
$$2C=q'-q=\sqrt{PM}+\sqrt{QN}\,;$$
$$2B=p'-p=\sqrt{PN}-\sqrt{MQ}\,;\ 2C'=r'-r=\sqrt{PQ}-\sqrt{MN}\,;$$
$$2A''=q'+q=\sqrt{QN}-\sqrt{PM}.$$

Ces remarquables formules ont été données la première fois par Monge (V. t. I, p. 504); on ne sait comment il y est parvenu; on voit qu'elles sont une conséquence de celles d'Euler; ainsi parmi les neuf quantités A, B.... C'', connaissant trois, telles que A, B', C'', on en déduit les six autres; ce qui doit être, puisqu'il existe entre elles les six équations :

$$A^2+B^2+C^2=1\,;\quad A'^2+B'^2+C'^2=1\,;\quad A''^2+B''^2+C''^2=1\,;$$
$$AA'+BB'+CC'=0;\ AA''+BB''+CC''=0;\ A'A''+B'B''+C'C''=0.$$

5. M. Grunert indique encore la relation suivante :

$$A'^2-B^2=B''^2-C'^2=C^2-A''^2=\pm 4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\sin\varphi(1-\cos\varphi).$$

Tm.

THÉORIE ANALYTIQUE

de la méthode perspective et application à la perspective circulaire des coniques.

D'après M. Jacobi (Crelle, t. VIII, p. 338, 1832.)

—

Lemme.

1. Soit $x=\dfrac{\beta-\beta's-\beta''t}{\alpha-\alpha's-\alpha''t}$; $y=\dfrac{\gamma-\gamma's-\gamma''t}{\alpha-\alpha's-\alpha''t}$; (1)

on en déduit $s=\dfrac{a'-b'x-c'y}{a-bx-cy}$; $t=\dfrac{a''-b''x-c''y}{a-bx-cy}$; (2)

$$\begin{array}{lll} [\beta'\gamma'']=a\,; & [\alpha'\gamma'']=b\,; & [\beta'\alpha'']=c\,; \\ [\beta\gamma'']=a'\,; & [\alpha\gamma'']=b'\,; & [\beta\alpha'']=c'\,; \\ [\gamma\beta']=a''\,; & [\gamma\alpha']=b''\,; & [\alpha\beta']=c''\,; \end{array} \qquad (3)$$

où le crochet indique un binôme alterné, par exemple,

$$[\beta'\gamma'']=\beta'\gamma''-\beta''\gamma';$$

et ainsi des autres. Considérant les équations (2), on a de même :

$$\begin{array}{lll} [b'c'']=\alpha\,; & [a'c'']=\beta\,; & [b'a'']=\gamma\,; \\ [bc'']=\alpha'\,; & [ac'']=\beta'\,; & [ba'']=\gamma'\,; \\ [cb']=\alpha''\,; & [ca']=\beta''\,; & [ab']=\gamma''\,; \end{array} \qquad (4)$$

et faisons $\qquad a\alpha-b\beta-c\gamma=e\,;$

on a :
$$a\alpha' = b\beta' + c\gamma'; \quad a\alpha'' = b\beta'' + c\gamma'';$$
$$\alpha c = \alpha' c' + \alpha'' c''; \quad \alpha b = \alpha' b' + \alpha'' b''.$$

Méthode perspective.

2. Soient x, y les coordonnées d'un point M d'un plan rapporté à des axes coordonnés x, y; et s, t les coordonnées d'un autre point m situé dans un autre plan et rapporté à des axes s, t; supposons que les deux points M et m sont assujettis à se trouver sur une droite passant par un point fixe O, situé dans l'espace ; en prenant le plan s,t pour *tableau* et le point O pour la position de l'œil, m sera la perspective de M ; s et t sont évidemment des fonctions de x et de y, et des fonctions du 1er degré, puisque OM ne peut percer le plan du tableau qu'en un point ; donc ces fonctions sont de la forme indiquée dans le lemme.

Les neuf constantes α, β. . . . γ'' dépendent de la position du tableau, des axes des s,t sur ce tableau et de la position de l'œil. Une de ces constantes peut être prise arbitrairement.

Nous supposons qu'on la prenne telle que l'expression c devienne égale à l'unité.

3. *Problème.* Les constantes α,β. . . . γ'' étant données, trouver la position de l'œil, celle du tableau, celle des axes s,t dans ce tableau?

Solution. Construisons les droites

$$b'x + c'y = a'; \quad b''x + c''y = a'';$$

soit A leur point d'intersection et P la perspective de A ; il est évident que ce point P est l'origine des s, t; puisque $s = 0$; $t = 0$.

Construisons les droites $bx + cy = a$; $b''x + c''y = a''$; soit A' le point d'intersection, la perspective de A' est à l'infini ; ou la droite OA' est parallèle à l'axe des s ; construisant de même les droites $bx + cy = a$, $b'x + c'y = a'$; la perspective du point A″ d'intersection est à l'infini et la droite OA″ est parallèle avec l'axe des t; le triangle AA′A″ est complétement déterminé ; les coordonnées de

$$\text{A sont } \frac{\beta}{\alpha},\ \frac{\gamma}{\alpha},$$

$$\text{A}' \text{ sont } \frac{\beta'}{\alpha'},\ \frac{\gamma'}{\alpha'},$$

$$\text{A}'' \text{ sont } \frac{\beta''}{\alpha''},\ \frac{\gamma''}{\alpha''};$$

le plan OA′A″ est parallèle à celui du tableau ; et si l'angle des s,t est droit, il s'ensuit que le point O est sur une sphère décrite sur A′A″ comme diamètre.

Le plan du tableau, celui des s, t coupe celui des x, y suivant une droite parallèle à A′A″ ; donc l'équation de cette droite sur le plan xy est $a-bx-cy=d$; l'équation de cette même droite sur le tableau, en remplaçant x, y par leurs valeurs, est

$$d(\alpha-\alpha's-\alpha''t)=e=1;$$

cette droite coupe les axes s et t en deux points B et B′ ; et le triangle PBB′ est semblable au triangle OAA′; mais

$$\text{PB}'=\frac{\alpha d-1}{d\alpha'};\quad \text{PB}''=\frac{\alpha d-1}{d\alpha''};\quad \frac{\text{PB}'}{\text{PB}''}=\frac{\alpha''}{\alpha'}=\frac{\text{OA}'}{\text{OA}''};$$

abaissons de O une perpendiculaire OA‴ sur A′A″; l'angle en O étant droit, on a :

$$\frac{\text{A}'\text{A}'''}{\text{A}''\text{A}'''}=\frac{\overline{\text{OA}'}^2}{\overline{\text{OA}''}^2}=\frac{\alpha''^2}{\alpha'^2}.$$

On a trouvé ci-dessus les coordonnées de A′ et de A″ ; donc les coordonnées de A‴ sont :

$$\frac{\alpha'\beta'+\alpha''\beta''}{\alpha'^2+\alpha''^2};\quad \frac{\alpha'\gamma'+\alpha''\gamma''}{\alpha'^2+\alpha''^2};$$

d'où, en prenant rectangulairement les axes x,y,

$$A'A''' = \frac{\alpha''}{\alpha'(\alpha'^2+\alpha''^2)} \sqrt{b^2+c^2};$$

$$A''A''' = \frac{\alpha'}{\alpha''(\alpha'^2+\alpha''^2)} \sqrt{b^2+c^2};$$

$$A'A'' = \frac{\sqrt{b^2+c^2}}{\alpha'\alpha''}; \quad OA''' = \frac{\sqrt{b^2+c^2}}{\alpha'^2+\alpha''^2};$$

donc le point O est sur un cercle dont on connaît le centre A''', dont le plan est perpendiculaire à $A'A''$ et dont le rayon OA''' est connu.

Le point B' est sur la droite AA' et sur la droite BB'; ses coordonnées sont connues par les équations

$$b''x + c''y = a'' \quad \text{et} \quad bx + cy = a - d;$$

d'où l'on déduit pour les coordonnées de B':

$$\frac{\beta''-c''d}{\alpha'}, \quad \frac{\gamma'+b''d}{\alpha'};$$

et de même pour les coordonnées de B'',

$$\frac{\beta''+c'd}{\alpha''}, \quad \frac{\gamma''-b'd}{\alpha''};$$

d'où

$$B'B'' = \frac{\alpha d-1}{\alpha'\alpha''}\sqrt{b^2+c^2} = \sqrt{\overline{PB'}^2+\overline{PB''}^2} = \frac{ad-1}{da'a''}\sqrt{\alpha'^2+\alpha''^2};$$

et de là
$$d = \sqrt{\frac{\alpha'^2+\alpha''^2}{b^2+c^2}};$$

ainsi la droite d'intersection $B'B''$ du plan du tableau avec le plan xy est complétement déterminée; mais l'inclinaison du plan du tableau reste arbitraire et ne dépend pas des neuf quantités $\alpha, \beta \ldots \gamma''$; et la position de l'œil n'est pas non plus complétement déterminée; il suffit qu'il se trouve sur une circonférence déterminée, mais la position O de l'œil étant donnée, on a aussi l'inclinaison du plan du tableau; puisque le plan est parallèle au plan $OA'A''$.

La détermination des points A, A′, A″ exige six données; celle du point A‴ sur la droite A′, A″, exige une septième, et enfin le rayon OA‴ une huitième parmi les neuf quantités $\alpha, \beta \ldots \gamma'''$, et l'on a de plus la condition $e=1$.

Avant de passer aux coniques, il faut expliquer quelques termes que M. Poncelet a introduits dans la science.

Sécantes et cordes idéales.

4. Deux courbes algébriques situées dans le même plan, l'une du degré m et l'autre du degré n, se coupent en mn points, déterminés chacun par deux coordonnées; supposons qu'il y ait r points réels et $2s$ points imaginaires; de sorte qu'on a $mn=r+2s$; soient x', y' et x'', y'' les coordonnées de deux de ces points; la sécante qui passe par ces points a pour équation $y\,(x'-x'')+x\,(y''-y')=x'y''-y'x''$; le carré de la corde interceptée a pour longueur $(x'-x'')^2+(y'-y'')^2$ et les coordonnées du milieu de la corde sont $\frac{1}{2}\,(x'+x'')$, $\frac{1}{2}\,(y'+y'')$; en combinant ensemble deux points, coordonnées réelles, ces trois expressions sont réelles; on a donc $\frac{r(r-1)}{2}$ sécantes réelles, autant de cordes et autant de points milieux; en combinant un point réel avec un point imaginaire, les trois expressions deviennent imaginaires; on a donc $2rs$ sécantes imaginaires autant de cordes et de points milieux; combinons les points imaginaires; soient

$$x'=\alpha+\beta i,\quad y'=\gamma+\delta i,\quad x''=\alpha'+\beta' i,\quad y''=\gamma'+\delta' i,$$

ou $\quad i=\sqrt{-1}\,;$

l'équation de la sécante prend la forme

$$\begin{aligned} &y\,(\alpha-\alpha')+x\,(\gamma'-\gamma)+\beta\delta'-\beta'\delta+\alpha'\gamma-\alpha\gamma'= \\ &=i\,[\,y\,(\beta'-\beta)+x\,(\delta-\delta')+\beta\gamma'-\gamma\beta'+\alpha\delta'-\alpha'\delta\,], \end{aligned}$$

lorsque les racines sont conjuguées, alors $\alpha = \alpha'$, $\gamma = \gamma'$, $\beta = -\beta'$, $\delta = -\delta'$, et l'équation se réduit à $\beta y - \delta x = \beta\gamma - \alpha\delta$ droite réelle; et comme elle a une même origine *analytique* que les sécantes réelles, M. Poncelet l'a nommée *sécante idéale*, mais dont l'existence est réelle; on aurait peut-être pu la désigner sous le nom de sécante *commune analytique*, pour la distinguer d'une sécante géométrique; il existe donc entre les deux courbes s sécantes communes analytiques; et les autres points imaginaires donnent encore $2s(s-1)$ sécantes imaginaires; ainsi en récapitulant on a, $r\dfrac{(r-1)}{2}$ sécantes *réelles*; s sécantes *idéales* et $2s(r+s-1)$ sécantes *imaginaires*.

L'expression analytique de la corde est

$$(\alpha' - \alpha)^2 + (\gamma' - \gamma)^2 + i\,[2(\alpha - \alpha')(\beta - \beta') + 2(\gamma - \gamma')(\delta - \delta')$$
$$-(\beta - \beta')^2$$
$$-(\delta - \delta')^2$$

Pour les racines conjuguées cette expression se réduit à $-4(\beta^2 + \delta^2)$; on la nomme pour la même raison donnée ci-dessus, *carré de la corde idéale*; il est essentiellement négatif et $\sqrt{\beta^2 + \delta^2}$ est ce qu'on nomme la moitié de la cord idéale; les points milieux des cordes idéales, sont réels et ont pour coordonnés α et γ.

Il est utile de remarquer que le point déterminé par les coordonnées

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x'} + \frac{1}{x''}\right), \quad \frac{1}{2}\left(\frac{1}{y'} + \frac{1}{y''}\right),$$

est réel et en général un point est réel lorsque ses coordonnées sont des fonctions symétriques d'intersections imaginaires conjuguées; de là on conclut que la projection conique d'une sécante *idéale* est la sécante idéale des deux projections.

Il est bien entendu qu'il peut y avoir des sécantes idéales *doubles*, *triples*, etc., c'est-à-dire des tangentes *communes idéales*, des osculations de divers degrés *idéales*, etc., selon que l'équation en mn a des racines imaginaires doubles, triples, etc.

Pour deux coniques on peut avoir :

$r=4$; $s=0$; alors il y a six sécantes communes réelles.

$r=2$; $s=1$; une sécante réelle ; une sécante idéale ; quatre sécantes imaginaires.

$r=0$; $s=2$; point de sécante réelle ; deux sécantes idéales ; quatre sécantes imaginaires.

Observation. Si une des deux lignes qui sont dans un même plan est une droite, les $\frac{r(r-1)}{2}$ sécantes réelles et les s sécantes idéales se réduisent évidemment à une seule droite ; mais il y a $\frac{r(r-1)}{2}$ cordes réelles et s cordes idéales et autant de points milieux de cordes idéales.

Perspective circulaire des coniques.

5. *Problème.* Étant donnée une conique la projeter perspectivement de manière que la perspective devienne un cercle.

Solution. Soit $Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+E'x+F=0$, l'équation de la conique ; menons dans son plan une droite qui ne la rencontre pas ; soit $a-bx-cy=0$, l'équation de cette droite, il suffit que $lb^2-2bcn+lc^2+ma^2-2abk'-2ack<0$. (*Voyez* t. II, p. 108.)

Les coordonnés des points d'intersection, sont imaginaires et l'on aura :

$$x'=\frac{\beta'+i\beta''}{\alpha'+i\alpha''}\,;\quad y'=\frac{\gamma'+i\gamma''}{\alpha'+i\alpha''}\,;$$
$$x''=\frac{\beta'-i\beta''}{\alpha'-i\alpha''}\,;\quad y''=\frac{\gamma'-i\gamma''}{\alpha'-i\alpha''}.$$

On prend arbitrairement les six quantités $\alpha', \alpha'', \beta', \beta'', \gamma', \gamma''$, qui seront données en fonction des coefficients de l'équation de la conique et de a, b, c;

d'ailleurs
$$a = [\beta' \gamma'']$$
$$b = [\alpha' \gamma'']$$
$$c = [\beta' \alpha'']$$

le point milieu de la corde idéale a pour coordonnées :

$$\frac{\alpha'\beta' + \alpha''\beta''}{\alpha'^2 + \alpha''^2}, \quad \frac{\alpha'\gamma' + \alpha''\gamma''}{\alpha'^2 + \alpha''^2};$$

et la moitié de la corde idéale est

$$\frac{\sqrt{b^2 + c^2}}{\alpha'^2 + \alpha''^2}.$$

Substituant les valeurs de x' et de y' ou de x'', y'', dans l'équation de la conique et égalant séparément à zéro la partie réelle et la partie affectée de i, on obtient :

$$F(\alpha'^2 - \alpha''^2) + C(\beta'^2 - \beta''^2) + A(\gamma'^2 - \gamma''^2) + B(\beta'\gamma' - \beta''\gamma'') + \\ + D(\alpha'\gamma' - \alpha''\gamma'') + E(\alpha'\beta' - \alpha''\beta'') = 0, \quad (1)$$

$$2F\alpha'\alpha'' + 2C\beta'\beta'' + 2A\gamma'\gamma'' + B(\beta'\gamma'' + \gamma'\beta'') + D(\gamma'\alpha'' + \alpha'\gamma'') + \\ + E(\alpha'\beta'' + \beta'\alpha'') = 0. \quad (2)$$

Donnons maintenant aux six quantités $\alpha, \beta, \ldots . \gamma''$ la même signification que dans le problème 3 ; on a :

$$x = \frac{\beta - \beta' s - \beta'' t}{\alpha - \alpha' s - \alpha'' t}; \quad y = \frac{\gamma - \gamma' s - \gamma'' t}{\alpha - \alpha' s - \alpha'' t}.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation de la conique on aura l'équation de sa perspective sur le plan de s, t où nous supposons les axes rectangulaires ; pour que cette perspective devienne un cercle, il faut écrire les relations connues, savoir que le coefficient de s^2 soit égal à celui t^2 et que le coefficient de st soit nul ; ce qui donne précisément les relations (1) et (2) ; la droite désignée par A'A'' est celle qui a pour équation

$$a - bx - cy = 0;$$

c'est la sécante idéale, et qui se projette perspectivement à l'infini ; les coordonnées du point milieu de la corde idéale, ce sont celles du point A'''; et la moitié de la corde idéale est le rayon du cercle sur lequel se trouve l'œil O. Ainsi pour que la conique projetée devienne un cercle, on mène une sécante idéale ; on détermine le milieu et la grandeur de la demi-corde idéale ; par ce milieu, on mène un plan perpendiculairement à la sécante idéale ; et dans ce plan, du même point milieu comme centre, et d'un rayon égal à la demi-corde idéale, on décrit une circonférence, sur laquelle on prend un point quelconque pour position de l'œil ; en prenant pour tableau un plan parallèle à celui qui passe par l'œil et la sécante idéale, la perspective de la conique sera un cercle sur ce tableau.

Problème. Deux coniques étant situées dans le même plan, les projeter de manière à ce que leurs perspectives deviennent des cercles ?

Solution. Si les coniques se coupent en quatre points, elles n'ont pas de corde idéale commune et le problème est évidemment impossible ; puisque les deux cercles perspectifs ne peuvent se couper qu'en deux points. Il faut donc que les deux coniques se coupent, aient seulement deux points ou aucun point en commun. Alors elles ont au moins une corde idéale en commun (4) ; on résout le problème par rapport à l'une de ces coniques et cette droite comme précédemment (5) ; et la seconde conique se projettera aussi suivant un cercle.

Remarque. On ne peut construire la sécante idéale commune *géométriquement*, que lorsque l'équation du quatrième degré résultat de l'élimination entre les équations de deux coniques se décompose en deux facteurs rationnels du second degré (*Voir* Durville, t. IV, p. 338). Mais les perspectives cycliques des deux coniques sont toujours analytiquement possibles.

Si l'on a $B=D=E=0$; l'équation de la conique $Ay^2+Cx^2+F=0$ est rapportée à des diamètres conjugués; faisons $c=0$; alors la sécante idéale est parallèle à l'axe des y; on trouvera :

$$\alpha'=1,\ \alpha''=0,\ \beta'=\frac{b}{a},\ \beta''=0,\ \gamma'=0,\ \gamma''=\frac{\sqrt{AFb^2+ACa^2}}{Ab^2}.$$

Les coordonnées du point milieu de la corde idéale sont $\beta''=\frac{a}{b}$ et 0; donc ce point milieu est l'intersection de la sécante idéale avec l'axe des x.

La corde idéale se réduit à γ'', ou à la valeur que prend y en substituant $\frac{a}{b}$ dans l'équation $Ay^2-Cx^2-F=0$; ce qui donne la construction suivante : on mène un diamètre parallèle à la sécante idéale, le point d'intersection de cette sécante avec le diamètre conjugué est le point milieu de la corde idéale, et construisant avec les mêmes diamètres conjugués une hyperbole, si la conique donnée est une ellipse et *vice versâ*; la moitié de la corde interceptée est la grandeur de la corde idéale, et pour trouver la corde commune idéale de deux coniques il faut recourir à la conique auxiliaire dite *lieu de centre* (*Voyez* t. IV, p. 480). Telles sont les constructions dont se sert M. Poncelet, qui a créé la théorie géométrique des sécantes idéales (*Prop. projectives*, p. 60). Dans le mémoire que nous extrayons, M. Jacobi a donné *transitoirement* la théorie analytique de ces *sécantes* : le but principal est de réduire l'intégration de la fraction différentielle

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{l+m\cos^2\varphi+n\sin^2\varphi+2l'\cos\varphi\sin\varphi+2m'\sin\varphi+2n'\cos\varphi}}$$

à une intégration de la fraction différentielle

$$\frac{dz}{\sqrt{L - M\cos z}};$$

après avoir employé d'admirables transformations analytiques, l'illustre analyste fait voir qu'on atteint directement ce but, en faisant usage du problème de perspective qu'on vient de lire. A cette occasion il dit : « Neque consensus ille » quæstionis geometricæ et analyticæ tam singularis videri » debet. Nam cum certis quibusdam configurationibus certæ » expressiones analyticæ respondeant, ubi per projectionem » sive aliud quod libet instrumentum geometricum configu- » rationem datam ad simpliciorem vel magis regularem re- » vocas, simul expressiones analyticas, quibus configuratio » continetur, per substitutiones idoneas, quæ instrumenti geo- » metrici locum tenent, in simpliciores transformatas habere » debes. E qua observatione haud raro ab elementis geome- » tricis ad graviores quæstiones analyticas transitum petere » licet, qualem antecedentibus indigitavimus. » (*Crelle*, t. VIII, p. 337). De là la nécessité, même pour les progrès de l'analyse, de cultiver surtout la géométrie contemporaine

---

SOLUTIONS ARITHMÉTIQUES

des principales questions relatives aux logarithmes (*).

PAR M. GUILMIN,

Ancien élève de l'École normale.

1. Lemme. *Les puissances successives d'un nombre* A, *plus*

(*) Quoique ces solutions soient connues, j'ai pensé qu'il ne serait pas inutile aux élèves des Cours d'élémentaires, de les trouver réunies dans ce recueil.

grand que 1, *vont en augmentant avec l'exposant, et on peut toujours trouver une puissance de* A *plus grande qu'un nombre donné* H, *si grand que soit* H.

Supposons $A = 1 + \alpha$. Les puissances de A forment une progression géométrique,

$$(1+\alpha),\ (1+\alpha)^2,\ (1+\alpha)^3 \ldots\ldots (1+\alpha)^m.$$

Désignons par t, l'un quelconque des termes de cette progression; le terme qui suivra t, sera $t(1+\alpha) = t + t\alpha$; je conclus de là que les termes de la progression, ou bien les puissances de H, vont en croissant. Le premier terme étant plus grand que 1, tous les autres le sont; t étant plus grand que 1, $t\alpha$ est plus grand que α; l'accroissement d'un terme à l'autre est donc plus grand que α. Le premier terme étant $1 + \alpha$, le deuxième est plus grand que $(1 + \alpha) + \alpha$, ou $1 + 2\alpha$; le troisième plus grand que $(1+2\alpha)+\alpha$; ou $1+3\alpha$; le quatrième plus grand que $1 + 4\alpha$; . . . le $m^{ième}$, c'est-à-dire $(1+\alpha)^m = A^m$ est plus grand que $1 + m\alpha$. Si donc on veut avoir A^m ou $(1+\alpha)^m > H$, il suffira de choisir m, tel que l'on ait :

$$1 + m\alpha > H, \text{ ou } m\alpha > H - 1,$$

c'est-à-dire $m > \dfrac{H-1}{\alpha}$; ce qui est toujours possible, puisqu'il y a des nombres entiers plus grands que tout nombre donné.

2. Lemme. *Les puissances d'un nombre* a, *moindre que* 1, *diminuent quand l'exposant augmente, et on peut toujours concevoir une puissance* a^m *de* a, *moindre qu'un nombre donné* h, *si petit que soit* h.

Ce nombre h doit être moindre que 1, sans quoi on aurait immédiatement $a < h$. Considérons le nombre A tel que $a \times A = 1$. Ce nombre A est plus grand que 1; car si A était égal à 1, on aurait aussi $a = 1$, ce qui n'est pas. Si A était moindre que 1, c'est-à-dire si on avait $A=1-\alpha$, on aurait $a\times A$ ou $1=a(1-\alpha)=a-a\alpha$, égalité contradictoire avec l'hypothèse $a<1$. L'égalité $a\times A$ conduit à celle-ci :

$$a^m \times A^m = 1.$$

En vertu de notre première proposition A^m croît avec m, donc alors a^m doit décroître. Nous voulons trouver une puissance a^m moindre que h. Considérons un nombre H, tel que $h\times H=1$; le nombre H est plus grand que 1. Nous avons simultanément $a^m=\frac{1}{A^m}$, et $h=\frac{1}{H}$; donc, l'inégalité $a^m<h$, équivaut à celle-ci, $\frac{1}{A^m}<\frac{1}{H}$; on vérifiera cette inégalité en choisissant m, tel que l'on ait $A^m>H$, ce qui est toujours possible, en vertu de notre première proposition, puisque A est un nombre plus grand que 1.

Arrivons maintenant aux logarithmes.

3. *Dans le système des logarithmes vulgaires, il n'y a que les puissances de* 10 *qui aient des logarithmes commensurables.*

Supposons, en effet, qu'un nombre donné A ait un logarithme commensurable $\frac{m}{n}$. Posons l'égalité, $\log A=\frac{m}{n}$; nous en déduisons $n\log A=m$. Mais n et m étant entiers, nous avons $n\log A=\log A^n$; $m=\log 10^m$; notre dernière égalité revient donc à celle-ci $\log A^n=\log 10^m$. Mais d'après la définition même des logarithmes, deux nombres différents ne sauraient avoir le même logarithme dans un système donné ; donc $A^n=10^m$. D'après cette égalité, A doit avoir les mêmes facteurs premiers 2, 5, que 10. Soit $A=2^\alpha 5^\beta$; alors $A^n=2^{\alpha n}5^{\beta n}$; mais $10^m=2^m.5^m$. L'égalité, $A^n=10^m$, se remplaçant par celle-ci : $2^{\alpha n}5^{\beta n}=2^m.5^m$, on en conclut $\alpha n=m$ et $\beta n=m$, ou $\alpha=\beta$. Par conséquent $A=2^\alpha 5^\alpha=10^\alpha$. A étant une puissance de 10, notre proposition est démontrée.

4. Le même raisonnement s'appliquera pour *trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un nombre donné* A *ait un logarithme commensurable dans un système dont la base est un nombre donné* b.

Posons toujours $\log A = \frac{m}{n}$; d'où $n \log A = m$. Nous avons $n \log A = \log A^n$, et $m = \log b^m$, puisque $\log b = 1$. L'égalité $n \log A = m$ équivaut donc toujours à celle-ci $\log A^n = \log b^m$, d'où l'on conclut $A^n = b^m$. D'après cette dernière égalité, on voit que chaque facteur premier de A doit exister dans b, et réciproquement. Si donc $b = a^\alpha c^\gamma d^\delta$, on doit avoir $A = a^{\alpha'} c^{\gamma'} d^{\delta'}$. De plus à cause de l'égalité $A^n = b^m$, on doit avoir $a^{\alpha' n} c^{\gamma' n} d^{\delta' n} = a^{\alpha m} c^{\gamma m} d^{\delta n}$. Ces deux produits de facteurs premiers ayant même valeur, on doit avoir :

$$\alpha' n = \alpha m, \text{ d'où } \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{m}{n}, \ \gamma' n = \gamma m, \text{ d'où } \frac{\gamma'}{\gamma} = \frac{m}{n},$$

$$\delta' n = \delta m, \text{ d'où } \frac{\delta'}{\delta} = \frac{m}{n}.$$

On conclut de ces égalités : $\frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{\gamma'}{\gamma} = \frac{\delta'}{\delta}$.

Ainsi donc, pour qu'un nombre donné A *ait un logarithme commensurable dans un système donné, dont la base est un nombre entier* b, *il faut*, 1° *que* A *renferme les mêmes facteurs premiers que* b, *et pas d'autres*; 2° *que les exposants respectifs de ces facteurs premiers dans* A *et dans* b *soient proportionnels entre eux.*

Ces conditions *nécessaires* sont *suffisantes*. En effet, si nous avons simultanément $b = a^\alpha c^\gamma d^\delta$ et $A = a^{\alpha'} c^{\gamma'} d^{\delta'}$, puis $\frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{\gamma'}{\gamma} = \frac{\delta'}{\delta}$, le nombre A aura un logarithme commensurable dans un système ayant pour base b. En effet, élevons b à la puissance α' et A à la puissance α, nous aurons :

$$b^{\alpha'} = a^{\alpha\alpha'} c^{\gamma\alpha'} d^{\delta\alpha'} \quad \text{et} \quad A^{\alpha} = a^{\alpha'\alpha} c^{\gamma'\alpha} d^{\delta'\alpha}.$$

On voit facilement que $b^{\alpha'} = A^{\alpha}$. En effet $\gamma\alpha' = \gamma'\alpha$, en vertu de l'égalité $\frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{\gamma'}{\gamma}$; puis $\delta\alpha' = \delta'\alpha$, en vertu de l'égalité $\frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{\delta'}{\delta}$. Puisque $A^{\alpha} = b^{\alpha'}$, $\log A^{\alpha} = \log b^{\alpha'}$, d'où

$$\alpha \log A = \alpha' \log b = \alpha', \text{ et } \log A = \frac{\alpha'}{\alpha};$$

justement le rapport entre l'exposant d'un facteur premier *de A, et l'exposant du même facteur premier dans b.*

On ferait une démonstration analogue pour le cas où b serait un nombre fractionnaire.

5. Puisque dans notre système, tout nombre qui n'est pas une puissance de 10, n'a pas pour logarithme un nombre commensurable, qu'entend-on par logarithme d'un pareil nombre, *qu'est-ce que le logarithme de* 367 par exemple? C'est ce que je vais essayer d'expliquer.

Considérons la progression géométrique formée par les puissances de la base 10 de notre système de numération, savoir :

$$(1) \qquad \div\div\, 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 \ldots\ldots$$

Quel que soit le nombre m *de moyens géométriques que l'on insère entre les termes de cette progression, pris* 2 *à* 2, *il n'arrivera jamais que* 367 *fasse partie de la progression obtenue;* en effet si on insérait le même nombre de moyens entre les termes d'une progression arithmétique, telle que celle-ci :

$$\div\, 0.\ 1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ \ldots\ldots$$

les deux nouvelles progressions obtenues formeraient un système de logarithmes de base 10, dans lequel 367 aurait un logarithme commensurable, s'il était un des termes de la

progression géométrique. D'ailleurs rien de plus simple que de démontrer directement cette proposition (*).

On peut insérer entre les termes de la progression* (1), *des moyens géométriques en nombre tel, qu'un nombre donné quelconque* 367 *par exemple, puisse être, sans erreur appréciable, considéré comme égal à un des termes de la nouvelle progression.

Appelons q la raison de la nouvelle progression, et m le nombre des moyens à insérer. Nous devons avoir $q=\sqrt[m+1]{10}$.

La nouvelle progression sera ainsi composée :

(2) $$1:q:q^2:q^3:q^4\ldots\ldots q^m\ldots\ldots$$

q est plus grand que 1, puisque q^{m+1} doit être égal à 10.

Les termes de la progression (2) croissant indéfiniment à partir de 1 (lemme 1er), nous pouvons regarder 367 comme compris entre deux termes consécutifs de cette progression, que nous désignerons par t et tq. Nous avons $t<367<tq$. Dès lors si nous prouvons qu'on peut insérer des moyens en nombre tel, que la différence entre t et tq soit moindre qu'un nombre donné δ, aussi petit que l'on voudra, nous aurons démontré notre proposition. Car l'erreur commise en regardant 367 comme égal à t, c'est-à-dire la différence $367-t$, sera moindre que δ. Or, $tq-t=t(q-1)$. Nous voulons avoir $tq-t$, ou $t(q-1)<\delta$. Si nous déterminons q par la condition que l'on ait $367(q-1)<\delta$, *à fortiori* aura-t-on, $t(q-1)<\delta$, puisque t est moindre que 367; mais on aura $367(q-1)<\delta$, si on a $q-1<\frac{\delta}{367}$, ou bien $q<1+\frac{\delta}{367}$. Mettons, au lieu de q, la valeur égale $\sqrt[m+1]{10}$, nous devons avoir $\sqrt[m+1]{10}<1+\frac{\delta}{367}$.

(*) La raison q de la nouvelle progression est une certaine racine de 10, $q=\sqrt[m+1]{10}$. Supposons $367=q^n$, alors $367=\sqrt[m+1]{10^n}$; d'où $367^{m+1}=10^n$; ce qui exigerait que 367 fût une puissance de 10.

Élevons les deux membres de cette inégalité à la puissance m ; il faut et il suffit que m soit tel que l'on ait $10<\left(1+\frac{\delta}{367}\right)^{m+1}$.

Or on peut toujours choisir m, tel que $\left(1+\frac{\delta}{367}\right)^{m+1}$ soit plus grand que 10 (lemme 1er). La dernière inégalité étant vérifiée, toutes les autres le sont.

Le raisonnement précédent peut se faire pour un nombre donné quelconque A, δ étant aussi petit que l'on voudra. Toute la différence consistera dans le plus ou moins grand nombre de moyens à insérer, suivant les grandeurs de A et de δ.

Comme il ne peut être question d'appliquer la théorie des logarithmes qu'à des nombres de grandeurs finies, on peut, *à la limite*, en supposant le nombre m des moyens, extrêmement grand, regarder comme remplies toutes les conditions semblables à la précédente, et tous les nombres plus grands que 1, comme faisant partie d'une progression telle que (2), dépendant d'une progression telle que (1). Il ne saurait résulter de cette supposition aucune erreur appréciable.

6. Si maintenant nous regardons la progression (1), comme faisant partie d'un système de logarithmes, de celui-ci, par exemple,

$$(\alpha)\qquad \begin{array}{l} \div\!\div 1:10:100:1000:10000\ldots, \\ \div 0.\ 1.\ 2.\ 3.\ 4\ldots \end{array}$$

nous pouvons concevoir qu'en même temps qu'on insère entre les termes de la progression géométrique, pris 2 à 2, le nombre m de moyens géométriques, indiqué plus haut, on insère le même nombre de moyens arithmétiques entre les termes de la progression arithmétique. Cela fait, on aura un système de logarithmes plus étendu, dans lequel tous les nombres plus grands que 1 pourront être considérés comme

ayant des logarithmes, puisque nous les regarderons comme égaux respectivement aux différents termes de la progression géométrique. *Log.* **367,** ***est le terme de la progression arithmétique correspondant au terme de la progression géométrique auquel on suppose*** **367,** ***égal à la limite.***

Généralement, étant donné un système quelconque, tel que (α),

$$(\alpha') \qquad \begin{array}{l} \div\div 1 : b : b^2 : b^3 : b^4 \ldots, \\ \div 0 . 1 . 2 . \ 3 . \ 4 \ldots \end{array}$$

on lui substitue par la pensée un système plus complet, tel que celui que nous venons d'indiquer. C'est dans ce système complet, dépendant du système donné (α'), qu'on dit que tout nombre a un logarithme (*).

Tout ce que nous venons de démontrer s'étend aux nombres plus petits que 1.

En effet, si on étend le système (α), comme d'habitude, au-dessous de l'unité, on pourra répéter pour un nombre quelconque moindre que 1, pour $\frac{3}{47}$, par exemple, tout ce qui a été dit pour 367. En effet, dans la progression indéfinie

$$\frac{1}{q^n} \ldots : \frac{1}{q^5} : \frac{1}{q^4} : \frac{1}{q^3} : \frac{1}{q^2} : \frac{1}{q} : 1 : q : q^2 : q^3 \ldots$$

(*) Si on veut définir bien rigoureusement log 367, on établira la proposition suivante: supposons qu'on insère un moyen entre les termes, pris 2 à 2, dans les deux progressions (α), puis une autre fois (2^2-1) moyens, puis (2^3-1) moyens, puis (2^4-1) moyens, etc. . . . qu'on prenne chaque fois le terme de la progression géométrique immédiatement inférieur à 367, et le terme correspondant de la progression arithmétique, pour former deux suites. Les nombres de la première qui ne peuvent diminuer, ont pour limite 367, et les nombres de la deuxième qui sont les logarithmes des premiers, sont dans le même cas, et ont une limite qui est le log de 367. Nous laissons à faire la démonstration, aussi simple que tout ce qui précède. Il y a une infinité de manière d'arriver à ces limites. La précédente n'est qu'un cas particulier de celle-ci; au lieu d'insérer 1, 2^2-1, 2^3-1, 2^k-1 moyens, on peut en insérer m, $m\ (2^2-1)$, $m\ (2^3-1)$, ... $m\ (2^k-1)$, m étant un nombre arbitraire fixe, et k croissant indéfiniment; le reste comme précédemment.

$\frac{3}{47}$ est compris entre deux termes consécutifs t et tq, dont la différence $tq - t = t(q - 1)$ peut être rendue moindre que tout nombre donné δ. En effet t étant moindre que 1, il suffira de remplir la condition $q - 1 < \delta$; ce qui est facile, car on a toujours $q = \sqrt[m+1]{10}$.

Ainsi, dans un système quelconque dont la base est un nombre plus grand que 1, tout nombre plus petit ou plus grand que 1 a un logarithme.

On voit facilement que, parmi les nombres moindres que 1, il n'y a que les nombres de la forme $\frac{1}{10^n}$ qui aient les logarithmes commensurables. Supposons en effet qu'un nombre a moindre que 1 ait un logarithme commensurable; ce logarithme ne peut être qu'un nombre négatif $-\frac{m}{n}$. Soit donc posé $\log a = -\frac{m}{n}$; on déduit de là $\log a = -m$; d'où $\log a^n = \log \frac{1}{10^m}$. Par suite $a^n = \frac{1}{10^m}$; donc a doit être une fraction qui, réduite à sa plus simple expression, aura le numérateur 1, soit donc $a = \frac{1}{A}$, A étant entier. L'égalité précédente équivaut à celle-ci : $\frac{1}{A^m} = \frac{1}{10^n}$; qui conduit à $A^m = 10^n$. On a vu qu'alors A devait être une puissance de 10. Soit $A = 10^\alpha$; $a = \frac{1}{10^\alpha}$; ce qu'il fallait prouver.

Pour un autre système de base entière b, on trouverait des conditions analogues à celles que nous avons trouvées.

7. Le logarithme d'un nombre quelconque, 367, qui n'est pas une puissance de 10, est donc une limite dont nous pouvons approcher autant que nous voudrons sans pouvoir l'at-

teindre. Nous ne chercherons donc à obtenir un tel logarithme que par approximation.

Soit donc proposé de trouver, dans notre système, log 367 à $\frac{1}{40}$ près, par exemple. Cela veut dire qu'il faut trouver le plus grand nombre de 40$^{\text{èmes}}$ contenus dans log 367. Soit $\frac{m}{40}$ le nombre cherché ; m est un nombre entier. Nous avons, d'après notre hypothèse,

$$\frac{m}{40} < \log 367 < \frac{m+1}{40};$$

d'où on déduit :

$$m < 40 \log 367 < m + 1.$$

m et $m + 1$ étant entiers, nous avons :

$$m = \log 10^m, \quad m + 1 = \log 10^{m+1}.$$

Nous avons aussi, $40 \log 367 = 367^{40}$. Substituant ces valeurs dans notre inégalité, il vient :

$$\log 10^m < \log 367^{40} < \log 10^{m+1};$$

d'où on conclut :

$$10^m < 367^{40} < 10^{m+1};$$

car les progressions de notre système étant croissantes, les nombres 10^m, 367^{40}, 10^{m+1} ont le même ordre de grandeurs que leurs logarithmes.

On aura donc m en cherchant quelles sont les puissances de 10 qui comprennent entre elles le nombre 367^{40}; il suffit pour cela de former cette puissance, et de compter les chiffres du résultat. Soit k le nombre des chiffres, alors 367^{40} est compris entre 10^{k-1}, le plus petit nombre de k chiffres, et 10^k le plus petit nombre de $k + 1$ chiffres. Par suite $m = k - 1$, et le log 367 est $\frac{k-1}{40}$ à $\frac{1}{40}$ près, par défaut, ou $\frac{k}{40}$ à $\frac{1}{40}$ près, par excès.

Remarque. Concevons qu'on insère (10 — 1), moyens entre les termes des progressions (α), pris 2 à 2, $\frac{k-1}{10}$ et $\frac{k}{10}$ seront 2 termes de la nouvelle progression arithmétique correspondant aux termes de la nouvelle progression géométrique qui comprennent entre eux le nombre 367.

Ce raisonnement s'applique évidemment à tout nombre A, quel qu'il soit, entier ou fractionnaire, quelle que soit la fraction $\frac{1}{\delta}$ qui marque l'approximation.

Désignons toujours par k le nombre des chiffres de la partie entière de A^δ. Nous aurons cette proposition

Pour connaître le logarithme d'un nombre quelconque A, *à* $\frac{1}{\delta}$ *près, dans le système vulgaire, il suffit d'élever ce nombre* A *à la puissance* δ, *on compte le nombre* k *des chiffres de la partie entière de* A^δ; *on divise* $k-1$ *et* k *par* δ, *les deux nombres* $\frac{k-1}{\delta}$ *et* $\frac{k}{\delta}$ *comprennent entre eux le logarithme de* A, *et expriment chacun ce logarithme à* $\frac{1}{\delta}$ *près, l'un par défaut, l'autre par excès.*

Ce raisonnement s'applique dans le cas d'une base quelconque, seulement il pourra ne pas être aussi facile de voir entre quelles puissances de la base b sera compris A^δ; il n'y aura similitude complète que dans le cas où la base du système de numération dans lequel serait écrit A coïnciderait avec la base du système de logarithmes.

Nous avons voulu seulement faire concevoir la possibilité d'avoir, par un moyen arithmétique, le logarithme d'un nombre donné, avec une approximation donnée, et non indiquer une méthode véritablement pratique pour résoudre cette question dans tous les cas.

En mettant en usage l'insertion de moyens en nombre 2^k-1, comme nous l'avons indiqué en note, précédemment, ce qui revient pour la progression géométrique à des extractions de racines carrées successives, on aura la méthode ordinairement indiquée pour résoudre le problème. Au reste vérifier si un nombre A est compris entre $\sqrt[2k]{B}$ et $\sqrt[2k]{C}$, cela revient à vérifier si A^{2k} est compris entre B et C.

8. Problème. *Passer d'un système à un autre.*

C'est-à-dire, *connaissant les logarithmes de tous les nombres dans un certain système, trouver le logarithme d'un nombre donné quelconque, dans un autre système dont la base* b *est seule donnée.*

Pour qu'un nombre donné ait un logarithme dans chaque système, il faut qu'il fasse partie de la progression géométrique de chacun ; nous devons donc regarder à la limite les deux progressions géométriques comme identiques ; les deux progressions arithmétiques seules seront différentes.

1er *système (donné)*

$$\because 1 : q : q^2 : q^3 : q^4 \ldots\ldots \qquad b$$
$$\div\ 0.\ d.\ 2d.\ 3d.\ 4d.\ldots\ldots \qquad \log b.$$

Soit d' la raison de la progression arithmétique de l'autre système ; désignons par k le rapport de d' à d ; puisque $\frac{d'}{d}=k$, nous avons $d'=dk$, et le 2e système peut s'écrire ainsi :

2e *système (base seule connue)*

$$1 : q : q^2 : q^3 : q^4 : \ldots\ldots \qquad b$$
$$0.kd.2kd.3kd.4kd.\ldots\ldots \qquad 1.$$

Entre les 2 logarithmes d'un même nombre quelconque pris dans les 2 systèmes, il y a un rapport fixe k ; le 2e logarithme, le nouveau, est égal au 1er multiplié par k. Nous connaissons log b dans l'ancien système (le 1er); dans le nouveau système, $\log' b = 1$; on doit donc avoir $1 = k \log b$, d'où $k = \frac{1}{\log b}$.

On passera donc du logarithme ancien au logarithme nouveau pour un nombre quelconque, en multipliant l'ancien logarithme par le quotient, $\frac{1}{\log b}$, de l'unité divisée par le logarithme de la base du nouveau système, étant pris dans l'ancien système.

Propositions accessoires.

9. 1 *et* 0 *sont des termes nécessaires dans les* 2 *progressions de tout système de logarithmes;* 1 *dans la progression géométrique,* 0 *dans l'autre : ces deux termes doivent se correspondre.*

L'utilité des logarithmes réside dans l'application du théorème fondamental et de ses conséquences immédiates; or ce théorème ne peut être vrai, en général, sans que 1 et 0 fassent partie des 2 progressions du système, et s'y correspondent.

En effet pour que ce problème fondamental soit vrai, il est nécessaire, 1° que le produit de deux termes quelconques de la progression géométrique soit un terme de cette progression. 2° Que la somme de deux termes quelconques de la progression arithmétique, soit un terme de cette progression. 3° Que le produit de deux termes quelconques de la première progression et la somme des termes correspondants de la seconde soient deux termes correspondants.

1° Soit a un terme de la progression géométrique et q la raison de cette progression; les termes qui suivent a sont des termes de la forme aq^n, et ceux qui le précèdent sont des termes de la forme $\frac{a}{q^n}$. Multiplions a par le terme suivant aq;

le produit a^2q devant être un terme de la progression, nous devons avoir $a^2q = aq^n$ ou $a^2q = \frac{a}{q^n}$; dans le premier cas on est conduit à $a^2 = aq^{n-1}$ ou $a = q^{n-1}$; alors en remontant la progression à gauche de $a = q^{n-1}$, on trouvera 1 pour le $(n-1)^{ème}$ terme à gauche. Dans le second cas, on est conduit à cette égalité $a^2 = \frac{a}{q^{n+1}}$. D'où $a = \frac{1}{q^{n+1}}$, alors en avançant à droite de ce terme $\frac{1}{q^{n+1}}$, on trouve que le $(n+1)^{ème}$ terme à droite est l'unité. Dans tous les cas 1 fait partie de la progression géométrique.

2° Soit b un terme de la progression arithmétique, et d la raison; les termes qui suivent b, sont de la forme $b+md$ et les termes qui précèdent sont de la forme $b-md$. Considérons les termes b et $b+d$; leur somme est $2b+d$, on doit avoir $2b+d = b+md$, ou $2b+d = b-md$. Dans le premier cas on est conduit à $2b = b+(m-1)d$, d'où $b = (m-1)d$ alors, en remontant la progression à gauche de d, on trouvera évidemment que le $(m-1)^{ème}$ terme à gauche est d. Dans le deuxième cas, on est conduit à $2b = b-(m+1)d$, d'où $b = -(m+1)d$; alors, en continuant la progression, on trouvera évidemment 0 pour le $(m+1)^{ème}$ terme à droite.

3° En vertu des deux conditions établies comme nécessaires, tous les termes de la progression géométrique sont de la forme q^n et tous ceux de la progression arithmétique ont la forme md. Considérons donc deux termes q et q^2 de la première et soient nd et $(n+1)d$ les termes correspondants de la deuxième. Le produit $q \times q^2 = q^3$ et la somme $nd+(n+1)d = (n+n+1)d$. Ce produit et cette somme doivent se correspondre. Or q^3 suit immédiatement q^2; de $(n+1)d$ à $(n+n+1)d$, il y a n termes, donc n doit être égal à 1. Puisque $nd = d$, q et d se correspondent ; donc 1 et 0 termes placés immédiatement avant q et d se correspondent nécessairement. Nous avons donc établi les trois parties de notre proposition. Il semble que nous ayions choisi des termes particuliers dans les deux progressions. Mais nous n'avions qu'à prouver la nécessité de nos conditions ; le théorème général doit être vrai pour des termes pris à volonté. Nous les avons pris de manière à simplifier le plus possible.

10. Pour terminer, je vais encore traiter une question qui sort des bornes de l'arithmétique, mais dont la démonstration ne m'a pas paru trop difficile pour être mise ici.

Cette question a été traitée par M. Vincent ; je suis arrivé au même résultat que lui, sans avoir connu son travail que je n'ai lu qu'ensuite. Si je laisse néanmoins ma démonstration, c'est qu'elle diffère un peu dans la première partie de celle de M. Vincent.

Lorsqu'on emploie les tables de Callet pour trouver le logarithme d'un nombre donné, ayant plus de 5 chiffres, l'erreur qui résulte de l'emploi de la proportion connue, en supposant exacts les trois premiers termes de cette proportion, est moindre que $\frac{1}{16}$ *de l'unité décimale du huitième ordre.*

Désignons par N le nombre que forment les cinq premiers chiffres du nombre donné ; on cherche le logarithme de $N+d$, d étant une partie décimale moindre que 1. Désignons encore par δ la différence tabulaire des logarithmes de N et $N+1$. Soit x la différence entre $\log(N+d)$ et $\log N$. La proportion que l'on établit est celle-ci :

$$1 : d :: \delta : x, \quad \text{d'où} \quad x = d\delta.$$

Nous cherchons une limite de l'erreur commise en prenant pour x cette valeur $d\delta$. Pour cela observons que

$$\delta = \log(N+1) - \log N = \log\left(\frac{N+1}{N}\right) = \log\left(1+\frac{1}{N}\right).$$

$$x = \log(N+d) - \log N = \log\left(\frac{N+d}{N}\right) = \log\left(1+\frac{d}{N}\right).$$

L'erreur en question est donc $\log\left(1+\frac{d}{N}\right) - d\delta$.

Mais $d\delta = d\log\left(1+\frac{1}{N}\right) = \log\left(1+\frac{1}{N}\right)^d$. Il faut trouver une limite de $\log\left(1+\frac{d}{N}\right) - \log\left(1+\frac{1}{N}\right)^d$.

En considérant les deux progressions de notre système écrites sous cette forme

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & : & (1+\alpha) & : & (1+\alpha)^2 & : & (1+\alpha)^3 & : & (1+\alpha)^4 \ldots \\ 0 & : & M\alpha & : & 2M\alpha & : & 3M\alpha & : & 4M\alpha. \end{array}$$

On voit que la différence entre deux termes quelconques consécutifs de la première progression est plus grande que α, (lemme 1[er]), tandis que la différence entre deux termes consécutifs de la seconde est $M\alpha$.

Si donc on considère deux nombres quelconques A et B, tels qu'il y ait n termes de A à B, on aura $B - A > n\alpha$, et $\log B - \log A = nM\alpha$; d'où $M(B-A) > \log B - \log A$.

J'aurai donc une limite supérieure de la différence

$$\log\left(1+\frac{d}{N}\right) - \log\left(1+\frac{1}{N}\right)^d,$$

en cherchant une limite de la différence

$$\left(1+\frac{d}{N}\right) - \left(1+\frac{1}{N}\right)^d,$$

et multipliant celle-ci par M. Mais on a :

$$\left(1+\frac{1}{N}\right)^d = 1 + \frac{d}{N} + \frac{d(d-1)}{1.2.N^2} + \ldots.$$

d étant moindre que 1, $d-1$, $d-2$, $d-3$, etc., sont des nombres négatifs ; on conclut de là facilement que la différence entre $\left(1+\frac{1}{N}\right)^d$, et $1+\frac{d}{N}$ a pour limite $\frac{d(d-1)}{2N^2}$. Mais d étant moindre que 1, la valeur absolue du numérateur est $d(1-d)$; la somme des valeurs absolues des deux facteurs de ce produit étant 1, ce produit est égal au plus à $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{4}$, donc la limite $\frac{d(1-d)}{2N^2}$ peut être remplacée par celle-ci $\frac{1}{8N^2}$. Si maintenant nous la multiplions par M, nous aurons pour limite supérieure de

$$\log\left(1+\frac{d}{N}\right)-\log\left(1+\frac{1}{N}\right)^d \text{ la quantité } \frac{M}{8N^2}.$$

Mais M est moindre que $\frac{1}{2}$; $\left(\text{car } M=\frac{1}{\text{log. népérien de } 10}\right)$. On aura donc *à fortiori* pour limite $\frac{1}{16N^2}$. Mais N^2 est au moins 10000, donc cette limite peut être remplacée par celle-ci $\frac{1}{16\times 10^8}$. Ce qui démontre notre proposition.

La limite $\frac{1}{16N^2}$ décroît indéfiniment quand N augmente.

QUESTIONS D'EXAMEN (*V*. t. III, p. 602).

—

V. Un nombre peut-il être à la fois un carré et un cube parfaits, sans être une sixième puissance?

Non. Soit $z=x^2=y^3$; d'où $\frac{x^2}{y^2}=y$. Ainsi y est un carré parfait; donc y^3 ou z est une sixième puissance. Soit, en général, $z = x^m = y^n$; x et y sont entiers, et m et n premiers entre eux. On peut mettre x sous la forme

$$x = \alpha^p \beta^q \ldots\ldots \gamma^r,$$

α, β, γ étant les facteurs nombres premiers; d'où

$$x^m = \alpha^{pm} \beta^{qm} \ldots\ldots, \gamma^{rm}.$$

Pour que cette expression soit une puissance $n^{ème}$, il faut que les exposants pm, qm...., rm soient des multiples de n; m et n étant premiers entre eux, p, q...., r doivent être les multiples de n; donc x est une puissance $n^{ème}$ d'un nombre, et par conséquent z une puissance mn^{eme}.

Un nombre étant simultanément une puissance de degré a_1, a_2...., a_p; désignant par d le plus petit nombre divisible à la fois par a_1, a_2...., a_p, le nombre donné, entier ou fractionnaire, est une puissance du degré d.

VI. Trouver le nombre entier qui, substitué à la place de x, rend à la fois les deux fractions $\frac{7x - 1}{4}$ et $\frac{5x + 3}{12}$ entières; peut-on voir *à priori* que le problème est impossible? Oui. Si $\frac{5x + 3}{12}$ est entier, trois fois ce nombre ou $\frac{5x + 3}{4}$ sera aussi entier. Cet entier ajouté à l'entier $\frac{7x - 1}{4}$ doit donner un nombre entier; donc $3x - \frac{1}{2}$ doit être un entier, résultat absurde; donc le problème est impossible.

Soient les deux fractions $\frac{ax + b}{c}$, $\frac{a'x + b'}{c'}$ qu'il s'agit de rendre entiers; si, en les ajoutant ou en les retranchant, on obtient une quantité de la forme $mx + \frac{n}{p}$ où m, n, p, sont des entiers, la question est impossible.

I. Conditions pour que les deux tangentes menées d'un même point à une parabole soient égales. Dans une conique quelconque, il faut que le point soit sur un axe principal. En général, soit M un point du lieu des tangentes égales menées à une courbe algébrique ; N et N′ les points de contact, l'axe radical des deux cercles de courbure en N et N′ touche au point M le lieu des tangentes égales.

GRAND CONCOURS DE 1846 (*V.* t. IV, p. 369).

QUESTIONS PROPOSÉES.

—

Mathématiques spéciales.

Étant donnée une ellipse, si on lui circonscrit des rectangles tels que ABCD, on sait que tous les sommets sont situés sur un même cercle concentrique à l'ellipse.

Cela étant admis, des points de contact N et Q de deux côtés opposés de chaque rectangle, on mène deux droites au point de contact M de l'un des deux autres côtés et l'on demande de prouver :

1° Que ces deux droites MN et MQ sont également inclinées sur le côté AB.

2° Que leur somme MN + MQ fait une longueur constante quel que soit le rectangle.

3° Que toutes ces droites telles que QM, NM sont toujours tangentes à une même ellipse décrite des mêmes foyers que la proposée.

Mathématiques élémentaires.

Étant donné dans un même plan un cercle C et une droite indéfinie AB, qui ne rencontre pas le cercle ; de chaque point M de la droite, on mène deux tangentes au cercle, et l'on joint les deux points de contact par une corde, qui, prolongée, va rencontrer la droite AB en un point M'. On a donc ainsi pour chaque point M, un segment correspondant MM'. Cela posé, on demande s'il existe dans le plan de la figure quelque point *o*, d'où l'on voie sous un angle droit chacun de ces divers segments. On demande ensuite si, hors du plan, il y a d'autres points qui jouissent de la même propriété, et enfin, s'il existe de tels points, quand la droite AB rencontre le cercle.

QUESTIONS.

—

126. Est-il possible de démontrer que $2^{\sqrt{2}}$ est une quantité irrationnelle ?

127. En rendant rationnelle l'équation

$$(a_1+x)^{\frac{1}{2}}+(a_2+x)^{\frac{1}{2}}+\ldots\ldots(a_n+x)^{\frac{1}{2}}=0.$$

On parvient à une équation du degré 2^{n-1}.

128. Donner la formule générale des quantièmes d'années où février a cinq dimanches.

129. Si d'un point A extérieur à la droite MN on mène à cette droite la perpendiculaire AB et les obliques AC, AD, AE, etc. ; si ces droites croissent successivement d'une même quantité, les distances BC, CD, DE, etc., vont en diminuant. HUET.

SOLUTION DU PROBLÈME 95 (t. IV, p. 260).

PAR M. E. LIONNET,
Professeur au Collége royal de Louis le Grand.

—

Étant donnés n *points* A, B, C, D... *situés comme on voudra dans un plan, décrire le plus petit cercle qui contienne ces* n *points.* (*Fig.* 44.)

1. Dans le plan qui contient tous les points donnés, traçons une droite quelconque MN; menons, à cette droite, les perpendiculaires Aa, Bb, Cc... Du point A, situé sur l'une des perpendiculaires extrêmes, menons des droites AB, AC, AD... aux $n-1$ autres points B, C, D... et supposons que AB soit, de toutes ces droites, celle qui fait avec Aa le plus petit angle BAa; tous les points du système seront situés d'un même côté de la direction AB. Supposons, de même, que BC soit, de toutes les droites menées du point B aux $n-1$ autres points, celle qui fait, avec le prolongement BH de AB, le plus petit angle CBH et ainsi de suite : nous obtiendrons ainsi un polygone convexe ABCD, par exemple, qui contiendra tous les points du système; ce qui ramène le problème au suivant : *décrire le plus petit cercle qui contienne tous les sommets d'un polygone convexe.*

2. *La circonférence du cercle minimum passe par un, au moins, des sommets du polygone donné* ABCD. (*Fig.* 45.)

Car, en supposant tous les sommets A, B, C, D, intérieurs au cercle demandé, qui a pour centre le point O, le cercle décrit de ce point O, comme centre, avec un rayon égal à la plus grande des droites OA, OB, OC... serait plus petit que le cercle minimum et contiendrait tous les sommets du polygone.

3. *La circonférence du cercle demandé passe par deux, au moins, des sommets du polygone.* (*Fig.* 46.)

Supposons qu'elle passe par le seul point A. Les prolongements des droites OB, OC, OD rencontreront la circonférence en des points B', C', D' et, si l'on prend, sur OA, une quantité OO' plus petite que chacune des droites BB', CC', DD', le triangle OBO' donnera $O'B < OB + OO'$; or $OO' < BB'$, donc $O'B < OB + BB'$, ou $O'B < OB'$; par la même raison, $O'C < OC'$ et $O'D < OD'$; d'ailleurs $OB' = OC' = OD' = OA$, donc tous les sommets du polygone seraient intérieurs au cercle décrit du point O', comme centre, avec un rayon égal à OA; donc le cercle OA n'est pas un minimum (2).

4. Cela étant, proposons-nous de *trouver le centre et le rayon du cercle minimum parmi ceux dont la circonférence passe par deux sommets* A *et* B *du polygone* ABCD *et qui contiennent tous les autres sommets.* (*Fig.* 47.)

Élevons des perpendiculaires MN, PQ, RS sur les milieux de AB et des droites BC, AD qui joignent les autres sommets du polygone à l'un des points A et B; et soient O, O' les points de rencontre de MN avec les droites PQ, RS. Toute circonférence, qui passe par les points A et B, a son centre sur la droite MN et, pour que le point C ne soit pas extérieur au cercle, il faut que la distance du centre à ce point n'excède pas le rayon, ce qui exige que ce centre soit situé sur PQ ou du même côté de cette droite que le point C; donc ce rayon ne peut être moindre que OB. On voit, de même, que le rayon d'une circonférence, qui passe par les points A et B, doit être au moins égal à $O'A$ ou à $O'B$ pour que le point D ne soit pas extérieur au cercle; or $O'B < OB$, donc le cercle décrit du point O comme centre, avec un rayon égal à OB, est un minimum parmi ceux dont la circonférence passe par les points A et B et qui contiennent tous les sommets du polygone : on trouvera de la même manière le centre et le rayon du cercle minimum, dont la circonférence passe par deux autres sommets quelconques A et C, A et D, B et C... et le plus petit de tous ces cercles satisfera un problème.

Corollaire 1. *Parmi tous les cercles, qui contiennent les sommets d'un triangle rectangle ou acutangle, le cercle circonscrit au triangle est un minimum.*

Corollaire 2. *Parmi tous les cercles, qui contiennent les sommets d'un triangle obtusangle, le cercle décrit sur le plus grand côté comme diamètre est un minimum.*

Corollaire 3. *Parmi tous les cercles qui contiennent les sommets d'un parallélogramme, le cercle décrit sur la plus grande diagonale comme diamètre est un minimum.*

Corollaire 4. *Parmi tous les cercles, qui contiennent les sommets d'un polygone régulier, le cercle circonscrit au polygone est un minimum.*

Remarque. On déterminera, d'une manière analogue, le centre et le rayon de la plus petite sphère qui contienne *n* points donnés comme on voudra dans l'espace (*).

QUELQUES PROPRIÉTÉS DU TRIANGLE RECTILIGNE.

(V. t. I, p. 79, 139, 196 ; t. II, p. 544 ; t. III, p. 457.)

PAR M. DE PISTORIS,
Capitaine d'artillerie.

—

I. Soient a, a', a'', les trois côtés d'un triangle rectiligne quelconque ; α, α', α'', les longueurs des perpendiculaires abaissées des sommets des angles sur les côtés opposés ;

(*) Nous reviendrons sur cet intéressant et difficile problème d'une utilité pratique, en beaucoup de circonstances. Tm.

e, ε; e', $\varepsilon_{,}$; e'', ε'', les segments des perpendiculaires compris entre leur point de rencontre et les sommets du triangle, et entre ce même point de rencontre et leurs pieds;

m, n; m', n'; m'', n'', les segments formés par les perpendiculaires sur les côtés du triangle;

r, ρ, ρ', ρ'', les rayons des cercles inscrit et ex-inscrits;

R, le rayon du cercle circonscrit;

S, la surface du triangle; $2p$ son périmètre $=a+a'+a''$.

On a les diverses relations connues et qu'il suffit de rappeler :

$$r=\sqrt{\frac{(p-a)(p-a')(p-a'')}{p}};\quad \rho=\sqrt{\frac{p(p-a')(p-a'')}{p-a}};$$

$$\rho'=\sqrt{\frac{p(p-a)(p-a'')}{p-a'}};\quad \rho''=\sqrt{\frac{p(p-a)(p-a')}{p-a''}};$$

$$\mathrm{R}=\frac{aa'a''}{4\sqrt{p(p-a)(p-a')(p-a'')}};$$

$$\alpha=\frac{2\sqrt{p(p-a)(p-a')(p-a'')}}{a};\quad \alpha'=\frac{2\sqrt{p(p-a)(p-a')(p-a'')}}{a'};$$

$$\alpha''=\frac{2\sqrt{p(p-a)(p-a')(p-a'')}}{a''};$$

$$\mathrm{S}=\frac{a\alpha}{2}=\frac{a'\alpha'}{2}=\frac{a''\alpha''}{2}=\sqrt{p(p-a)(p-a')(p-a'')}=$$

$$=r\,\frac{a+a'+a''}{2}=\frac{aa'a''}{4\,\mathrm{R}}.$$

On a aussi : $\mathrm{S}=\sqrt{r\rho\rho'\rho''}$,

et comme $\quad \frac{1}{r}=\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\rho'}+\frac{1}{\rho''};\ \mathrm{S}=\frac{\rho\rho'\rho''}{\sqrt{\rho\rho'+\rho\rho''+\rho'\rho''}}.$

Des valeurs de R, α, α', α'', on déduit par voie de multiplication :

$$\frac{\mathrm{R}\alpha\alpha'\alpha''}{2}=\mathrm{S}^2;$$

Et par voie de multiplication et d'addition en même temps :

$$2\,\mathrm{R}\,(\alpha+\alpha'+\alpha'')=aa'+aa''+a'a''.$$

La valeur de R multipliée par celle de r donne :

$$\mathrm{R}\,r=\frac{aa'a''}{2\,(a+a'+a'')}.$$

Des valeurs de ρ, ρ', ρ''; α, α', α'', résulte la formule :

$$\frac{\alpha\alpha'\alpha''}{\rho\rho'\rho''}=\frac{2r}{\mathrm{R}}.$$

II. Carnot, dans sa Géométrie de position, démontre les formules suivantes, qui sont autant de théorèmes sur les triangles :

$$\alpha\varepsilon=mn;\quad \alpha'\varepsilon'=m'n';\quad \alpha''\varepsilon''=m''n'' \qquad (1)$$

$$a^2+e^2=a'^2+e'^2=a''^2+e''^2=4\mathrm{R}^2 \qquad (2)$$

$$ae=2\mathrm{R}.\,\beta;\quad a'e'=2\mathrm{R}.\,\beta';\quad a''e''=2\mathrm{R}.\,\beta'' \qquad (3)$$

(β, β', β'', étant les longueurs des droites joignant deux à deux les pieds des perpendiculaires.)

$$mm'm''=nn'n'',$$

$$e+e'+e''=2\,\mathrm{R}+2\,r;$$

On a évidemment :

$$a\,\alpha+a'\,\alpha'+a''\,\alpha''=6\,\mathrm{S};\quad a\,\varepsilon+a'\,\varepsilon'+a''\,\varepsilon''=2\mathrm{S};$$

d'où l'on conclut :

$$a\,e+a'\,e'+a''\,e''=4\,\mathrm{S}.$$

Cela posé, les formules (3) donnent :

$$ae+a'e'+a''e''=2\mathrm{R}\,(\beta+\beta'+\beta'').$$

d'où

$$\mathrm{S}=\mathrm{R}\,\frac{\beta+\beta'+\beta''}{2}.$$

Donc, *la surface d'un triangle est égale au rayon du cercle* *circonscrit multiplié par le demi-périmètre du triangle formé par les droites joignant les pieds des perpendiculaires.*

III. Les formules (2) conduisent, par voie d'addition, à l'identité :

$$a^2+a'^2+a''^2+e^2+e'^2+e''^2=12R^2;$$

c'est-à-dire que *la somme des carrés des trois côtés d'un triangle et des trois droites joignant le point de rencontre des hauteurs aux sommets est égale à douze fois le carré du rayon du cercle circonscrit.*

Du premier théorème que nous venons d'énoncer, on déduit très-simplement les formules :

$$\frac{\beta+\beta'+\beta''}{\alpha}=\frac{a}{R},\quad \frac{\beta+\beta'+\beta''}{\alpha'}=\frac{a'}{R},\quad \frac{\beta+\beta'+\beta''}{\alpha''}=\frac{a''}{R}.$$

$$\beta+\beta'+\beta''=\frac{aa'a''}{2R^2};\quad \frac{\beta+\beta'+\beta''}{a+a'+a''}=\frac{r}{R}.$$

IV. Carnot démontre encore, et ce sont au reste des formules connues :

$$2\alpha e=a'^2+a''^2-a^2;\ 2\alpha'e'=a^2+a''^2-a'^2;\ 2\alpha''e''=a^2+a'^2-a''^2,$$

d'où

$$a^2+a'^2+a''^2=2(\alpha e+\alpha'e'+\alpha''e'').$$

La somme des carrés des trois côtés d'un triangle est égale à deux fois la somme des produits des perpendiculaires par la portion de ces perpendiculaires comprise entre leur point de rencontre et les sommets du triangle.

V. On trouve facilement :

$$m=\frac{a'^2+a''^2-a^2}{2a}=\frac{\alpha e}{a};\quad m'=\frac{\alpha'e'}{a'};\quad m''=\frac{\alpha''e''}{a''}.$$

On en déduit :

$$\frac{mm'm''}{ee'e''}=\frac{\alpha\alpha'\alpha''}{aa'a''}.$$

En cherchant de même les valeurs de ε, ε', ε'', on sera conduit à l'expression :

$$\frac{\varepsilon\varepsilon'\varepsilon''}{\alpha\alpha'\alpha''}=\frac{e^2e'^2e''^2}{a^2a'^2a''^2},$$

qui, combinée avec la précédente, donne :

$$\frac{aa'a''}{mm'm''}=\frac{ee'e''}{\varepsilon\varepsilon'\varepsilon''}.$$

Les valeurs de β, β', β'', en fonction des trois côtés, sont :

$$\beta=\frac{a}{2a'a''}(a'^2+a''^2-a^2);\quad \beta'=\frac{a'}{2aa''}(a^2+a''^2-a'^2);$$

$$\beta''=\frac{a''}{2aa'}(a^2+a'^2-a''^2),$$

d'où

$$\frac{\beta\beta'\beta''}{\alpha'\alpha\alpha''}=\frac{ee'e''}{aa'a''} \text{ et à cause de } \frac{mm'm''}{ee'e''}=\frac{\alpha\alpha'\alpha''}{aa'a''},$$

$$mm'm''=\beta\beta'\beta''.$$

Le produit de trois segments formés sur les côtés d'un triangle par les perpendiculaires abaissées des sommets, égale le produit des trois droites joignant les pieds de ces perpendiculaires.

VI. Déterminons actuellement les côtés d'un triangle en fonction des rayons des trois cercles ex-inscrits.

Des valeurs de ρ, ρ', ρ'', on déduit :

$$\frac{\rho}{\rho'}=\frac{a+a''-a'}{a+a'-a''},\quad \frac{\rho}{\rho''}=\frac{a'+a''-a}{a+a'-a''}.$$

de là on tire facilement :

$$a'-a''=-a\frac{\rho-\rho'}{\rho+\rho'};\quad a'+a''=a\frac{2\rho\rho'+\rho''(\rho+\rho')}{\rho''(\rho+\rho')};$$

substituant dans la valeur de ρ, faisant les calculs, et réduisant, on trouvera : $a=\dfrac{\rho''(\rho+\rho')}{\sqrt{\rho\rho'+\rho\rho''+\rho'\rho''}}$;

on aurait de même :

$$a' = \frac{\rho'(\rho+\rho'')}{\sqrt{\rho\rho'+\rho\rho''+\rho'\rho''}};$$

$$a'' = \frac{\rho(\rho'+\rho'')}{\sqrt{\rho\rho'+\rho\rho''+\rho'\rho''}};$$

on conclut de là par addition :

$$a + a' + a'' = 2\sqrt{\rho\rho'+\rho\rho''+\rho'\rho''}.$$

Par multiplication et addition,

$$aa' + aa'' + a'a'' = \frac{\rho\rho'\rho''(\rho+\rho'+\rho'')}{\rho\rho'+\rho\rho''+\rho'\rho''} +$$

$$+ \rho\rho' + \rho\rho'' + \rho'\rho'' = r\rho + r\rho' + r\rho'' + \rho\rho' + \rho\rho'' + \rho'\rho'';$$

et enfin par l'élévation au carré et ajoutant,

$$a^2 + a'^2 + a''^2 = \rho\rho' + \rho\rho'' + \rho'\rho'' + \frac{\rho^2\rho'^2 + \rho^2\rho''^2 + \rho'^2\rho''^2}{\rho\rho' + \rho\rho'' + \rho'\rho''}.$$

VII. On trouve aussi très-facilement, les longueurs des perpendiculaires en fonction de ces mêmes rayons des cercles ex-inscrits, ces valeurs sont :

$$\alpha = \frac{2\rho'\rho''}{\rho'+\rho''}; \quad \alpha' = \frac{2\rho\rho''}{\rho+\rho''}; \quad \alpha'' = \frac{2\rho\rho'}{\rho+\rho'};$$

on en déduit :

$$\alpha\alpha'\alpha'' = \frac{8\rho^2\rho'^2\rho''^2}{(\rho+\rho')(\rho+\rho'')(\rho'+\rho'')}, \quad \text{et à cause de} \quad S^2 = \frac{R.\alpha\alpha'\alpha''}{2},$$

$$R = \frac{(\rho+\rho')(\rho+\rho'')(\rho'+\rho'')}{4(\rho\rho'+\rho\rho''+\rho'\rho'')}.$$

En multipliant deux à deux les valeurs de $\alpha, \alpha', \alpha''$ et ajoutant on a :

$$\alpha\alpha' + \alpha\alpha'' + \alpha'\alpha'' = \frac{8\rho\rho'\rho''(\rho\rho'+\rho\rho''+\rho'\rho'')}{(\rho+\rho')(\rho+\rho'')(\rho'+\rho'')};$$

et par suite le rapport

$$\frac{\alpha\alpha'\alpha''}{\alpha\alpha'+\alpha\alpha''+\alpha'\alpha''}=\frac{\rho\rho'\rho''}{\rho\rho'+\rho\rho''+\rho'\rho''}$$

ou

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha'}+\frac{1}{\alpha''}=\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\rho'}+\frac{1}{\rho''}=\frac{1}{r}.$$

VIII. Si l'on déterminait ρ,ρ',ρ'' en fonction de α,α',α'', on trouverait :

$$\rho=\frac{\alpha\alpha'\alpha''}{\alpha\alpha'+\alpha'\alpha''-\alpha'\alpha''};\quad \rho'=\frac{\alpha\alpha'\alpha''}{\alpha\alpha'+\alpha'\alpha''-\alpha\alpha''};\quad \rho''=\frac{\alpha\alpha'\alpha''}{\alpha\alpha''+\alpha'\alpha''-\alpha\alpha'}.$$

IX. Si l'on cherche en fonction des trois côtés, les distances o,o',o'', ω,ω',ω'' des centres des cercles inscrit et ex-inscrits, on trouve :

$$o=a\sqrt{\frac{a'a''}{p(p-a)}};\quad o'=a'\sqrt{\frac{aa''}{p(p-a')}};\quad o''=a''\sqrt{\frac{aa'}{p(p-a'')}};$$

$$\omega=a\sqrt{\frac{a'a''}{(p-a')(p-a'')}};\quad \omega'=a'\sqrt{\frac{aa''}{(p-a)(p-a'')}};$$

$$\omega''=a''\sqrt{\frac{aa'}{(p-a)(p-a')}}.$$

Des trois dernières égalités on déduit :

$$\omega.\omega'.\omega''=8R^2(a+a'+a'').$$

X. Si l'on se rappelle l'expression $aa'a''=2R^2(\beta+\beta'+\beta'')$, et si l'on remarque en outre que les côtés a,a',a'' sont précisément les droites joignant les pieds des hauteurs du triangle, dont les côtés sont ω,ω',ω'', on en conclura que le rayon R' du cercle circonscrit à ce dernier triangle est égal à 2R ; on aura aussi :

$$o^2+o'^2+o''^2+\omega^2+\omega'^2+\omega''^2=12.R'^2=48.R^2.$$

XI. Actuellement $D,\Delta,\Delta',\Delta''$ étant les distances du centre du cercle circonscrit à chacun des centres des cercles inscrit et ex-inscrits, on sait que l'on a :

$D^2 = R^2 - 2Rr$; $\Delta^2 = R^2 + 2R\rho$; $\Delta'^2 = R^2 + 2R\rho'$; $\Delta''^2 = R^2 + 2R\rho''$,

d'où à cause de $4R = \rho + \rho' + \rho'' - r$,

$$D^2 + \Delta^2 + \Delta'^2 + \Delta''^2 = 12.R^2,$$

par conséquent

$$o^2 + o'^2 + o''^2 + \omega^2 + \omega'^2 + \omega''^2 + D^2 + \Delta^2 + \Delta'^2 + \Delta''^2 = 60R^2;$$

ce qui donne ce théorème :

La somme des carrés des dix droites joignant deux à deux les centres des cercles circonscrit, inscrit, et ex-inscrits à un même triangle, est égale à soixante fois le carré du rayon du cercle circonscrit.

XII. En passant des valeurs de $\omega, \omega', \omega''$, o, o', o'' au triangle primitif, on trouverait en fonction des trois droites β, β', β'', les côtés et segments a, a', a'', e, e', e''. Je mets ici ces formules comme simple renseignement.

$$a = 2\beta\sqrt{\frac{\beta'\beta''}{(\beta+\beta'-\beta'')(\beta+\beta''-\beta')}},$$

$$a' = 2\beta'\sqrt{\frac{\beta\beta''}{(\beta'+\beta''-\beta)(\beta+\beta'-\beta'')}},$$

$$a'' = 2\beta''\sqrt{\frac{\beta\beta'}{(\beta'+\beta''-\beta)(\beta+\beta''-\beta')}};$$

$$e = 2\beta\sqrt{\frac{\beta'\beta''}{(\beta+\beta'+\beta'')(\beta'+\beta''-\beta)}},$$

$$e' = 2\beta'\sqrt{\frac{\beta\beta''}{(\beta+\beta'+\beta'')(\beta+\beta''-\beta')}},$$

$$e'' = 2\beta''\sqrt{\frac{\beta\beta'}{(\beta+\beta'+\beta'')(\beta+\beta'-\beta'')}}.$$

XIII. En déterminant les distances du centre du cercle inscrit aux sommets du triangle, et rapportant les formules au triangle primitif, on obtiendra facilement :

$$\alpha=\sqrt{\frac{\beta'\beta''(\beta+\beta'+\beta'')}{\beta'+\beta''-\beta}};\quad \alpha'=\sqrt{\frac{\beta\beta''(\beta+\beta'+\beta'')}{\beta+\beta''-\beta'}};$$

$$\alpha''=\sqrt{\frac{\beta\beta'(\beta+\beta'+\beta'')}{\beta+\beta'-\beta''}};$$

ce qui conduira par des calculs très-simples à la formule

$$\beta^2\beta'^2\beta''^2=\alpha\alpha'\alpha''.\varepsilon\varepsilon'\varepsilon'';$$

c'est-à-dire que *dans un triangle le produit des trois droites joignant les pieds des perpendiculaires élevé au carré, égale le produit de ces perpendiculaires par le produit des trois segments compris entre leurs pieds et leur point de rencontre.*

XIV. Des valeurs de $e,e',e'',\alpha,\alpha',\alpha''$ on déduit facilement :

$$\frac{e}{\alpha}+\frac{e'}{\alpha'}+\frac{e''}{\alpha''}=2,$$

on aurait aussi :

$$\frac{\alpha\alpha'\alpha''}{ee'e''}=\frac{(\beta+\beta'+\beta'')^3}{8\beta\beta'\beta''}.$$

Les valeurs de $\varepsilon,\varepsilon',\varepsilon''$ seront :

$$\varepsilon=\sqrt{\frac{\beta'\beta''(\beta'+\beta''-\beta)}{\beta+\beta'+\beta''}},\quad \varepsilon'=\sqrt{\frac{\beta\beta''(\beta+\beta''-\beta')}{\beta+\beta'+\beta''}},$$

$$\varepsilon''=\sqrt{\frac{\beta\beta'(\beta+\beta'-\beta'')}{\beta+\beta'+\beta''}};$$

et par suite

$$\frac{\varepsilon}{\alpha}+\frac{\varepsilon'}{\alpha'}+\frac{\varepsilon''}{\alpha''}=1;$$

on a encore :

$$\alpha\varepsilon=\beta'\beta'',\quad \alpha'\varepsilon'=\beta\beta'',\quad \alpha''\varepsilon''=\beta\beta',$$

et
$$e\varepsilon=e'\varepsilon'=e''\varepsilon=\frac{2\beta\beta'\beta''}{\beta+\beta'+\beta''}.$$

XV. Je terminerai ces considérations sur le triangle rectiligne par le théorème suivant :

Dans un triangle quelconque la droite joignant deux points *de contact du cercle inscrit, la droite joignant les pieds de deux perpendiculaires, et celle enfin joignant les points de rencontre de deux bissectrices avec les côtés opposés, vont concourir en un même point.*

On détermine ainsi trois points; les droites joignant ces points deux à deux, iront passer par les sommets du triangle, et de plus ces trois points seront tels que l'un quelconque d'entre eux sera le pôle de la droite joignant les deux autres, par rapport au cercle inscrit.

(*Voir Gergonne*, t. VI, p. 129; t. IX, p. 293; t. X, p. 202; t. XIX, p. 85, 211; t. XXI, p. 65.)

RÉPONSE DU CAPITAINE GUY A M. FINCK,

Sur la règle proposée par ce dernier, pour abréger la division approximative. — Preuve qu'elle est moins simple et moins complète que celle publiée dans le traité de la division abrégée (*).

—

Monsieur le Rédacteur,

J'avais lu en 1845, dans le tome IV, page 328 et 658 des *Nouvelles Annales de mathématiques*, un théorème sur la division, dû aux travaux de l'honorable M. Finck, savant professeur de l'École d'artillerie de Strasbourg. Ce théorème est assurément intéressant, comme le sont d'ailleurs toutes les vérités mathématiques; aussi, bien que je misse la règle d'opération qu'on serait tenté d'appuyer sur lui, pour effectuer la division approximative par abréviation, fort au-dessous de celle que j'ai publiée antérieurement moi-même, je m'abste-

(*) Chez Mathias (Augustin), libraire, quai Malaquais, 15. Prix, 1 fr. 50 c.

nais néanmoins de mettre le public dans la confidence de mon sentiment.

Il en eût toujours été ainsi, monsieur, si vous n'aviez eu la malencontreuse idée de dire dans la livraison de mars 1846, page 131 : « Il serait à désirer qu'on eût une théorie » analytique de toutes les approximations usitées en arithmé- » tique, surtout pour celles de Fourier et de M. Guy. » Mais ce vœu assurément bien légitime paraît avoir choqué la susceptibilité scientifique de l'honorable M. Finck, puisque je lis dans la livraison de mai 1846, page 250, qu'il vous le reproche comme étant au moins le produit d'un *lapsus memoriæ*, attendu, prétend-il, *qu'il vous a donné dans le tome IV précité une théorie analytique de la division abrégée, avec une règle plus simple et plus complète que celle de M. Guy.*

Mis ainsi en scène d'une façon fort inattendue, et je puis ajouter, peu agréable, je ne me crois plus tenu à la réserve que je m'étais imposée jusqu'à ce moment. Je reprends donc mes justes droits de critique pour établir qu'il y a au moins autant d'erreurs et de prétentions non justifiées que de lignes dans le passage que j'ai souligné; et comme vous avez admis l'attaque, monsieur, j'ose compter sur votre obligeance pour donner aussi asile à la défense, sans que j'aie besoin pour cela de faire appel à votre loyauté. L'intérêt scientifique exige d'ailleurs qu'il en soit ainsi : il ne serait pas bien, en effet, monsieur, que l'opinion de vos jeunes lecteurs fût exposée à se fourvoyer par un excès de confiance dans l'affirmation du savant professeur de Strasbourg.

Pour entrer immédiatement en matière, je dis en premier lieu que M. Finck aurait dû se borner à vous rappeler qu'il avait donné une théorie analytique de *sa* division abrégée, et non de *la* division abrégée; cette observation, vous l'avez déjà faite vous-même, monsieur, dans cette livraison de mai

1846, à la page 252; aussi j'ajoute seulement qu'elle était parfaite en justesse et en justice.

En deuxième lieu, au contraire de M. Finck qui se borne à *affirmer*, lui, que sa règle est à la fois plus simple et plus complète que la mienne, et en considération de ce qu'une affirmation, de quelque haut qu'elle vienne, est une monnaie de peu d'aloi dans la région des sciences mathématiques, je vais *démontrer*, moi, n'en déplaise au savant professeur, que, dans les applications, sa règle est moins simple, que loin d'être plus complète, elle n'est pas même complète ; et enfin, si l'on veut bien me permettre ici de m'écarter un peu du principe que la réaction doit être égale à l'action, je démontrerai de plus que la règle de M. Finck est illogique, venant après la mienne, et en raison du but que tout calculateur se propose d'atteindre. Remarquez bien, monsieur, que je parle de sa règle d'opérations et non de son théorème qui établit une vérité mathématique incontestable.

Premièrement. La règle de M. Finck n'est ni simple ni maniable dans la pratique. Sans doute elle se formule, comme la mienne, en termes extrêmement simples ; mais ceci ne prouve qu'une chose, c'est qu'il ne faut pas toujours se fier aux apparences.

Je pose un principe avoué de tous, que pour qu'une règle d'opération soit véritablement simple et maniable, il faut qu'elle puisse fonctionner avec facilité dans tous les cas de division qui peuvent se présenter ; non les cas qui ne seraient jamais que de pure spéculation et ne valent guère la peine d'être recherchés quand il ne s'agit que d'approximation. Cela dit, et pour prendre un exemple, je suppose, pour fixer les idées, un diviseur décimal de 100 chiffres, et un dividende également décimal, mais tel qu'il ne puisse y avoir qu'un seul chiffre à la partie entière du quotient ; on demande les *millièmes*, partant quatre chiffres.

En suivant la règle de M. Finck, il faudrait donc faire la somme des chiffres du diviseur, en commençant par la droite et s'avançant vers la gauche, jusqu'à ce que les chiffres de gauche non encore entrés dans la somme expriment un nombre, le plus petit possible, mais plus grand toutefois que la somme à laquelle on serait parvenu; ce nombre de gauche serait le dernier diviseur obligé. M. Finck, dans l'exemple que je suppose, aurait-il par hasard la patience de faire une telle somme qui pourrait embrasser, selon les circonstances, 99, 98, 97 ou 96 chiffres? ce serait là assurément un dévouement bien admirable, mais aussi ce serait un acte peu raisonnable, puisque, d'une part, la chose n'est pas nécessaire, et que d'autre part, il ne faut jamais perdre de vue que la probabilité d'opérer juste est en raison inverse de la contention d'esprit du calculateur.

Si la formule si simple du *double du nombre de chiffres à trouver* que j'ai publiée dans ma division abrégée, n'était pas encore connue du public, et qu'il n'y eût que la règle de M. Finck à la disposition du calculateur (*), j'opérerais, moi, non d'après cette règle, mais d'après un corollaire qui ressort ouvertement du théorème qu'il a démontré; c'est-à-dire que je remplacerais la *somme* des chiffres par le *nombre* de chiffres, nombre que j'aurais soin d'ailleurs de multiplier par 10; ainsi, je compterais au diviseur, en allant de droite à gauche par 10, 20, 30,..... jusqu'à ce que j'arrive à lire sur la gauche de ce diviseur un nombre le plus petit possible, mais plus grand néanmoins que le dernier nombre que j'aurais énoncé en comptant de cette façon. Je sais bien qu'en agissant ainsi, je serais souvent exposé à prendre un dernier diviseur un peu plus élevé; que, par voie de conséquence, mon diviseur d'entrée et les diviseurs successifs pourraient

(*) La règle de M. Crosson serait encore préférable à la sienne (p. 244).

être eux-mêmes plus élevés que les circonstances ne l'exigeraient; mais vous conviendrez, monsieur, que cet inconvénient est bien minime, lorsqu'on vient à le comparer à cette obligation effrayante que nous impose M. Finck, de faire la somme des chiffres du diviseur.

Voyons maintenant comment on s'y prendrait dans le même exemple choisi pour opérer, d'après ma méthode, jugée par M. Finck si inférieure à la sienne.

Puisqu'on ne veut ici que quatre chiffres au quotient, on dirait 2 fois 4 font 8 ; et si le premier chiffre à gauche du diviseur était 9, ce serait lui qui serait le dernier diviseur obligé ; s'il était plus petit que 9, ce seraient alors les deux chiffres de gauche qui devraient former le dernier diviseur obligé ; on compterait ensuite trois chiffres à partir de ce dernier diviseur, puisqu'on n'en veut déterminer que quatre au quotient, et on bifferait tous les autres en une seule fois, fussent-ils un million ou plus ; les quatre ou cinq qui resteraient formeraient le diviseur d'entrée.

Quelle est la règle la plus simple des deux, monsieur, dans l'hypothèse surtout où le diviseur donné aurait un million de chiffres? Vous avez sous les yeux les deux termes de comparaison, vous pouvez prononcer. Mais comment M. Finck, que la science compte parmi ses plus habiles interprètes, n'a-t-il pas fait lui-même un rapprochement aussi simple, alors qu'il avoue avoir pris connaissance de ma règle? Comment? c'est qu'il était aveuglé par un amour trop excessif pour son œuvre.

Secondement. La règle de M. Finck n'est pas complète, au lieu que la mienne l'est. Un exemple va vous prouver ceci immédiatement.

On demande le quotient de $\frac{\sqrt{2}}{\pi} = \frac{1,4....}{3,1....}$, avec quatorze décimales.

Comment M. Finck s'y prendra-t-il pour faire la somme des chiffres que le diviseur a sur sa droite, puisque le nombre de décimales de ce diviseur est ici indéfini? Comment s'y prendra-t-il pour supprimer en une fois sur la droite du dividende autant de chiffres qu'il doit y en avoir de biffés au diviseur dans tout le cours de l'opération, puisqu'il ne connaît pas ce nombre, et que son théorème ne s'applique pas à ce cas, qui peut cependant se présenter à tout instant?

Par ma méthode au contraire, monsieur, il n'y a rien de plus simple : on dit 2 fois 14 font 28, dès lors 31 est le dernier diviseur obligé; on compte encore 13 chiffres à partir de ce dernier diviseur, puisqu'on n'en veut trouver que 14 au quotient, et on biffe tous les autres. Passant au dividende, on prend sur sa gauche un nombre capable de contenir le diviseur d'entrée et on biffe tous les autres.

Quelle est la règle la plus complète des deux, monsieur? Mais, en vérité, cela ne fait pas même question.

Troisièmement. La règle de M. Finck, ai-je dit, est illogique. Voilà assurément une expression hardie, et au premier abord un peu vague; mais je vais la déterminer en même temps que la justifier :

N'est-il pas vrai, monsieur, que le but du calculateur, lorsqu'il opère par abréviations, est d'arriver le plus promptement possible, c'est-à-dire de diminuer le travail, la contention d'esprit, source si dangereuse d'erreurs, au moyen de l'unique sacrifice de cette partie de la vérité qui n'importe pas aux besoins de la vie sociale, ni même à ceux de la spéculation scientifique? Or, je vous le demande, où M. Finck place-t-il son *criterium*, ou si vous aimez mieux, sa *condition*, pour satisfaire à cet énoncé? Dans un dernier diviseur qui doit être le plus petit possible, tout en étant plus grand que la somme des chiffres qu'il y aura encore sur sa droite. Mais lorsque le diviseur donné est un nombre décimal indéfini, M. Finck l'arrêtera-t-il de son autorité privée? Je le veux bien. Mais où? Et pourquoi ici plutôt que là, alors qu'il n'en a pas justifié?

Remarquez d'ailleurs, monsieur, même à l'égard d'un diviseur donné limité, que soit que l'on veuille trouver au quotient... 4000, 400, 40, 4 chiffres, le dernier diviseur de M. Finck reste toujours le même; son diviseur d'entrée et ses diviseurs successifs sont par conséquent les mêmes aussi, car M. Finck, vous le savez, n'a aucun égard au nombre de chiffres à trouver; or vous devez juger théoriquement et abstractivement qu'en agissant ainsi on s'astreindrait parfois à opérer avec des diviseurs monstrueux, alors que de très-petits seraient cependant suffisants.

Je dis, moi, que la logique place évidemment le véritable criterium de l'opération dans une certaine fonction du nombre de chiffres à trouver, et je le prouve : quel est en effet, le rôle que doit jour le dernier diviseur, tant dans le procédé de M. Finck que dans le mien (*)? N'est-ce pas de contenir dans des limites déterminées l'influence fâcheuse que pourraient exercer sur le quotient les accroissements successifs qu'auraient reçus les dividendes partiels, par défaut de soustraction? Or n'est-il pas manifeste que ces accroissements seront plus grands ou plus petits, pour une même division, selon que l'on effectuera plus ou moins de divisions partielles? Ce nombre de divisions partielles n'est-il pas d'ailleurs le même que le nombre de chiffres que l'on se propose de trouver au quotient? Je dis donc avec la logique que c'est sur une fonction de ce dernier nombre qu'il faut faire reposer le criterium de l'opération et non point sur la somme

(*) Le procédé de M. Finck diffère du mien en ce qu'il ne conserve pas même la retenue qui proviendrait du produit du chiffre barré au diviseur, ce qui augmente gratuitement les dividendes partiels; il en diffère aussi surtout par la formule de direction, ou ce que j'appelle ici le criterium.

des chiffres ni même sur un multiple du nombre de chiffres du diviseur, car cela pourrait exposer parfois, comme vous l'avez vu, à de véritables travaux d'Hercule. La fonction dont je parle se calcule d'ailleurs sur l'exemple de division qui donnerait lieu à l'accroissement maximum, et vous savez que c'est le double du nombre de chiffres à trouver, alors qu'on a soin de conserver la retenue.

Je crois avoir suffisamment prouvé, M. le rédacteur, tout ce que j'avais avancé, en commençant cette fâcheuse polémique. Si j'y ai mis quelque chaleur, c'est que j'avais ma méthode à défendre; et je devais d'autant moins y faillir que, sur le rapport de deux de ses membres, l'Académie des sciences m'avait fait l'honneur de la déclarer un perfectionnement utile apporté à une règle usuelle. Sans doute, cet illustre suffrage n'empêche pas d'essayer de faire mieux; plusieurs l'ont déjà tenté (*), car chacun peut espérer qu'il lui sera donné d'apporter un perfectionnement nouveau à un perfectionnement déjà reconnu; peut-être M. Finck y parviendra-t-il une autre fois, bien que la chose doive paraître peu probable, après les explications que j'ai données sur le criterium logique. Dans tous les cas, s'il est permis de se dire à soi-même qu'on a mieux fait, puisque nous sommes hommes et que nous avons chacun nos faiblesses, il faut du moins en être dix fois sûr, avant de le proclamer publiquement. Si le savant professeur avait suivi cette règle de conduite, il ne m'aurait pas mis dans la nécessité toujours pénible de discuter son œuvre, et d'établir ici, aux yeux de tous qu'elle est loin de posséder les mérites dont il l'a paternellement gratifiée.

(*) Avant la publication de la *Division abrégée*, ce point de la science si important pour les calculateurs était négligé; on s'en tenait aux règles défectueuses enseignées par quelques auteurs classiques. Aujourd'hui que de nouveaux efforts ne paraissent pas nécessaires, chacun apporte sa formule. Serait-on fâché qu'une règle pratique fût sortie d'ailleurs que du professorat?

Puisque j'en suis sur ce chapitre, M. le rédacteur, j'aurai l'honneur de vous prier, au cas où vous le jugeriez agréable à vos nombreux lecteurs, de me laisser consigner, dans vos savantes annales, la règle à suivre pour abréger l'opération de la division, d'après ma méthode. Sans doute, cette règle se trouve rapportée dans mon petit ouvrage; mais comme, en le publiant, j'avais aussi pour but de démolir les procédés défectueux qu'on avait enseignés jusqu'alors, cet ordre d'idées, qui avait ses embarras, m'a entraîné à ne l'exposer que par parties détachées. La voici ramassée en un seul faisceau, et je me sers du langage algébrique que j'ai tenu à éviter ailleurs, dans l'intention d'être plus accessible à tous.

Division abrégée (par la méthode d'accroissements).

Règle générale. Soit n le nombre de chiffres du diviseur donné, au cas où il soit limité; n' le nombre de chiffres qu'on veut trouver au quotient. On prendra le double de n', et on marquera, sur la gauche du diviseur, le nombre le plus petit possible, mais plus grand que 2 n'. Ce nombre ainsi marqué est le dernier diviseur obligé, si la division par abréviations peut avoir lieu immédiatement. A partir de ce dernier diviseur, on comptera encore $n'-1$ chiffres, et s'il y en a davantage, ce qui est le signe certain que l'opération peut s'effectuer immédiatement, on biffera tous les autres, en quelque nombre qu'ils se trouvent d'ailleurs; l'ensemble des chiffres qui resteront formera le diviseur d'entrée.

Passant alors au dividende, on prendra un nombre capable de contenir le diviseur d'entrée, et on biffera également tous les autres (*). En formant le premier produit partiel à re-

(*) S'il n'y avait pas assez de chiffres, ce qui serait le signe que le quotient ne trancher ; on aura soin, s'il y a lieu, de conserver la retenue qu'aurait donnée le premier chiffre biffé qui suit le diviseur d'entrée.

Pour effectuer la division partielle suivante, on biffera le chiffre de droite du diviseur d'entrée, et en formant le nouveau produit partiel à retrancher, on conservera également, s'il y a lieu, la retenue qui serait provenue du chiffre biffé. On continuera ainsi jusqu'à la fin de l'opération ; l'erreur commise sur le quotient sera en $+$ ou en $-$ et $<$ que deux unités de l'ordre sur lequel on se sera arrêté (*).

S'il ne se trouvait que $n'-1$ chiffres sur la droite du dernier diviseur marqué, il n'y aurait alors rien à biffer ; dans ce cas, le premier chiffre du quotient ne pourrait s'obtenir que par la division ordinaire parfaite ; mais les suivants pourraient l'être, eux, par abréviation, en biffant successivement un chiffre sur la droite du diviseur donné.

Enfin, s'il y avait moins de $n'-1$ chiffres sur la droite du dernier diviseur marqué, on pourrait chercher par la division ordinaire les quelques chiffres qui seraient nécessaires pour que le nombre de ceux restant à trouver encore au quotient, permît de se retrouver dans la situation normale ; mais, s'il y avait plus de *trois* ou *quatre* chiffres à déterminer ainsi, il serait bien plus avantageux de renoncer à la division vulgaire, et de procéder par périodes de divisions abrégées, au moyen du rétablissement de la vérité dans l'avant-dernier reste-dividende de chacune d'elles, ainsi

---

doit pas avoir de partie entière, on y suppléerait par des zéros, et l'on écrirait aussi les zéros nécessaires à la gauche des chiffres significatifs trouvés au quotient. Dans ce cas, l'erreur serait en $+$ ou en $-$, mais $<$ *une* unité de l'ordre sur lequel on se serait arrêté, puisqu'on n'aurait supprimé aucune figure dans le dividende.

(*) Ai-je besoin de dire que si l'on veut l'erreur plus petite qu'*une* unité d'un ordre déterminé, celui des millièmes par exemple, il n'y a qu'à disposer le dividende et le diviseur pour trouver un chiffre de plus, c'est-à-dire pour s'arrêter sur les dix-millièmes ; l'erreur alors étant $<$ 0,0002 sera *à fortiori* $<$ 0,001.

que je l'ai expliqué dans mon petit traité de la division abrégée (*).

Note. Le théorème de M. Finck est très-beau, indépendamment des applications qu'on pourrait en faire. On peut s'en servir commodément pour abréger la division, dans certains cas particuliers, dans des exemples de choix. Mais généralement la méthode de M. Guy est préférable, est plus *complète*, ne laisse rien à désirer. J'accueillerais avec plaisir une exposition analytique de cette méthode remarquable, qui a rectifié des erreurs et comblé une lacune; l'exposition que j'ai trouvée trop longue, diffuse, ne me satisfait pas. Du reste, on trouvera peut-être que le capitaine a critiqué avec une susceptibilité trop paternelle, la trop paternelle susceptibilité du professeur. Libre à chacun de penser de ses œuvres ce qu'il veut. N'est-ce pas le public qui juge en dernier ressort? Tm.

LA STROPHOIDE (**).

PAR M. GEORGES RITT.

1. Au milieu C d'un axe $AB = 2a$ s'élève une *directrice* CO orthogonale, coupée par des *rayons vecteurs* AMM′ partant de l'origine A des coordonnées. On demande le lieu des points M, M′ déterminés sur les rayons vecteurs de manière que $CZ = ZM = Z'M'$; Z étant l'intersection du rayon vecteur avec la directrice (*fig.* 48).

(*) M. Finck, lorsque le nombre de chiffres à trouver au quotient est plus grand que le nombre de ceux qui restent à la droite de son dernier diviseur, est également réduit à recourir à la méthode vulgaire, à moins d'appliquer mon procédé de périodes de divisions abrégées en rétablissant la vérité.

(**) Cette courbe a déjà été étudiée par M. Midy. V. t. III, p. 294.

En considérant les points M, C, M′ comme appartenant à une circonférence de rayon variable, toujours tangente en C à l'axe AB, l'équation renfermera la condition de l'intersection continuelle d'une droite mobile autour de A avec la circonférence indiquée. Les méthodes usuelles nous donnent :

$$y^2 = \frac{x(a-x)^2}{2a-x} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(A)}$$

qui prouve que le lieu est une courbe symétrique autour de l'axe AB; elle le coupe en A, et en C, où elle forme un *nœud.* Entre A et C la courbe forme une *feuille* dont A est le *sommet* et s'étend ensuite entre C et B en deux *branches* infinies, dont la perpendiculaire BB′ élevée sur l'axe au point B est l'asymptote.

2. En posant l'origine des coordonnées en C, l'équation devient :

$$y^2 = \frac{x^2(a \mp x)}{a \pm x} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(B)}$$

Le signe supérieur appartient à la feuille, l'inférieur aux branches.

3. Chaque point M de la feuille a un point *conjugué* M′ qui appartient à une branche; j'appelle les fonctions de la courbe en M′ *conjuguées* des fonctions correspondantes au point M.

4. Les abscisses conjuguées CP, CP′ comptées du nœud C sont égales entre elles.

5. En nommant X, Y les coordonnée de M′, leurs valeurs données par y, x sont :

$$X = 2a - x \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(C)}$$

$$Y = \frac{y}{x}(2a-x) = (a-x)\sqrt{\frac{2a-x}{x}} \ldots\ldots \quad \text{(D)}$$

6. Du nœud C comme centre décrivez avec le rayon AC=a un cercle; ce sera le cercle *circonscrit* à la strophoïde. En prolongeant l'ordonnée y de la courbe au point M jusqu'à ce qu'elle rencontre la circonférence en Q, ce point sera le point *conjugué* du cercle appartenant au point M, et ses fonctions circulaires seront *conjuguées* à celles de la courbe en M.

Le cercle circonscrit est un élément très-important dans l'investigation de la courbe.

7. A l'aide de l'équation (A), en nommant u l'ordonnée au cercle conjuguée de y, on trouve aisément :

$$y=\frac{x(a-x)}{u}=\frac{u(a-x)}{2a-x} \ldots\ldots\ldots \quad \text{(E)}$$

autre forme importante de l'équation de la courbe.

8. L'équation (B) donne de même :

$$y=\frac{x(a\mp x)}{u}=\frac{ux}{a\pm x} \ldots\ldots\ldots \quad \text{(F)}$$

9. Si la directrice était inclinée à l'axe d'un angle φ, l'équation au sommet A de la courbe deviendrait :

$$y=\frac{a-x}{2a-x}\left((a-x)\cos\varphi\pm\sqrt{(2a-x)x+(a-x)^2\cos^2\varphi}\right)\ldots \quad \text{(G)}$$

10. En substituant dans cette équation la valeur de l'ordonnée conjuguée du cercle circonscrit, parallèle à la directrice, on retrouve l'équation (E).

Théorèmes.

Il est aisé maintenant de démontrer les théorèmes suivants, relatifs à la directrice orthogonale :

11. Les cordes conjuguées MC, M'C font constamment entre elles un angle droit.

12. Les trois triangles rectangles MCP, M'CP', MCM' sont semblables ; par conséquent nous avons :

$$\left.\begin{array}{l}\overline{MC}^2 = MP.MM' \\ \overline{CM'}^2 = M'P'.MM' \\ \overline{CP}^2 = MP.\ M'P'\end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots \quad (H)$$

13. Nous avons aussi

$$\overline{AC}^2 = AM.\ AM'. \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (I)$$

14. La perpendiculaire ML au rayon vecteur AM en M est égale à la partie CL de l'axe compris entre le centre et le point L où la perpendiculaire ML coupe l'axe.

Cette propriété donne un autre moyen de construire la strophoïde. Celle-ci et la première construction qui a servi pour trouver l'équation se prêtent aisément à la description de la courbe par mouvement continu. Il suffit pour cela d'un fil, d'une règle et d'une équerre, ou d'un fil et de deux règles.

15. Une perpendiculaire MK à la corde CM en M, coupant l'axe en K, divise l'angle AMP en deux parties égales entre elles et à l'angle MCP.

15 *bis*. La corde MC coupe par moitié l'angle PMM' que fait le rayon vecteur avec l'ordonnée de la feuille au point M ; la corde conjuguée CM' coupe aussi par moitié l'angle AMP'.

16. On trouve en outre la progression :

$$PK:PM:CP:M'P'. \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (K).$$

17. La tangente conjuguée du cercle en Q est toujours parallèle au rayon vecteur AM.

18. Soit conduit le rayon vecteur AB' rencontrant l'asymptote BB' en B'. Il est coupé en V par le cercle circonscrit. On trouvera alors $AV = 2u$,

$$\left.\begin{array}{l} VB'=M'P'-MP \\ M'V=u-Y \\ AM=u-y \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots \quad (L)$$

$$MV=u+y.$$

19. La courbe coupe l'axe en C sous un angle moitié d'un angle droit.

20. L'ordonnée *maxima* de la feuille est à très-peu près $=\frac{3}{10}a$; sa conjuguée $=\frac{6}{5}a$; son abscisse du centre est approximativement $=\frac{3}{5}a$, ou double de l'ordonnée de la feuille.

21. La méthode des tangentes nous donne à l'aide de l'équation (A) les fonctions tangentielles de la courbe que voici :

$$\left.\begin{array}{l} \text{La tangente } MT=\dfrac{a(a-x)}{(a-x)^2-ax}\sqrt{\dfrac{x(a^2+2ax-x^2)}{2a-x}} \\ \text{La sous-tangente } PT=\dfrac{x(2a-x)(a-x)}{(a-x)^2-ax} \\ \text{La normale } MN=\dfrac{a(a-x)}{(2a-x)^2}\sqrt{(a^2+2ax-x^2)} \\ \text{La sous-normale } PN=\dfrac{(a-x)\left((a-x)^2-ax\right)}{(2a-x)^2} \end{array}\right\}\ldots\ (M).$$

22. Un arc s de la strophoïde se trouve exprimé par la série

$$s=\sqrt{2}.\left(x-\frac{x^2}{2a}+\frac{5x^3}{3.4a^2}-\frac{5x^4}{4^2a^3}+\frac{47x^5}{4.5.8a^4}-\text{etc.}\right).$$

23. La quadrature d'un aire strophoïdale à l'aide de l'équa tion (B) sera

$$\int y dx=\int x dx\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}.$$

Cette expression, intégrée depuis $x=0$ jusqu'à $x=a$, donnera l'aire de la feuille $= a^2 - \frac{\pi a^2}{4}$. Ainsi en inscrivant un cercle dans le carré du demi-axe, la somme des quatre coins curvilignes qui représentent la différence de ces deux figures égalera l'aire cherchée.

24. Le solide de révolution de la feuille autour de l'axe est

$$\pi \int y^2 dx = 2\pi a^3 \left(\log.2a - \frac{2}{3}\right).$$

PROBLÈMES.

25. *Conduire une tangente à un point* M *de la courbe.*

De la soustangente conjuguée du cercle circonscrit retranchez le demi axe; la troisième proportionnelle à la différence obtenue et à l'ordonnée conjuguée du cercle donnera la soustangente de la courbe, et par suite la tangente.

26. *Trouver deux ordonnées conjuguées dans la courbe, ayant une différence donnée.*

Du sommet A on conduira un rayon vecteur tel, que sa portion comprise entre l'asymptote et le cercle circonscrit soit égale à la différence donnée; les deux ordonnées conjuguées ainsi déterminées résoudront le problème (§ 18).

27. *Trouver deux ordonnées conjuguées dont la somme des carrés soit égale à une surface donnée.*

Prenez sur la directrice CZ $= \frac{1}{2}$ du côté du carré donné; par Z tirez un rayon vecteur qui résoudra le problème.

28. Voici les énoncés de quelques autres problèmes qui peuvent se résoudre à l'aide de constructions synthétiques faciles :

Conduire un rayon vecteur au cercle circonscrit tel, que la branche de la strophoïde le coupe comme $m:n$.

Trouver dans la courbe deux cordes conjuguées qui soient entre elles $:: m : n$.

Trouver une ordonnée qui soit à son abscisse comptée du nœud $:: m : n$.

Trouver deux cordes conjuguées, dont les carrés soient entre eux $:: m : n$.

Trouver deux rayons vecteurs conjugués qui aient une somme ou différence donnée.

29. Les problèmes suivants sont faciles, et nécessaires à l'application de la courbe au dessin d'architecture :

1° Le nœud et l'inclinaison de la directrice étant donnés, trouver le sommet et l'axe relatif à un arc donné de la courbe.

On résout la question par les §§ 15 et 15 *bis*.

2° Le sommet A étant connu, ainsi que la direction de l'axe, déterminer le nœud, et la longueur de l'axe relatif à un arc donné de la courbe.

A l'aide du § 15 *bis*.

3° L'ordonnée *maxima* étant donnée de grandeur et de position, déterminer les autres fonctions de la courbe.

Au moyen du § 20.

4°. Étant donné un arc de la courbe, compris entre le nœud et l'ordonnée *maxima*, déterminer les autres fonctions.

Sur la corde de cet arc on construit un triangle rectangle tel, que l'un des côtés soit double de l'autre. (§ 20.)

Applications.

30. L'extrême facilité qui est le caractère presque exclusif de la géométrie du cercle, a causé l'introduction de cette courbe précieuse dans toutes les parties de l'architecture. Mais de ce qu'elle se prête heureusement à la plupart des cas, on ne doit pas conclure que son usage soit inévitable-

ment nécessaire ou même préférable dans toutes les circonstances. Déjà la conchoïde a dû être appelée au secours pour la diminution des colonnes; la parabole, l'ellipse, la chaînette remplacent à leur tour le cercle où son insuffisance ne saurait être niée. Mais il y a une foule de cas où aucune de ces courbes, sans excepter le cercle, ne saurait être avantageusement appliquée. On peut, à la vérité, souder ensemble plusieurs arcs de cercle, ou des arcs de courbes différentes pour obtenir des formes particulières; mais quelle peine, quel tact naturel n'exige pas le choix convenable des centres, des rayons ou des axes, pour que ces soudures soient agréables à l'œil exercé des connaisseurs.

Pour aplanir ces difficultés, on a imaginé plusieurs moyens bien connus de tous les artistes, tels que des règles découpées suivant certains profils tracés au hasard par une main heureuse, des opérations empyriques, etc. Mais plus ces remèdes sont ingénieux, plus ils s'écartent de la géométrie, et plus ils manquent de généralité.

31. Ces inconvénients se font encore plus vivement sentir, lorsqu'il s'agit de réduire un dessin déjà fait à des proportions différentes. Tous les moyens dont on se sert pour *créer*, deviennent inapplicables dès qu'il s'agit de *copier*. Au moyen d'une règle profilée, on peut construire un vase par exemple; comment appliquer ce dessin à l'exécution en grand sur une place publique? Avec les moyens de réduction ordinaires, on pourra obtenir un profil qui *à peu près* reproduira les formes voulues; mais les proportions approuvées sur le papier seront nécessairement blessées par la réduction, puisqu'il est impossible d'obtenir en d'autres proportions une courbe semblable à une courbe donnée *tracée au hasard;* puisqu'il faudrait pouvoir au hasard obtenir dans une même proportion différente de la première toutes les fonctions géométriques de la courbe donnée. Cette difficulté disparaît

lorsqu'il s'agit d'une courbe formée par différents arcs de cercle; mais aussi quelles constructions, quel travail pour obtenir des centres posés semblablement et des rayons proportionnels !

32. La strophoïde, par la variété de courbures que présente son parcours depuis le sommet jusqu'à une certaine proximité de l'asymptote, se prête aisément à presque toutes les formes gracieuses que le cercle ne peut donner par lui-même; et comme les strophoïdes sont toutes semblables, il n'est rien de si facile que de copier en telle proportion qu'on voudra un dessin exécuté à l'aide de cette courbe. L'auteur en a fait des applications au dessin de fontaines, de vases, de balustrades et consoles; de parquets en mosaïques, de grilles, etc. Elle produit des moulures supérieures en élégance à celles construites par le cercle, et particulièrement les talons, les doucines et les scoties. La strophoïde se prête singulièrement au dessin d'architecture gothique; la partie de la feuille comprise entre le nœud et l'ordonnée *maxima* a l'avantage d'une solidité et d'une hauteur supérieure à celle que possède dans la même largeur l'arc en ogive ordinaire circonscrit au triangle équilatère. La partie de la feuille comprise entre le sommet A et l'ordonnée *maxima*, a quelque ressemblance avec le demi-cercle, et n'est pas moins élégante; elle peut présenter des avantages dans la construction des ponts, attendu que sous une même largeur elle offre un dixième de plus de hauteur, et par conséquent plus de solidité que l'arc circulaire en plein cintre.

Enfin cette courbe offre les courbures les plus douces que l'on puisse désirer dans la construction des chemins; la parabole ne peut offrir sous ce rapport un avantage égal, puisque la strophoïde est une courbe asymptotique, ce que la parabole n'est pas.

SOLUTION DU PROBLÈME 29 (p. 448).

PAR M. DORMOY.

—

Théorème. — Si d'un point A, extérieur à une droite MN, on mène à cette droite le perpendiculaire AB, et les obliques AC, AD, AE, et si ces droites croissent successivement d'une même quantité, les distances BC, CD, DE iront en diminuant. (*Fig.* 43.)

Démonstration.—Considérons trois obliques consécutives quelconques AC, AD, AE.

Portons sur MN, et à partir du point D, une longueur $FD = DC$ et joignons le point F avec le point A. Il suffit évidemment de faire voir que l'on a $AF > AE$. Pour cela, prolongeons AD de $A'D = AD$, et tirons A'F.

On a de suite :

$$AF + AC > 2AD,$$

puisque $AC = A'F$, mais par hypothèse $AE - AD = AD - AC$, ou bien

$$AE + AC = 2AD;$$

donc $AF > AE$, donc....

Note. La solution analytique est très-simple. Tm.

COMPLÉMENT DE LA SOLUTION DU N°118 (*V.* p. 413).

PAR M. C. DROUETS,
élève du collége royal militaire de La Flèche.

—

Il restait à démontrer le théorème pour un exposant fractionnaire.

Soit donc $a^{\frac{m}{n}} \ldots . b^{\frac{m}{n}} + c^{\frac{m}{n}}$; au lieu de ces nombres, je prends $a^{m} \ldots . (b^{\frac{m}{n}} + c^{\frac{m}{n}})^{n}$; mais $a^{2} = b^{2} + c^{2}$, donc on aura encore :

$$a^{2m} \ldots . (b^{\frac{m}{n}} + c^{\frac{m}{n}})^{2n},$$

$$(b^{2} + c^{2})^{m} \ldots \therefore (b^{\frac{m}{n}} + c^{\frac{m}{n}})^{2n}.$$

Ces deux développements sont connus, puisque les exposants sont entiers et positifs, mais ils n'ont pas le même nombre de termes ; le premier en a $m + 1$, le second $2n + 1$.

En réunissant les termes à égales distances des extrêmes, on a pour termes généraux d'une part :

$$T = \frac{m(m-1)(m-2) \ldots . (m-p+1)}{1. \quad 2. \quad 3. \ldots . . p} [b^{2m-2p} c^{2p} + c^{2m-2p} b^{2p}],$$

de l'autre :

$$T' = \frac{2n(2n-1)(2n-2) \ldots (2n-p+1)}{1. \quad 2. \quad 3. \ldots . p} \left[b^{2m-\frac{m}{n}p} c^{\frac{m}{n}p} + c^{2m-\frac{m}{n}p} b^{\frac{m}{n}p} \right].$$

1° Soit $\frac{m}{n} > 2$ ou $\frac{m}{n} = 2 + x$, on voit facilement que le coefficient de T est $>$ que celui de T'.

Les parenthèses deviennent :

$$b^{2m-2p} c^{2p} + c^{2m-2p} b^{2p} = A + B,$$

$$b^{2m-2p} c^{2p} \left(\frac{c}{b}\right)^{px} + c^{2m-2p} b^{2p} \left(\frac{b}{c}\right)^{px} = A \left(\frac{c}{b}\right)^{px} + B \left(\frac{b}{c}\right)^{px}.$$

La différence est $\frac{(A-B)(b^{2px}-c^{2px})}{(bc)^{px}}$.

Si b est $> c$ $b^{2px} > c^{2px} \ldots \frac{A}{B}$ sera $= \frac{b^{2m-4p}}{c^{2m-4p}} = \left(\frac{b}{c}\right)^{2m-4p} > 1$,

donc la première parenthèse sera plus grande que la seconde.

Si b est $< c$, $b^{2px} < c^{2px}$, $\frac{A}{B} = \left(\frac{b}{c}\right)^{2m-4p} < 1$, donc la première parenthèse sera plus grande que la seconde, car la différence de la première à la seconde est positive.

On voit donc que la première série a plus de termes que la seconde, que chaque terme de la première est plus grand que son correspondant de la seconde, donc :

$$a^{\frac{m}{n}} > b^{\frac{m}{n}} + c^{\frac{m}{n}}, \quad \frac{m}{n} > 2.$$

On voit que le coefficient numérique de P est moindre que celui de T'.

2° $\frac{m}{n} < 2$, $\frac{m}{n} = 2 - x$; les parenthèses deviennent :

$$A + B,$$

$$A\left(\frac{b}{c}\right)^{px} + B\left(\frac{c}{b}\right)^{px}.$$

Leur différence est $\frac{(A-B)(c^{2px}-b^{2px})}{(bc)^{px}}$.

Si $c > b$, $c^{2px} - b^{2px} > 0$; $\frac{A}{B} = \left(\frac{b}{c}\right)^{2m-4p} < 1$, $A-B < 0$, donc la différence sera négative, c'est-à-dire que la première parenthèse sera moindre que la seconde.

Si $c < b$, $c^{2px} - b^{2px} < 0$; $\frac{A}{B} \ldots\ldots > 1$, $A-B > 0$, la différence sera encore négative; donc $T < T'$.

Or $m < 2n$; la seconde série a plus de termes que la première; chacun de ses termes surpasse celui de la série qui lui correspond, donc $a^{\frac{m}{n}} < b^{\frac{m}{n}} + c^{\frac{m}{n}}$ quand $\frac{m}{n} < 2$.

Cas de l'exposant négatif.

$$a^{-\frac{m}{n}} < b^{-\frac{m}{n}} + c^{-\frac{m}{n}} \text{ quel que soit } \frac{m}{n}.$$

On a
$$\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} \ldots \frac{1}{b^{\frac{m}{n}}} + \frac{1}{c^{\frac{m}{n}}},$$

ou
$$b^{\frac{m}{n}}\, c^{\frac{m}{n}} \ldots a^{\frac{m}{n}}\, b^{\frac{m}{n}} + a^{\frac{m}{n}}\, c^{\frac{m}{n}},$$

or $a^2 = b^2 + c^2$, donc a est $> b$, a est $> c$;

donc
$$a^{\frac{m}{n}}\, b^{\frac{m}{n}} > b^{\frac{m}{n}}\, c^{\frac{m}{n}}, \quad a^{\frac{m}{n}}\, c^{\frac{m}{n}} > b^{\frac{m}{n}}\, c^{\frac{m}{n}};$$

donc
$$2b^{\frac{m}{n}}\, c^{\frac{m}{n}} < a^{\frac{m}{n}}\, b^{\frac{m}{n}} + a^{\frac{m}{n}}\, c^{\frac{m}{n}};$$

donc à fortiori
$$b^{\frac{m}{n}}\, c^{\frac{m}{n}} < a^{\frac{m}{n}}\, b^{\frac{m}{n}} + a^{\frac{m}{n}}\, c^{\frac{m}{n}}.$$

GRAND CONCOURS DE 1846.

—

M. Drouets, élève distingué de Laflèche, nous a adressé, en date du 25 juillet dernier, les solutions des deux questions. Nous les insérerons, s'il y a lieu, après les solutions couronnées. La question *spéciale* ne laisse rien à désirer. Mais dans la solution *élémentaire*, quoique très-exacte, il s'est glissé un vice de raisonnement. On dit que les points cherchés, s'ils existent, doivent être *sur* une certaine droite qui divise les données de la figure *symétriquement*. On peut seulement conclure, que les points cherchés sont situés symétriquement par rapport à cette droite.

Nous devons au même deux bonnes solutions des problèmes

100 et 115 que nous donnerons bientôt, et la solution du prob. 128 serait irréprochable, si l'on avait eu égard aux années terminales des siècles qui dans le calendrier grégorien ne sont bissextiles que lorsque le quantième est divisible par 400. Tm.

BIBLIOGRAPHIE.

—

GNOMONIQUE, GRAPHIQUE ET ANALYTIQUE, ou l'Art de tracer les cadrans solaires ; par Born, officier d'artillerie (Lafère—1821). Paris, 1846, in-8°, I—VIII ; 132 p., 6 pl. (*).

Aucune science ne fait autant d'ingrats que la mathématique, comme on s'exprimait jadis. Il n'est surtout pas rare de rencontrer d'anciens élèves de l'École polytechnique décriant la science qui les a nourris, qui les a formés. La raison en est assez simple, mais exige pourtant quelques préliminaires philosophiques.

L'univers est régi par une loi unique, suprême, que Dieu seul connaît. Quant aux deux formes sous lesquelles la création nous *apparaît*, quant au temps et à l'espace, il nous a été accordé, par une révélation providentielle, d'en scruter les propriétés, d'en étudier les lois qui sont aussi celles du monde matériel, tel qu'il se manifeste à des sens humains ; et il y a quelque chose de vrai dans cette proposition pythagoricienne, que tous les phénomènes physiques sont sous l'empire du *nombre*. Idée qu'on rencontre déjà chez le Psalmiste.

Aussi l'habitude de méditer sur le *nombre*, dans le sens le

(*) Chez Bachelier, imprimeur-libraire, quai des Augustins, 55.

plus général, facilite singulièrement la compréhension des formes, des forces; ce qui renferme toute la nature expérimentale. Ayez besoin de faire connaître des corps qui sont ou qui simulent des surfaces de révolution, des surfaces gauches, développables, etc.; de décrire des mouvements compliqués, résultat de forces variables d'intensité et de direction, un géomètre vous comprendra de suite; vous parlez sa langue; mais un non-géomètre, très-difficilement, fût-il d'ailleurs homme littérairement instruit. J'oserai encore dire que les vitesses instantanément variées, les seules qu'on rencontre dans le monde, sont ce que les gens du monde comprennent le moins, si toutefois ils en ont une idée; et par contre, le rapport géométrique, qu'on ne trouve guère que dans le commerce, est le seul qu'ils connaissent.

C'est précisément cet immense avantage que procurent les études mathématiques, cette extrême facilité de saisir ce qui se passe matériellement dans l'espace et le temps, qui produit tant de *contempteurs* de la sainte doctrine, chez des anciens disciples. Cette facilité devient si grande, qu'on est tenté de croire, que toutes ces connaissances sont du domaine public, appartiennent au bon sens, et que nous aurions pu les acquérir sans passer par cette filière de théories, abstraites, pénibles, exigeant une si forte contention d'esprit; erreur singulière, où l'amour-propre, comme d'ordinaire, ne laisse pas que d'intervenir pour une grande part.

Ce qui est beaucoup moins étonnant, c'est de voir des professeurs douter de l'utilité de leur enseignement. Se bornant toujours aux propositions générales; parlant sans cesse de calculs, sans jamais rien calculer; de mesures, sans jamais rien mesurer; d'équilibre et de mouvement, sans jamais s'enquérir ni de machines, ni d'engins; éloignant les réalités, et vivant dans le désert des abstractions, il n'est pas surprenant que ces anachorètes finissent par considérer la science comme un jeu d'esprit, jeu fatigant, et par conséquent assez ennuyeux et qu'il faut pourtant jouer d'après le principe, *primum est vivere.*

Il serait extrêmement utile, aux professeurs au moins autant qu'aux élèves, qu'il fût prescrit officiellement, ordonné d'en haut, de faire, dès *les élémentaires*, des applications aux sciences accessoires, physiques, astronomiques, technologiques. Les examens des inspecteurs généraux pourraient favoriser cette direction. A cet effet, les colléges royaux devraient être munis de planchettes, graphomètres, instruments d'arpentage, pour apprendre aux élèves le but de ces instruments et la manière de s'en servir, et l'on pourrait diriger des promenades vers les ateliers, fabriques, usines, etc. Cela contribuerait à faire naître, à entretenir l'amour de la science, à la cultiver avec zèle et ardeur.

On objectera que l'enseignement collégial embrassant aujourd'hui l'ensemble des connaissances philologiques, historiques, littéraires, scientifiques, artistiques, gymnastiques; ayant adopté pour devise *de omnibus aliquid* (et par conséquent *de toto nihil*), il ne reste pas de temps pour les exercices, promenades, visites, etc.; l'objection est très-bonne. Le temps est une quantité limitée; ce qu'on en donne au superflu, est enlevé au nécessaire. Par exemple, je ne suis pas bien convaincu de l'extrême utilité qu'il y a pour les enfants destinés à des carrières commerciales, industrielles, militaires, à perdre un temps considérable à fabriquer (car c'est une fabrique) des vers dans un idiôme qu'aucun d'eux ne parlera, n'écrira et que l'immense majorité oubliera. Je ne sais pas même, jusqu'à quel point, c'est indispensable pour les professions littéraires. Dans les gymnases de la studieuse Allemagne, on ne fait pas de vers latins. Les études classiques y sont-elles moins fortes? L'Allemagne est un pays où beaucoup de savants, même parmi les géomètres, écrivent encore en latin. La France est le seul pays où pas un savant, même parmi les érudits de profession, n'écrit en cette langue.

Ces réflexions m'ont été suggérées à la lecture de ce mémoire sur la gnomonique. Les professeurs pourront y puiser une foule d'applications du calcul numérique de l'arithmétique, proprement dite ; des problèmes de géométrie élémentaire, de géométrie descriptive ; et l'emploi des formules analytiques des deux trigonométries. L'ouvrage a été composé à l'occasion d'un cadran à construire à l'école d'artillerie de Lafère. L'auteur donne l'historique de ses procédés graphiques et analytiques ; de sorte que le mémoire, écrit d'un style simple, et avec une grande lucidité, réunit le double mérite d'être à la fois descriptif et didactique. L'exécution y suit toujours la théorie et montre que celle-ci est effectivement usuelle.

On sait que la gnomonique consiste dans ce problème général : trouver sur un plan donné le tracé de douze plans, passant par le même diamètre d'une sphère et la partageant en douze parties égales. La solution présente des difficultés quand il s'agit de la rendre simple, praticable, pour les diverses positions du cadran, pour les divers usages qu'on veut en faire, et l'auteur a heureusement aplani toutes ces difficultés.

L'ouvrage est divisé naturellement en deux parties ; la première (4—56) est consacrée à la construction des épures, au tracé du cadran sur le mur ; la deuxième partie (60—123) aux formules nécessaires pour le calcul.

On trouve dans la première partie toutes les indications pour tracer les lignes horaires, déterminer le centre, les courbes diurnes, la méridienne du temps moyen, les lignes du cadran et la pose du style. Chaque procédé est légitimé par les principes théoriques qui le précèdent. Les épures très-bien dessinées sont toujours faites dans un esprit éminemment pratique. La planche IV renfermant pour ainsi dire toute la théorie du sujet est un modèle du genre. La planche VI et dernière renferme les cinq cadrans usités; savoir : le cadran équatorial, horizontal, vertical non déclinant, vertical déclinant, enfin le cadran parallèle au méridien. Les notations sont choisies avec tant d'intelligence, que l'homme compétant peut pour ainsi dire lire les planches sans consulter le texte.

L'auteur s'est montré très-habile dans le maniement des formules souvent si malaisées de la trigonométrie sphérique. Il les adapte toujours au calcul logarithmique et quelquefois par des artifices très-ingénieux.

Nous signalons la formule (19), page 105, pour calculer l'angle que fait une ligne horaire avec la sous-stylaire. On donne l'équation polaire et l'équation à coordonnées rectangulaires des courbes diurnes et une discussion soignée de ces courbes du second degré. On suit, selon le besoin, une méthode mixte trigonométrique ou à coordonnées cartésiennes. On aurait pu peut-être admettre quelques simplifications et ajouter les formules nécessaires pour apprécier l'influence des erreurs des données d'observations sur les indications du cadran.

L'ouvrage est terminé par une application numérique des formules générales au cadran établi en 1821 à Lafère, à la latitude de 49° 40'.

Toutes les explications sont fondées sur des mouvements *réels*. Idée heureuse que l'illustre Lacaille a adoptée dans son astronomie et par laquelle l'enseignement est singulièrement facilité. A quoi sert-il de commencer par ce que tout le monde sait être *faux* pour arriver au *vrai* ?

L'auteur, aujourd'hui officier supérieur distingué dans l'arme savante de l'artillerie, lors de la composition de ce mémoire, venait à peine de quitter les bancs de l'école polytechnique et il s'est montré à la hauteur de son sujet, digne élève du célèbre institut. Tm.

DU BINOME DE NEWTON,

Antérieurement à Newton.

PAR M. ARISTIDE MARRE.

Le théorème du binôme de *Newton*, c'est ainsi qu'on le dénomme ordinairement, n'appartient pas exclusivement à *Newton*. *Hutton* a émis cette vérité aujourd'hui reconnue, dans son Introduction à ses Tables mathématiques. Avant *Newton*, d'illustres géomètres, *Lucas de Burgo*, *Stifelius*, *Viète*, *Briggs* et *Pascal* avaient ouvert la voie. Ce qui seulement peut être accordé sans conteste au prince des Mathématiciens anglais, c'est l'extension du fameux théorème au cas des exposants fractionnaires.

M. *Ed. Biot* nous a appris (Journal des savants 1835) que la formation des coefficients des diverses puissances du binôme exprimées en nombres entiers était connue des Chinois au moins en 1593, car le *Souan Fa long Tsong* (principes de l'art du calcul) fut imprimé en cette année. Les Hindous très-vraisemblablement ne sont pas restés en arrière de leurs voisins chez lesquels on n'a pas encore trouvé, que je sache, un *Brahmagupta* ou un *Aryabhatta*; toutefois je ne saurais voir dans l'énoncé et dans la solution d'un problème traduit du sanscrit par M. *Reuben Burrow*, la preuve évidente que les Hindous connaissaient le théorème du binôme de *Newton* dans le cas de l'exposant entier et positif, tout aussi bien que *Briggs* et beaucoup mieux que *Pascal* (*). Ce sont là les pro-

(*) *Biographie universelle*, t. XXXI, p. 132. Notice sur *Newton* par *M. Biot* :

pres termes de M. *Reuben Burrow* (*). Voyons si le problème traduit du sanscrit peut justifier un pareil langage.

Énoncé : « Le palais d'un Radja avait huit portés ; or ces portes peuvent être ouvertes une à une, ou par deux à la fois, ou par trois à la fois, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'enfin toutes soient ouvertes ensemble. On demande de dire les nombres de fois que ceci peut être fait ? »

Solution : « Écris le nombre des portes, et avance en ordre en diminuant successivement de *huit* jusqu'à l'unité, et alors dans l'ordre contraire comme il suit :

8	7	6	5	4	3	2	1
1	2	3	4	5	6	7	8

» Divise le premier nombre huit par l'unité au-dessous de lui, et le quotient huit montre le nombre de fois que les portes peuvent être ouvertes une par une. Multiplie ce dernier huit par le terme voisin sept et divise le produit par le deux qui est au-dessous, et le résultat vingt-huit est le nombre de fois que deux portes différentes peuvent être ouvertes ; multiplie le dernier nombre trouvé vingt-huit par la figure suivante, six, divise le produit par le trois au-dessous, et le quotient cinquante-six montre le nombre de fois que trois portes différentes peuvent être ouvertes. Et encore, ce cinquante-six multiplié par le cinq suivant et divisé par le quatre au-dessous est soixante-dix, nombre de fois que quatre portes différentes peuvent être ouvertes. De même, cinquante-six est le nombre de fois que cinq peuvent être ouvertes : vingt-huit le nombre de fois que six peuvent être ouvertes : huit le nombre de fois que sept peuvent être ouvertes, et enfin, *un*

Pascal, avant *Newton*, avait donné une règle pour former *directement* un terme quelconque du développement des puissances binomiales, dans le cas où l'exposant de la puissance est un nombre entier.

(*) *Asiatic Researches*, 2ᵉ vol. Appendix, n° 5.

est le nombre de fois que toutes peuvent être ouvertes ensemble; et la somme de toutes les différentes fois est 255 ». Ici finit la traduction du sanscrit. M. Reuben Burrow continue : « La démonstration est évidente pour les mathématiciens. En effet, le coefficient du second terme dans toute équation générale indiquant la somme des racines, il s'ensuit que dans la puissance n de $1+1$, où chacune des racines est l'unité, le coefficient indique les différentes *unités* qui peuvent être prises dans n choses : de même, attendu que le coefficient du troisième terme est la somme des produits différents de toutes les racines prises deux à deux, il s'ensuit que....., etc. » (*Lilavati*, section VI.)

D'abord nous dirons que l'on doit établir une distinction entre la règle des coefficients et la formule du binôme elle-même. D'autre part, si l'on veut rattacher cette question à l'une des théories des Hindous, il nous semble que pour la résoudre, ils ont suivi une route beaucoup moins détournée que celle qu'on leur attribue. Les Hindous connaissaient la théorie des combinaisons et des permutations, et nous avons, d'après M. *Burrow* lui-même, rapporté à ce sujet (*), une question particulière qui, si elle n'est pas d'une grande utilité pratique, a du moins le mérite de paraître curieuse à *M. Delambre* (**) Pour nous, la règle donnée précédemment par les Hindous, n'est qu'une simple conséquence ou plutôt une pure application de cette théorie. En effet, le nombre de fois que huit portes différentes peuvent être ouvertes une à une, est évidemment égal à 8 ou $\frac{8}{1}$. Le nombre de fois que huit portes peuvent être ouvertes deux à deux, ou le nombre de combinaisons de huit objets pris deux à deux, est

(*) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, tome V, p. 57.
(**) *Histoire de l'Astron. anc.*, fin du tome I.

égal à $\frac{8.7}{1.2}$. Le nombre de fois que huit portes différentes, peuvent être ouvertes trois à trois, est égal à $\frac{8.7.6}{1.2.3}$; etc.

En faisant la somme, les Hindous furent amenés à cette remarque bien naturelle que pour passer du premier terme (nombre des portes) au second, il fallait multiplier par 7 voisin de 8, et diviser le produit par 2, au-dessous de 7 et qui marquait son rang; — que pour passer du second terme au troisième, il fallait multiplier par le chiffre suivant 6, et diviser par le nombre au-dessous de 6, c'est-à-dire 3 qui marquait son rang et ainsi de suite. Arrivés à la dernière expression de forme fractionnaire, un simple coup d'œil jeté sur ce double rang de chiffres dicta aux Hindous la règle qu'ils ont donnée. — Cette explication admise, nous répéterons avec M. *Plaifair d'Édimbourg*, que ce problème prouve que les Hindous ont tourné leur attention vers certaines investigations arithmétiques dont il n'existe aucune trace dans les écrits des mathématiciens grecs, mais nous croirons avoir justement démontré qu'on n'en doit pas conclure avec M. *Reuben Burrow* que les Hindous connaissaient le théorème du binôme de *Newton* dans le cas de l'exposant entier et positif, au moins aussi bien que *Briggs* et beaucoup mieux que *Pascal*.

Nous allons prouver maintenant que longtemps avant *Briggs*, les Arabes connaissaient la règle pour engendrer les coefficients des termes du développement d'une puissance entière et positive du Binôme, successivement les uns des autres et indépendamment de ceux de toute autre puissance. Cette règle se trouve dans deux de leurs ouvrages arithmétiques, dans le *Meftehal Hisàb*, ou Clef du calcul, composé par *Djoumshid ben Moussaoud* sous le règne de *Oulough Beg*, petit-fils de *Timour*, et dans l'*Ayoun al Hisàb*, ou Règles du calcul, composé par *Mohammed Bakir* sous le règne de *Shah Abbas I*, vers l'an 1600. Ces deux ouvrages sont peu ou point connus, M. J. *Tytler* qui le premier a révélé leur existence n'a pu se procurer dans l'Inde qu'un simple extrait de chacun d'eux, et il n'a fait connaître que le fragment de l'*Ayoun al Hisàb*, qui donne la règle de la formation des coefficients. C'est ce fragment que nous allons reproduire :

« Observe que les *Radices Locorum* (coefficients) de toute puissance sont des nombres qui sont placés vis-à-vis du *latus primum* (la racine ou la première puissance) et des puissances antécédentes (*i. e.* dont les indices sont moindres que celui de la puissance dont les coefficients sont demandés) ; la méthode pour les découvrir est comme il suit : — Écris les noms de la racine et de la puissance antécédente ou inférieure à celle donnée en un rang de longueur (*i. e.* en un rang du haut en bas de la page), prends le nombre indice de cette puissance donnée et place-le vis-à-vis du nom de la racine, alors retranches-en *un*, multiplie $\frac{1}{2}$ du reste par le nombre qui est placé vis-à-vis de la racine ou inversement (*i. e.* ou multiplie le reste par la moitié de ce qui est placé vis-à-vis de la racine), et place le produit vis-à-vis du nom du carré; alors retranche 2 (de l'indice de la puissance donnée) et multiplie $\frac{1}{3}$ du reste par ce qui est placé vis-à-vis du carré ou inversement, et place le produit vis-à-vis du cube; alors retranche 3 et multiplie $\frac{1}{4}$ du reste par ce qui est placé vis-à-vis du cube ou inversement, et place le produit vis-à-vis de la quatrième puissance, et ainsi de suite jusqu'à la fin; par une conséquence nécessaire le même nombre sera trouvé dans toute place équidistante de celle du milieu, ou des deux qui occupent le milieu; c'est pourquoi, si tu l'aimes mieux, écris la première figure trouvée, aussi à la dernière place (dans le cas actuel), ce qui est écrit vis-à-vis de la racine et du carré peut être écrit vis-à-vis de la quatrième puissance et du cube, et ainsi de suite jusqu'à ce que ce soit complété. Par exemple, qu'il soit requis de trouver les coefficients de la douzième puissance. Écrivons depuis la racine jusqu'à la onzième puissance, ainsi qu'il a été enseigné, et écrivons 12 qui est l'indice de la puissance donnée vis-à-vis de la racine et à la dernière place, retranchons-en 1, et multiplions ce reste par $\frac{1}{2}$ de 12, et écrivons 66 le produit vis-à-vis du carré et à l'avant-dernière place; retranchons 2 et multiplions 10 qui est le reste par $\frac{1}{3}$ de ce qui a été écrit vis-à-vis du carré, et écrivons le produit qui est 220 vis-à-vis du cube et à cette place qui lui correspond (*i. e.* équidistante du milieu de l'autre côté); alors retranchons 3 et multiplions 9 le reste par $\frac{1}{4}$ de ce qui est opposé au cube, et écrivons le produit, qui est 495, vis-à-vis de la quatrième puissance et de sa correspondante; alors retranchons 4 et multiplions 8 le reste, par $\frac{1}{5}$ de ce qui est vis-à-vis de la quatrième puissance, et écrivons le produit, qui est 792, vis-à-vis de la cinquième puissance et de la correspondante; alors retranchons 5 et multiplions 7 le reste par $\frac{1}{6}$ de ce qui est vis-à-vis de la cinquième puissance, et écrivons le produit, qui est 924, vis-à-vis de la sixième puissance; ces nombres ainsi écrits sont les coefficients de la douzième puissance, en voici la table :

NOMS DES PUISSANCES PRÉCÉDANT LA PUISSANCE DONNÉE.	NOMS des COEFFICIENTS.
Racine (1re puissance).	12
Carré.	66
Cube.	220
Quatrième puissance.	495
Cinquième puissance.	792
Sixième puissance.	924
Septième puissance.	792
Huitième puissance.	495
Neuvième puissance.	220
Dixième puissance.	66
Onzième puissance.	12

» D'où il suit que cette puissance de tout nombre est égale à la somme des puissances de ses deux parties; et 12 fois chacune de ces parties multipliée par la onzième puissance de l'autre; et 66 fois le carré de chacune d'elles par la dixième puissance de l'autre; et 220 fois le cube de chacune d'elles par la neuvième puissance de l'autre; et 495 fois la quatrième puissance de chacune d'elles par la huitième puissance de l'autre; et 792 fois la cinquième puissance de chacune d'elles par la septième puissance de l'autre; et 924 fois la sixième puissance de l'une d'elles par la sixième puissance de l'autre, et ainsi des des autres cas. »

Note. Il est remarquable qu'en Europe les coefficients binomiaux ont été indiqués pour les extractions des racines avant de l'avoir été pour l'élévation aux puissances; la première indication se trouve dans l'arithmétique du célèbre

Stifel, cité ci-dessus. Voici le titre de l'ouvrage : *Arithmetica integra, authore Michaele Stifelio*; Norimb. ap. Joh. Petreium, 1544, in-4. de 322 pages. Il y a une préface du célèbre théologien Philippe Melanchthon qui recommande l'arithmétique parce qu'elle forme l'esprit et l'accoutume à prendre plaisir à la vérité et à la certitude. Le premier livre du cinquième chapitre *De extractionibus radicum* contient une section intitulée : *De inventione numerorum qui peculiariter pertinent ad suas species extractionum.* C'est une table formée de colonnes qui contiennent les nombres qu'on appelle aujourd'hui coefficients binomiaux. En voici la formation :

Primo a latere sinistro descendit naturalis numeror. progressio, quam extendere poteris quantum volueris. Et illa radix est sequentium laterum omnium. Nam secundum latus quod continet numeros trigonalium sic oritur ex primo latere : Duobus (*) *cellis de primo latere obmissis, repetitur numerus cellulæ tertiæ in primo latere, atque ab eodem numero incipit latus secundum videlicet circam tertiam cellulam primi lateris. Deinde ex additione amborum illor.* (*id est ex tertio primi lateris, et primo termino secundi lateris*) *fit numerus secundus secundi lateris. Sic ex secundo numero secundi lateris, et ex suo collaterali fit tertius numerus secundi lateris, et ex tertio, et suo collaterali fit quartus. Et sic deinceps in infinitum fieri potest descensus. Quemadmodum autem nascitur secundum latus ex latere primo, ita nascitur latus tertium ex latere secundo, et eodem modo nascitur latus quartum ex latere tertio, et quintum ex quarto : et sic deinceps, ut in tabula omnia hæc exemplariter vides. Certe admodum mirandum est talia contineri sub numerorum vicibus.*

D'après cette description, il est évident que le triangle de Pascal appartient à Stifel. Il se sert même de cette table, pour construire, à son insu, les termes binomiaux, mais rien qu'en vue de l'extraction des racines : *Cui speciei quilibet ordo transversaliter progrediens serviat, subindicat ordinis illius numerus primus, notum est enim* 2 *subindicare quadratum.* Ainsi pour l'extraction de la racine huitième, il dit :

Ex ordine illo 8. 28. 56 .70. *sumuntur numeri qui serviant extractioni Zensizenzensicæ. Primo recipiuntur ex ordine quo ponantur. Deinde repetuntur omnes retrogrado excepto ultimo. Erunt ergo septem numeri videlicet*

(*) Il faut *duabus*.

8. 28. 56. 70. 56. 28. 8. *et cuilibet eorum præpono suas cifras. Recipit autem quilibet eorum pro se cifram unam, et pro quolibet sequenti numero etiam unam recipit. Ut* 8 *septem cifras, unam pro se et reliquas sex pro reliquis sex numeris sequentibus : sic secundus numerus, id est* 28, *recipit sex cifras, unam pro se et alias quinque pro numeris quinque sequentibus : sic tertius, id est* 56 *recipit quinque, et quartus est* 70 *recipit quatuor, et sic deinceps, quemadmodum vides eos hic esse positos :*

80000000
28000000
5600000
700000
56000
2800
80

C'est tout ce qu'il dit de l'extraction de la racine huitième, il en résulte clairement qu'il avait le sentiment du binôme et le formait même ; aussi Kästner, dont nous avons extrait ce qui précède, dit avec raison que Stifel connaissait le théorème binomial *virtualiter*, mais non *formaliter* (Geschichte der Mathematik, t. I, p. 128, 1796). On peut en dire autant de la théorie des logarithmes. Ainsi, dans le 4^{me} chapitre du 1er livre, où il traite des progressions géométriques, on lit : *Sequitur utilis tractatio ut progressioni arithmeticæ respondeat geometrica progressio.* Il montre l'usage qu'on peut faire de cette correspondance, pour changer la multiplication et la division en addition et soustraction ; les élévations aux puissances et extractions de racines en multiplication et division, et donne des exemples. Il dit la chose et ne se sert pas du mot *puissance*, mais il emploie le mot *exposant* dans le même sens que nous. Ainsi, dans une équation où un zensicube doit être égal à un sursolide plus 35156 bicarrés ; il dit que les *exposants* sont 6, 5, 4. Cet homme de génie né à Eslingen en 1509, et pasteur de l'église de Holsdorf, a enseigné en Saxe, en Prusse et en diverses villes de France et d'Italie, et est mort à Iéna en 1567. Il a publié une arithmétique en allemand, Norimb., 1545, in-4°, et un livre de calcul (Rechenbuch) sur la pratique italienne et allemande, Nuremb., 1546, in-4°.

SUR LES

MÉTHODES MÉTAMORPHIQUES (de transformation),

et théorie des points correspondants.

I. Soit $f(x, y, z) = 0$ l'équation d'une surface algébrique du degré m et rapportée à trois plans coordonnés; prenons arbitrairement trois fonctions F_1, F_2, F_3 à six variables x, y, z, u, t, v, et égalons-les à zéro; et regardons u, t, v, comme des coordonnées rapportées à d'autres plans; éliminant x, y, z entre les quatre équations, on aura une équation entre les trois variables u, t, v qui représentera une nouvelle surface, dont les propriétés géométriques ont évidemment des relations avec celles de la première surface. Si une propriété de la première est exprimée analytiquement par une certaine fonction $\varphi(x, y, z) = 0$, on aura de suite, la propriété correspondante de la seconde en éliminant x, y, z entre cette équation et les trois équations arbitrairement choisies. Il en sera de même si l'équation $\varphi = 0$ renferme des coefficients différentiels : la nouvelle surface prend le nom de surface *transformée* relativement à la première, le mot étant pris dans son acception la plus générale.

II. On restreint ordinairement cette acception. On impose la condition que chaque point de la surface transformée ne corresponde qu'à un seul point de la surface donnée et *vice versâ;* dès lors, les trois fonctions arbitraires ne peuvent avoir que cette forme :

$$F_1 = x\,(a + bt + cu + dv) + y\,(e + ft + gu + hv) + z\,(i + kt + lu + mv) + n + pt + qu + rv = 0,$$

Dans F_1 les constantes portent un accent et dans F_2 deux accents. Chaque fonction renfermant seize constantes arbitraires et en tout quarante-cinq rapports arbitraires. On en déduit $x = \frac{\rho}{Q}$, $y = \frac{\rho'}{Q}$, $r = \frac{\rho''}{Q}$; ρ, ρ', ρ'', Q sont, généralement parlant, des fonctions en u, t, v, du troisième degré dont la surface transformée sera au plus du degré *trois m*. Si l'une des trois fonctions, soit F, ne renferme aucune des variables u, t, v, alors les fonctions ρ, ρ', ρ'', Q ne sont que du second degré; et la surface transformée est du degré *deux m*. Si deux des trois fonctions, soient F_1 et F_2, sont indépendantes des variables u, t, v, la surface transformée n'est plus que du degré m. On pourrait appeler la première de ces méthodes métamorphiques, à raison du degré des formules, méthode ternaire; la deuxième méthode binaire et la troisième méthode simple. On n'a pas encore que je sache fait usage de la méthode ternaire. M. Magnus, comme nous verrons ci-dessous, a employé la méthode binaire. MM. Poncelet et Chasles ont doté la science de l'espace d'un grand nombre de beaux théorèmes, à l'aide de la troisième méthode et de la seconde que M. Chasles a si fructueusement étudiée, sous le nom de méthode *homographique*, dans l'*aperçu historique* sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie (1837) ; ouvrage devenu malheureusement trop rare.

Ainsi par la méthode ternaire le plan se transforme en surface du troisième degré, et l'intersection de deux plans où la droite se transforme dans l'intersection des deux surfaces du troisième degré ; par la méthode binaire, le plan se transforme en surface du deuxième degré et la droite, dans l'intersection de deux de ces surfaces ; par la méthode simple ou homographique, le plan reste un plan, et la droite une droite. Nous allons donner d'après M. Magnus quelques applications aux coniques de la méthode binaire comme exemple de moyen heuristique, ou moyen pour découvrir des théorèmes de géométrie (Crelle, tome 8, p. 51; 1832, Mémoire en français).

Méthode binaire ou homographique.

III. Soient x, y les coordonnées d'un point dans un plan XY; et u, t les coordonnées correspondantes dans le plan UT, et posons :

$$(ay+bx+c)u+(a'y+b'x+c')t+a''y+b''x+c''=0, \quad (1)$$

$$(\alpha y+\beta x+\gamma)u+(\alpha'y+\beta'x+\gamma')t+\alpha''y+\beta''x+\gamma''=0; \quad (2)$$

on en déduit :

$$y(au+a't+a'')+x(bu+b't+b'')+cu+c't+c''=0, \quad (3)$$

$$y(\alpha u+\alpha't+\alpha'')+x(\beta u+\beta't+\beta'')+\gamma u+\gamma't+\gamma''=0; \quad (4)$$

formules métamorphiques.

Mettons les équations (1) et (2) sous la forme :

$$\mathrm{A}u+\mathrm{A}'t+\mathrm{A}''=0, \quad (5)$$

$$\mathrm{B}u+\mathrm{B}'t+\mathrm{B}''=0; \quad (6)$$

d'où

$$u=\frac{\mathrm{A'B''}-\mathrm{A''B'}}{\mathrm{AB'}-\mathrm{A'B}};\ t=\frac{\mathrm{A''B}-\mathrm{AB''}}{\mathrm{AB'}-\mathrm{A'B}}.$$

IV. Soit une droite située dans le plan UT et donnée par l'équation $u=gt+h$ (7).

La conique correspondante dans le plan XY a pour équation :

$$\mathrm{A'B''}-\mathrm{A''B'}-g(\mathrm{A''B}-\mathrm{AB''})-h(\mathrm{AB'}-\mathrm{A'B})=0; \quad (8)$$

pour que cette équation soit satisfaite par des valeurs de x et de y, indépendamment d'aucune valeur de g et de h, il faut que les trois binômes soient nuls; or deux de ces binômes peuvent être annulés au moyen de quatre couples de valeurs de x et de y, parmi lesquelles il y en a au moins deux de réelles; en effet, posons par exemple $A''B - AB'' = 0$; $AB' - A'B = 0$; on y satisfait par l'équation $A = B = 0$; or A et B étant du premier degré donnent un couple de valeurs réelles; il existe donc encore au moins un second couple de valeurs réelles et ce second couple annule aussi le troisième binôme; car on a :

$$\frac{A}{B} = \frac{A''}{B''} = \frac{A'}{B'}; \text{ donc } A''B' - A'B'' = 0;$$

il existe donc dans le plan XY trois points ou au moins un point par lesquels ou lequel passent toutes les coniques correspondantes aux droites tracées dans le plan UT, points dont les coordonnées sont fonction des dix-huit constantes. Nous désignerons ces points par X', X'', X''' et nous les nommerons *points principaux*. Il est évident que réciproquement à une droite tracée dans le plan XY correspond une conique dans le plan UV, passant, généralement parlant, par trois points principaux que nous désignons par U', U'', U'''.

Observation. Lorsqu'un des binômes $AB'-A'B$ s'abaisse au premier degré, un point principal ou même deux tombent à l'infini.

V. A une conique tracée dans l'un des plans, correspond dans l'autre une ligne du quatrième degré; mais si la conique passe par les trois points principaux, la ligne correspondante sera une droite, comme il est facile de s'en convaincre.

VI. A un faisceau de droites convergeant vers un même point correspondent dans l'autre plan, autant de coniques passant par les trois points principaux et par un même quatrième point; lorsque les droites sont parallèles, ce quatrième point varie avec la direction des droites, et a pour lieu géométrique une conique. En effet, considérons g comme constant et h comme variable, alors on a un système de droites parallèles ; et l'équation (8) est satisfaite par les valeurs de x et de y qui satisfont aux équations

$$g(A'B - AB'') - (A'B'' - A''B') = 0,$$
$$AB' - A'B = 0;$$

toutes ces coniques passent par les trois points principaux, et par le même quatrième point dont les coordonnées satisfont à ces deux équations qui sont indépendantes de h ; ce quatrième point correspond au point de convergence situé à l'infini des droites parallèles; la dernière équation est indépendante de g ; donc les points situés à l'infini dans un des plans, ont pour correspondante une conique dans l'autre plan et représentée par l'équation $AB' - A'B = 0$ dans le plan XY.

VII. A une droite passant par un point principal d'un plan correspond le système de deux droites, passant par les points principaux de l'autre.

Coniques homothétiques.

VIII. Prenons pour formules métamorphiques :

$$ayu + bxt + 1 = 0,$$
$$xu - yt = 0;$$

on a : $\quad u = -\dfrac{y}{ay^2 + bx^2}; \quad t = -\dfrac{x}{ay^2 + bx^2};$

ainsi la droite $u = gt + h$, située dans le plan UT, a pour correspondante dans le plan XY la conique

$$ay^2 + bx^2 + \frac{1}{h}y - \frac{g}{h}x = 0;$$

a et b étant indépendants de g et h, il s'ensuit que toutes ces coniques sont semblables et semblablement placées, ou autrement sont *homothétiques*, expression qu'on doit à

M. Chasles (1); l'origine est un centre d'homologie et un point ***principal*****; les deux autres points sont à l'infini (Voir *Observation IV*)** ; l'équation de la tangente à l'origine est $y-gx=0$; donc pour toutes les droites parallèles, les coniques correspondantes se touchent au *point principal* ; donc aussi l'angle sous lequel se coupent deux droites dans le plan UT, est égal à l'angle sous lequel se coupent les coniques homothétiques correspondantes dans le plan XY au point principal X'. On peut supposer que les axes x, y font le même angle que les axes t, u.

IX. Soit abc un triangle tracé dans le plan UT; aa', bb', cc' les perpendiculaires abaissées de a, b, c sur les côtés opposés et p leur point de rencontre.

Prenons la transformation homothétique; aux côtés ab, bc, ac répondent dans le plan XY, trois coniques homothétiques passant par le point principal X' et se coupant deux à deux, aux points α, β, γ correspondant aux sommets a, b, c; aux trois hauteurs aa', bb', cc' correspondent respectivement trois autres coniques homothétiques, passant respectivement par les points, α, β, γ et coupant respectivement les trois précédentes coniques sous des angles droits et se rencontrant au même point p' correspondant au point p; on a donc cette proposition :

Théorème. *Dans un plan on donne sept points*

$$X', \alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma';$$

on fait passer six coniques homothétiques par les points

$$X'\alpha\beta,\ X'\alpha\gamma,\ X'\beta\gamma;\ X'\gamma\gamma',\ X'\beta\beta',\ X'\alpha\alpha';$$

si les trois dernières coniques coupent respectivement les trois

---

(*) Il serait peut-être plus exact de dire lignes homothètes.

premières orthogonalement, savoir $X'\gamma\gamma'$ et $X'\alpha\beta$, etc., ces trois dernières se coupent en un même point p'.

Cercles.

X. Si dans les précédentes formules métamorphiques, on suppose les axes rectangulaires et $a=b$, les coniques deviennent des cercles.

Soit dans le plan UT, un cercle c passant par le point principal X ; et deux sécantes d, d', se rencontrant en p et coupant le cercle aux points a, b; a', b', et soit p' l'intersection des cordes ab', $a'b$ que nous désignons par e et e'; p' est sur la polaire de p; et soit t le pole d'une troisième droite r passant par p et sur laquelle p se meut, et s les diverses polaires des points de r;

au point p correspond	un point π dans le plan xy,
au cercle c	une droite γ,
à la droite d	un cercle δ passant par π et X' et coupant γ en α et β,
à la droite d'	δ' passant par π et X' et coupant γ en α' et β',
à la droite e	ε passant par X', α, β, π',
à la droite e'	ε' X', α', β', π',

π' est le point correspondant à p';
à la polaire s de p correspond le cercle σ passant par X',
à la droite r décrit par p correspond un cercle ρ passant par X'.

Les divers cercles σ correspondant aux diverses polaires s de p se transportant sur r, passent par X' et encore par un point T correspondant à t; de là ce théorème :

Si par deux points donnés π, π_1, on fait passer deux cercles quelconques δ, δ'. coupant une droite donnée en quatre points

α, β ; α', β'; les deux cercles $\pi_1\alpha\beta$, $\pi_1\alpha'\beta'$ se coupent en un second point π', dont le lieu est un cercle σ, passant par π_1 ; si le point π varie et se meut sur un cercle passant par π_1, le cercle σ variera, mais passera constamment par un même point τ.

XI. En invoquant la théorie des polaires réciproques, on obtient le théorème suivant :

Soient deux coniques δ, δ' ayant un même foyer fixe et dont chacune touche deux droites fixes π, π_1; si, d'un point donné γ, on mène à chacune de ces coniques deux tangentes α, β et α', β' ; de plus, si dans les deux triangles formés respectivement par les droites π_1, α, α' ; π_1, β, β' ; on inscrit deux nouvelles coniques ε, ε' de même foyer que les premières ; ces coniques ε, ε' auront une seconde tangente commune π' qui touchera une seule et même conique σ ayant le même foyer et la même tangente π_1. Si la droite π change de situation, mais de manière à rester tangente à une même conique confocale ρ qui touche la droite π_1 ; les diverses coniques σ qui en naissent, toucheront une seule et même droite τ.

XII. Trois coniques, passant par les points principaux X′, X″, X‴ du plan XY, deviennent des droites et une droite devient une conique dans le plan UT ; de là et de la théorie des polaires réciproques, on déduit le moyen de *sextupler*, le théorème de Pascal.

1. Théorème de Pascal sur l'hexagone inscrit.

2. Théorème de Brianchon sur l'hexagone circonscrit (par les polaires réciproques).

3. Soient six points a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 sur une même droite et X′, X″, X‴, trois points quelconques, tous dans le même plan ; soient décrites les six coniques : $X'X''X'''a_1a_2$, $X'X''X''a_2a_3$, $X'X''X'''a_3a_4$, $X'X''X'''a_4a_5$, $X'X''X'''a_5a_6$, $X'X''X'''a_6a_1$; le quatrième point d'intersection de la première conique et de la quatrième ; de la deuxième et de la cinquième ; de la troisième et de la sixième ; sont tous situés sur

une même conique passant par les trois points X', X'', X''' : déduit du théorème 1 par la méthode métamorphique.

4. Soient décrites six coniques passant par trois points fixes X', X'', X''' et touchant une même droite, et soient désignés les quatrièmes points d'intersection de ces coniques par a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 : si l'on décrit les trois coniques $X'X''X'''a_1a_4$, $X'X''X'''a_2a_5$, $X'X''X'''a_3a_6$, elles se coupent en un même quatrième point : déduit du théorème 2 par le procédé métamorphique.

5. Soient tirées arbitrairement d'un même point, six droites a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, et soient encore dans le même plan trois droites fixes X',X'',X''' ; si dans les six pentagones formés par ces trois droites et deux droites consécutives, a_1a_2, a_2a_3.... a_6a_1, on inscrit six coniques, les quatrièmes tangentes communes à la première et à la quatrième conique, à la deuxiéme et à la cinquième conique , à la troisième et à la sixième conique, formeront, avec les trois droites X', X'', X''', un hexagone dans lequel on peut inscrire une conique : déduit par les polaires réciproques du théorème 3.

6. Soient décrites six coniques touchant trois droites fixes X', X'', X''' et passant par un même point, et soient désignées les quatrième tangentes communes à deux coniques consécutives par a_1, a_2 .... a_6, si dans les trois pentagones formés respectivement par les droites X', X'', X''' et les systèmes de droites a_1a_4, a_2a_5, a_3a_6, on inscrit trois coniques, elles auront une même quatrième tangente commune : déduit du théorème 4 par les polaires réciproques.

Il est bon d'observer que les constructions contenues dans les énoncés de ces six théorèmes peuvent être variées de soixante manières.

Méthode simple ou perspective.

XII. Prenez pour formule métamorphique :

$$(ay+bx+c)u+a''y+b''x+c''=0,$$
$$(ay+bx+c)u+\alpha''y+\beta''x+\gamma''=0.$$

Alors à une droite du plan UT, $u=gt+h$, correspond dans le plan Xy la droite

$$a''y+b''x+e''-g(\alpha''y+\beta''x+\alpha'')+h(ay+bx+c)=0.$$

Par un changement de coordonnées, les deux formules métamorphiques peuvent être ramenées à celles-ci :

$$(ay+bx+c)u=y,$$
$$(ay+bx+c)t=x.$$

Et supposant que les axes x, y, et les axes u, t forment le même angle; soit M un point du plan XY et M′ son correspondant sur UT; si l'on applique le plan XY sur le plan UT, de manière que l'axe x concorde avec l'axe T et l'axe Y avec l'axe U; alors la droite MM′ passe par l'origine; car $\frac{u}{t}=\frac{y}{x}$. Pour avoir les points M qui tombent sur leur correspondant M′, il suffit de faire $y=u$; $x=t$; d'où

$$(ay+bx+c-1)y=0,$$
$$(ay+bx+c-1)x=0,$$

deux équations qui sont satisfaites par $x=y=0$; ce qui donne l'origine, et ensuite par $ay+bx+c-1=0$. Donc, cette droite coïncide avec sa correspondante; on peut l'appeler *axe de collinéation*. Il est évident que le point de concours des deux droites correspondantes est sur l'axe de collinéation.

Par le moyen de ces dernières formules métamorphiques,

on peut donc démontrer une foule de théorèmes de la géométrie de situation.

Méthode métamorphique indéterminée.

XIII. Ne prenons qu'une seule équation métamorphique,

$$(ay+bx+c)u+(a'y+b'x+c')t+a''y+b''x+c''=0.$$

Alors, à un point M (x',y') du plan XY, correspond, dans le plan UT, une droite exprimée par l'équation

$$(ay'+bx'+c)u+(a'y'+b'x'+c')t+a''y'+b''x'+c''=0.$$

Par un changement de coordonnées, on peut donner à cette équation la forme $(ay+bx+d)u+(by+cx+e)t+dy+ex+f=0$ (1), et faire que les angles des nouveaux axes soient égaux.

Si on pose le plan XY sur le plan UT de manière que les axes coïncident, le point M tombera quelque part en M′ sur le plan UT; si on cherche la droite qui sur le plan répond à M′ en appliquant le plan XY sur le plan UT, cette droite est la même qui correspond à M; car, l'équation de cette droite a cette forme symétrique :

$$ayu+b(xu+yt)+cxt+d(u+y)+e(x+t)+f=0.$$

Pour trouver les points qui, dans les plans ainsi superposés, tombent sur leurs droites correspondantes, il suffit de faire, dans cette dernière équation, $u=y$ et $t=x$, et l'on trouve l'équation d'une conique :

$$ay^2+2by+cx^2+2dy+2ex+f=0.$$

On voit que la polaire du point M (x', y'), par rapport à cette conique, est précisément l'équation de la droite correspondante.

XIV. Ce qui précède suffit pour faire connaître l'origine de cet océan de théorèmes que nous devons aux doctrines métamorphiques; source intarissable; il est extrêmement utile d'en propager le principe. Nous avons déjà eu occasion de dire, et il n'est pas superflu de le redire, que le procédé métamorphique a été indiqué par Newton et généralisé quant à la méthode perspective par Waring (*V*. t. III, p. 417).

Observation. Nous reviendrons sur cette matière en rendant compte d'un mémoire de M. Lalanne (Léon), sur la géométrie *anamorphique* (*déformative*).

NOTE SUR LES TABLES DE CALLET.

On lit : logarit. hyperbolique 1099 = 7,0021 (1) 595. . . . . le chiffre entre parenthèse est à effacer, il faut 7,0021595.....

Cette erreur a été découverte par M. le professeur Gudermann en calculant ses précieuses tables de fonctions potentielles (*Crelle*, t. IX, p. 362).

Nous signalerons dans les tables de Callet l'absence inconcevable de toute table de matières, et de toute pagination, et que j'ai faites dans mon exemplaire ; on désirerait la table des sinus verses si utile en mécanique. Pourquoi n'indique-t-on pas par un point placé sur le dernier chiffre à droite comme dans les tables de M. Babbage, si les nombres sont par excès ou par défauts, indication indispensable, pour juger de l'exactitude des résultats? M. Levesque (*V*. t. IV, p. 310) a calculé les logarit. des six tables suivantes :

1° sincos, 2° sintang, 3° coscot, 4° séccoséc, 5° cotcoséc, 6° séctang, dont a souvent besoin ; la publication de ces tables serait fort utile.

SUR L'EQUATION DIFFÉRENTIELLE de la page 396.

PAR M. JULES VIEILLE,
Professeur à l'École normale.

Le dernier numéro de l'utile recueil que vous rédigez, renferme un article de M. Turquan (p. 396), dans lequel ce professeur se propose d'intégrer l'équation :

$$(1) \quad \dots\dots \quad \frac{d^2y}{dx^2}+\varphi(y)\cdot\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=\psi(y).$$

L'intégrale que donne l'auteur, n'est pas exacte, au lieu de la formule :

$$x=\int\frac{dy\, e^{\int\varphi(y)\,dy}}{\sqrt{B+\psi(y)\,e^{2\int\varphi(y)\,dy}}},$$

qui termine l'article en question, il faut écrire :

$$x=\int\frac{dy\, e^{\int\varphi(y)\,dy}}{\sqrt{B+2\int e^{2\int\varphi(y)\,dy}\cdot\psi(y)\,dy}}+C.$$

Peut-être n'est-ce qu'une faute d'impression (*). Au reste l'intégrale de l'équation (1) est connue depuis longtemps. Ainsi, dans la mécanique de Poisson (1^er^ vol. p. 353), on trouve l'intégrale de l'équation à laquelle conduit l'étude du mouvement du pendule simple dans un milieu résistant. Cette équation différentielle est de même forme que l'équation (1),

(*) C'est une faute, mais non pas typographique ; elle m'a échappé.
Tm.

et le procédé d'intégration que donne Poisson, est applicable de tout point au cas actuel.

Si maintenant, on examine le procédé employé par M. Turquan, on trouve qu'il peut être notablement abrégé. En effet, après avoir changé la variable indépendante x, dans la variable y, ce qui donne l'équation (2) de l'auteur :

$$p\frac{dp}{dy}+p^2\varphi(y)=\psi(y),$$

il est inutile de recourir à la variation des constantes arbitraires. N'est-il pas évident que *si l'on prend pour inconnue la fonction* p², l'équation ci-dessus que l'on peut écrire sous la forme :

$$\frac{d.p^2}{dy}+2\varphi(y).p^2=2\psi(y),$$

n'est autre qu'une *équation linéaire du premier ordre*, entre la fonction p^2 et la variable y, qui s'intègre immédiatement ?

En terminant, je ferai observer que l'équation (1), objet de ces recherches, n'est elle-même qu'un cas particulier de l'équation bien connue :

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\varphi(y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=\psi(y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^n,$$

laquelle, par le changement de variable indépendante indiqué plus haut, se ramène à :

$$\frac{dp}{dy}+\varphi(y).\ p=\psi(y)p^{n-1}.$$

C'est l'*équation de Jacques Bernoulli.*

Note. Cette dernière solution est aussi indiquée par Euler. (*Cal. int.*, t. II, prob. 96, p. 40). Tm.

ANNONCES.

Théorèmes de Géométrie, réduits à leur plus simple expression par le chevalier Vasse de Saint-Ouen, inspecteur retraité de l'Université; etc. 4 pages, format Atlantique. Paris, Hachette, libraire. Prix : 1 fr. (sans date).

C'est une *exhibition* systématique des théorèmes et des figures de Legendre, avec des démonstrations succinctement formulées; pour servir aux élèves à repasser la géométrie. Il est fâcheux que l'auteur ait fait quelques réflexions, étrangères au sujet, peu propres à faire agréer son ouvrage par les hommes d'enseignement.

On rendra compte des ouvrages suivants :

Abaque ou Compteur universel, par Léon Lalanne, ancien élève de l'École polytechnique, ingénieur des ponts et chaussées, secrétaire de la section des chemins de fer au Conseil général des ponts et chaussées. Paris, 1845, petit in-8° de 64 pages. J.-J. Dubochet et Cie, éditeurs, rue Richelieu, 60.

Mémoire sur les tables graphiques, et sur la Géométrie anamorphique appliquées à diverses questions qui se rattachent à l'art de l'ingénieur, par Léon Lalanne, ingénieur des ponts et chaussées. (*Extrait des Annales des ponts et chaussées*). Paris, 1846, in-8° de 72 pages, 3 planches; Carillian-Gœury et Victor Dalmont, libraires.

Éléments d'algèbre, par P.-J.-E. Finck, docteur ès sciences, officier de l'Université, professeur de mathématiques spéciales dans les colléges royaux, professeur de mathématiques aux Écoles royales d'artillerie, chargé du cours d'analyse infinitésimale à l'Académie de Strasbourg. Seconde édition. Strasbourg, 1846, in-8° de 543 pages.

Théorie du mouvement elliptique des planètes. Recherches sur les altérations que la résistance de l'éther peut produire dans le mouvement des planètes et des comètes. Thèses d'astronomie et de mécanique, qui ont été soutenues devant la Faculté des sciences de Paris, le 24 décembre 1845, par M. E.-Aug. Tarnier, ancien maître de conférences au collége royal de Louis le Grand, pour obtenir le grade de docteur ès sciences mathématiques. Paris, 1845, in-4° de 50 pages; Bachelier, libraire.

Notice sur l'astronomie, par E. A. Tarnier, licencié ès sciences, ancien répétiteur de mathématiques spéciales au collége royal de Louis le Grand. Paris, 1845, in-4° de 16 pages. Bachelier.

Mémoire sur la balistique, par Is. Didion, chef d'escadron d'artillerie, professeur à l'École d'application de l'artillerie et du génie à Metz. Metz, 1846, in-8° de 47 pag. 1 pl. lithogr. (Extrait des mémoires de l'Académie royale de Metz. 1845-1846.)

QUESTION.

130. Trouver le lieu géométrique d'un point situé dans le plan d'un polygone régulier; et tel que le produit des distances de ce point aux sommets du polygone soit une quantité constante. (Serret.)

CONCOURS D'AGRÉGATION EN 1846 (voir tome IV, p. 461).

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES. 22 AOUT.

Composition d'analyse.

1° Qu'est-ce qu'on entend par une intégrale définie simple ou multiple?

2° Sous quelles conditions une intégrale définie peut-elle se déduire de l'intégrale indéfinie?

3° Peut-on, dans tous les cas, différentier ou intégrer sous le signe $\int$?

4° Peut-on intervertir l'ordre des intégrations d'une intégrale définie multiple?

5° Donner quelques exemples de détermination d'intégrales définies.

6° Démontrer le théorème suivant :

Si dans l'intégrale double

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \cos u\,(x-\lambda) f(\lambda)\, d\lambda du$$

on substitue aux limites $-\infty$ et $+\infty$ de l'intégration relative à λ des limites infiniment peu différentes l'une de l'autre, pourvu qu'elles comprennent x, l'intégrale double ainsi restreinte convergera vers $f(x)$, et la partie négligée convergera vers zéro.

Composition de mécanique.

1° Si l'on considère un point matériel pesant en mouvement dans l'atmosphère, on peut se proposer de déterminer son mouvement absolu dans l'espace, ou son mouvement relatif, à trois axes rectangulaires menés par un point de la surface terrestre, dont l'un est dirigé suivant la verticale, et un autre suivant la méridienne; cela posé, et en faisant abstraction du mouvement de translation de la terre pour n'avoir égard qu'à son mouvement de rotation diurne commun à l'atmosphère et à la terre, en la supposant sphérique et homogène, et en admettant que la résistance de l'air est constamment proportionnelle au carré de la vitesse relative de l'air et du mobile, on demande de déterminer les équations différentielles du mouvement relatif du point matériel :

2° Pour arriver à des intégrales sous forme finie, on supposera que le mouvement a lieu dans le vide, et que la trajectoire s'écarte peu de la verticale ; on négligera le carré de la vitesse angulaire de la terre, et l'on regardera le déplacement vertical du mobile comme très-petit par rapport au rayon de la terre.

Composition du jury d'examen.

MM. Cournot, inspecteur général de l'Université;
Chenou, professeur à la Faculté des sciences de Rennes;
Sonnet, docteur ès sciences, agrégé ès-sciences;
Vernier, professeur de mathématiques spéciales au collége royal Henri IV ;
Blanchet, professeur de physique au collége royal Henri IV.

EXAMEN MATHÉMATIQUE

pour obtenir le titre de fellow *(socius) à l'Université de Dublin, en* 1842.

Ce titre correspond à peu près à celui d'*agrégé.*

—

1. Étant donnée la base d'un triangle, le produit de deux côtés étant égal au carré de la moitié de la base, le lieu du sommet est une lemniscate de Bernoulli.

2. L'arc d'une lemniscate vulgaire s'exprime en fonction elliptique de première espèce.

3. Soient données deux courbes dans le même plan, et telles que si d'un point P, situé sur la courbe extérieure, menant deux tangentes touchant la courbe intérieure en A et B, la normale en P divise constamment en parties égales l'angle formé par les tangentes; alors la différence entre la somme des tangentes PA + PB et l'arc AB intercepté est une quantité constante.

4. Le même théorème subsiste lorsque les deux courbes sont sur une surface quelconque, les deux tangentes étant des lignes géodésiques.

5. Si la courbe intérieure est une ellipse plane, l'autre sera une ellipse confocale.

6. Si la courbe intérieure est une ellipse sphérique, quelle sera l'autre courbe?

7. Quel est le plus grand nombre de tangentes qu'on peut mener à une ligne de l'ordre n?

8. Si deux courbes se coupent mutuellement, il existe des

équations de condition entre les coordonnées des points d'intersection.

9. Si deux courbes du troisième ordre se coupent en neuf points ; par huit quelconques de ces points, le neuvième est déterminé.

10. Il existe une relation d'identité remarquable entre les différences de quatre quantités ; savoir :

$$(a-b)(c-d)+(a-c)(d-b)+(a-d)(b-c)=0.$$

11. Cette relation subsiste, si on remplace les différences par les sinus des différences.

12. Trois droites ne se coupant pas déterminent un parallélipipède unique.

13. Etant donné un point P extérieur à un ellipsoïde, trouver un point intérieur Q tel qu'en menant par ce point un plan *quelconque* coupant la surface suivant une ellipse, la droite PQ soit un axe principal du cône ayant cette ellipse pour base et le point P pour sommet.

14. Une courbe quelconque tourne dans un plan sur une autre courbe fixe ; un point quelconque pris dans le plan de la première décrira une troisième courbe.

15. Une courbe finie étant donnée, on cherche le lieu des intersections des tangentes rectangulaires ; on fait de même pour cette seconde courbe, et ainsi de suite ; la forme de la dernière courbe à l'infini est une cycloïde.

16. Trois plans rectangulaires touchant trois surfaces confocales du second ordre, le lieu d'intersection est une sphère.

17. Comment trouver l'équation qui a pour racines les valeurs maxima ou minima d'une fonction donnée ?

18. Une fonction rationnelle de degré pair a un minimum absolu ; quelles sont les limites de ce minimum ?

19. Si $\varphi(x+y\sqrt{-1}) = U + V\sqrt{-1}$; alors $\frac{dU}{dx} = \frac{dV}{dy}$.

20. Si $\varphi(x+y\sqrt{-1},\ x'+y'\sqrt{-1},\ x''+y''\sqrt{-1}\ldots.) =$

$$= U + V\sqrt{-1}\text{ ; alors } \frac{dU}{dx} + \frac{dU}{dx'} + \frac{dU}{dx''} + \ldots =$$

$$= \frac{dV}{dy} + \frac{dV}{dy'} + \frac{dV}{dy''}\ldots$$

21. La valeur minimum d'une fonction, pour une valeur réelle de la variable, peut encore être diminuée en augmentant la variable d'une quantité imaginaire.

22. Les fonctions réelles de quantités imaginaires n'ont ni maximum ni minimum.

23. Une fonction réelle impaire n'a ni maximum ni minimum absolu.

24. Condition du maximum ou du minimum pour une fonction à deux variables.

25. Qu'arrive-t-il lorsque, dans ce cas, la quantité qui doit conserver le même signe est un carré parfait ?

26. Eclaircir ce qui précède par la théorie des surfaces.

27. Trouver les conditions du maximum ou du minimum s'il y a trois variables ou davantage.

28. Intégrer l'équation

$$(a + mx + ny)\, dy + (a' + m'x + n'y)\, dy = 0.$$

29. Critérium d'intégrabilité d'une équation différentielle entre trois variables.

30. Si l'équation ne satisfait pas à ce critérium, quelle est la nature de la relation entre les trois variables ?

31. Comment alors faut-il intégrer l'équation ?

32. Critérium d'intégrabilité pour quatre variables.

33. Quelles sont les équations de condition pour ces variables ?

34. Si l'on a quatre variables, et qu'aucune équation de condition ne soit satisfaite, quelle sera l'intégrale ?

35. L'intégrale peut, dans ce cas, être ramenée au système de deux équations.

36. Est-il nécessaire qu'une équation différentielle du second ordre entre plusieurs variables ait une équation primitive ?

37. L'équation $dz^2 = m^2 (dx^2 + dy^2)$ a-t-elle une équation primitive ? Pourquoi pas ?

38. Comment intégrer cette équation ?

39. Intégrer $px + qz + y = 0$.

40. Intégrer $pqz + qxz = xy$.

41. Intégrer cette équation entre quatre variables :

$$(x+y+z)\frac{dy}{du}+(u+y+z)\frac{dz}{dx}+$$
$$+(u+x+z)\frac{dz}{dy}=u+x+y.$$

42. Intégrer

$$t\frac{dz}{dt}+u\frac{dz}{du}+x\frac{dz}{dx}+y\frac{dz}{dy}=uz.$$

43. Comment faut-il en général intégrer les équations aux différences partielles qui passent le premier degré ?

44. Méthode de Charpit.

45. Par quelle substitution peut-on réduire à une fonction elliptique l'intégrale $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + 2abx^2 \cos\varphi + b^2x^4}}$?

46. L'intégrale $\int \frac{d\theta}{\Delta^3}$ ou $\Delta = \sqrt{1 - c^2 \sin^2\theta}$ exprime un arc d'ellipse ; θ est l'angle de la normale et d'un axe fixe ; comment cela résulte-t-il géométriquement ?

47. Comment faut-il chercher la formule de réduction

pour l'intégrale $\int \frac{\sin^{2m}\theta d\theta}{\Delta}$? en différentiant quelle certaine fonction ?

48. Réduction de l'intégrale $\int \frac{\mathrm{R}d\theta}{\Delta}$ quand R est fractionnaire.

49. Formule qui sert à opérer l'addition et la soustraction des fonctions elliptiques de la seconde espèce ; comment la déduire de la trigonométrie sphérique ?

50. Formule analogue pour les fonctions de la première espèce ; comment la déduire de la première ?

51. L'amplitude de la somme ou de la différence des deux fonctions F est la somme ou la différence de deux certains arcs.

52. De quelle courbe la fonction F exprime-t-elle l'arc ?

53. Quand le module diffère très-peu de l'unité, comment trouver la valeur de la fonction *complète* F ?

54. Dans le même cas, on demande la valeur de la fonction complète E.

55. Ramener aux fonctions elliptiques l'intégrale

$$\int \frac{\mathrm{P}dx}{\sqrt[4]{a + bx^2 + cx^4}}.$$

56. Ramener aux fonctions elliptiques

$$\int \frac{\mathrm{P}dx}{\sqrt{a + bx^2 + cx^4 + dx^6}}.$$

57. Transformation de Lagrange pour le calcul des fonctions elliptiques.

58. Relation qu'on en déduit entre la fonction F.

59. Cette relation peut se démontrer facilement par la géométrie.

60. La fonction F peut s'exprimer par l'arc de deux ellipses.

61. Un arc d'hyperbole peut s'exprimer par les fonctions F et E.

62. Au moyen de quelle formule ajoute-t-on et retranche-t-on les arcs d'hyperbole ?

63. Comment démontre-t-on géométriquement le théorème de Landen sur la relation entre les arcs d'ellipse et les arcs d'hyperbole ?

64. Théorème remarquable de Jacobi pour la transformation de la fonction F.

65. La démonstration de ce théorème peut-être suggérée par un théorème analogue sur le cercle.

66. La valeur de la fraction déduite de cette analogie ne surpasse jamais l'unité (abstraction faite des signes).

67. Comment en déduit-on une relation entre les amplitudes ?

68. On peut découvrir la relation entre les amplitudes par une certaine propriété de l'équation différentielle.

69. Donner la démonstration du théorème de Jacobi.

70. La relation entre les amplitudes devient plus simple à l'aide d'une certaine transformation.

71. Relation remarquable entre les fonctions *complètes* F et E, lorsque les modules sont *complémentaires*.

72. Bissecter la fonction elliptique Π ; quels sont les caractères analytiques ?

73. Quels sont les problèmes de la géométrie et de la mécanique où l'on rencontre la fonction Π avec un paramètre circulaire.

(*La mécanique et la physique prochainement.*)

COMPOSITION ÉCRITE

proposée à Paris aux examens pour l'École polytechnique en 1846.

PAR M. MENTION,
élève en spéciales.

Lieu des points tels que leurs polaires relatifs à trois cercles donnés concourent en un même point (voir t. IV, p. 665).

Je prends pour axe des x la ligne joignant les centres des deux cercles (R, r), et la perpendiculaire abaissée du troisième centre sur cette ligne pour axe des y (*fig.* 53). Alors les équations des trois cercles sont :

$$\begin{aligned}
&x^2 + y^2 - 2\alpha x + \alpha^2 - R^2 = 0,\\
&x^2 + y^2 - 2\alpha' x + \alpha'^2 - r^2 = 0,\\
&x^2 + y^2 - 2\beta y + \beta^2 - r'^2 = 0.
\end{aligned}$$

Les équations des polaires d'un point x', y', par rapport à chacun de ces cercles, sont :

$$\begin{aligned}
&yy' + x(x' - \alpha) - \alpha x' + \alpha^2 - R^2 = 0;\ (a, b),\\
&yy' + x(x' - \alpha') - \alpha' x' + \alpha'^2 - r^2 = 0;\ (a', b'),\\
&y(y' - \beta) + xx' - \beta y' + \beta^2 - r'^2 = 0;\ (a'', b'').
\end{aligned}$$

On a la relation $(a - a')(b - b'') - (b - b')(a - a'') = 0$

$$\begin{aligned}
a &= -\frac{x' - \alpha}{y'}; \quad & b &= \frac{\alpha x' + R^2 - \alpha^2}{y'};\\
a' &= -\frac{x' - \alpha'}{y'}; \quad & b' &= \frac{\alpha' x' + r^2 - \alpha'^2}{y'};\\
a'' &= -\frac{x'}{y' - \beta}; \quad & b'' &= \frac{\beta y' + r'^2 - \beta^2}{y' - \beta}.
\end{aligned}$$

remplaçant a, a', a'', b, b', b'' par leurs valeurs, il vient l'équation

$$(\alpha-\alpha')\left[(\alpha x'+R^2-a^2)(y'-\beta)-(\beta y'+r'^2-\beta^2)y'\right]=$$
$$=(x'(\alpha-\alpha')+R^2-r^2+\alpha'^2-\alpha^2)(\alpha y'+\beta x'-\alpha\beta)\ ;$$

en supprimant les accents, il vient l'équation du lieu cherché :

$$(\alpha-\alpha')\left[(\alpha x+R^2-\alpha^2)(y-\beta)-(\beta y+r'^2-\beta^2)y\right]-$$
$$-(x(\alpha-\alpha')+R^2-r^2+\alpha'^2-a^2)(\alpha y+\beta x-\alpha\beta)=0.$$

Or l'on sait, sans effectuer, que les termes en xy se détruisent, et que les coefficients de x^2 et de y^2 sont égaux et de même signe. Donc le lieu cherché est un cercle.

Pour avoir la position du centre, je vais avoir recours aux dérivées par rapport à x et à y de l'équation.

Dérivée par rapport à y :

$$(R^2-\alpha^2-2\beta y-r'^2+\beta^2)(\alpha-\alpha')-\alpha(R^2-r^2+\alpha'^2-\alpha^2)=0.$$

Dérivée par rapport à x :

$$-2\beta x(\alpha-\alpha')-\beta(R^2-r^2+\alpha'^2-\alpha^2)=0.$$

De la seconde on tire $x=-\dfrac{R^2-r^2+\alpha'^2-\alpha^2}{2(\alpha-\alpha')}$. Mais si nous retranchons les équations des deux premiers cercles, nous obtenons pour équation de l'axe radical :

$$2(\alpha-\alpha')x+\alpha'^2-\alpha^2+R^2-r^2=0.$$

Donc, déjà ce centre est sur l'axe radical des cercles R et r.

Je vais chercher son y pour fixer sa position ; et d'abord la dérivée par rapport à y devient :

$$-2\beta y(\alpha-\alpha')+(R^2-\alpha^2-r'^2+\beta^2)(\alpha-\alpha')-$$
$$-\alpha(R^2-r^2+\alpha'^2-\alpha^2)=0\ ;$$

d'où

$$y = \frac{(R^2 - \alpha^2 - r'^2 + \beta^2)(\alpha - \alpha') - \alpha(R^2 - r^2 + \alpha'^2 - \alpha^2)}{2\beta(\alpha - \alpha')}.$$

Mais l'axe radical du dernier et du premier cercle a pour équation :

$$2\beta y = 2\alpha x + R^2 - r'^2 - \alpha^2 + \beta^2,$$

et si dans cette équation on remplace x par

$$-\frac{R^2 - r^2 + \alpha'^2 - \alpha^2}{2(\alpha - \alpha')},$$

c'est-à-dire si on fait concourir les deux axes radicaux, on obtient :

$$2\beta y = \frac{-\alpha(R^2 - r^2 + \alpha'^2 - \alpha^2) + (R^2 - r'^2 - \alpha^2 + \beta^2)(\alpha - \alpha')}{\alpha - \alpha'},$$

c'est-à-dire l'ordonnée du centre...

Donc ce cercle a pour centre le centre radical des trois cercles donnés.

Pour avoir son rayon, soient A, B les coordonnées du centre radical ; alors l'équation du cercle sera :

$$(x - A)^2 + (y - B^2 = X^2,$$

ou faisant $y = 0$, $x^2 - 2Ax + A^2 + B^2 = X^2$;
je vais alors chercher à avoir $x^2 - 2Ax$; pour cela je fais $y = 0$ dans l'équation du cercle, et j'observe que

$$-\frac{R^2 - r^2 + \alpha'^2 - \alpha^2}{(\alpha - \alpha')} = 2A ;$$

alors il vient :

$$-\frac{\beta(\alpha x + R^2 - \alpha^2)}{\beta(x - \alpha)} =$$

$$= \frac{x(\alpha - \alpha') + R^2 - r^2 + \alpha'^2 - \alpha^2}{\alpha - \alpha'} = x - 2A ;$$

ou $\quad -R^2 + \alpha^2 = x^2 - 2Ax + 2A\alpha$;

donc $\quad \alpha^2 - R^2 - 2A\alpha = x^2 - 2Ax$,

et par suite $\quad X^2 = A^2 + B^2 + \alpha^2 - 2A\alpha$.

Or cette valeur de X n'est autre que la longueur de la tangente aux cercles issue du centre radical; car T étant cette tangente, l'on a $T^2 =$ (la distance du centre radical au centre du cercle R)$^2 - R^2$. Or le carré de cette distance est

$$B^2 + (A - \alpha)^2 = B^2 + A^2 - 2A\alpha + \alpha^2;$$

donc
$$T^2 = B^2 + A^2 + \alpha^2 - 2A\alpha - R^2.$$

Il est donc enfin établi que le lieu cherché est la circonférence orthogonale aux trois. Il peut être construit alors aisément (le centre et le rayon étant déterminés).

Note. On peut abréger. Dès qu'il est démontré que le centre cherché est sur l'axe radical de deux quelconques de ces cercles, il est évident qu'il se confond avec le centre radical des trois cercles; et les calculs se simplifient en prenant le centre radical pour origine des coordonnées. Les équations des trois cercles prennent alors la forme

$$y^2 - 2\beta y + x^2 - 2\alpha x = \gamma^2; \quad y^2 - 2\beta' y + x^2 - 2\alpha' x = \gamma^2;$$
$$y^2 - 2\beta'' y + x^2 - 2\alpha'' x = \gamma^2;$$

et l'on trouve pour lieu du point, $x^2 + y^2 + \gamma^2 = 0$;

or
$$\gamma^2 = R^2 - \alpha^2 - \beta^2 = r^2 - \alpha'^2 - \beta'^2 = r'^2 - \alpha''^2 - \beta''^2;$$

donc si γ^2 est positif, c'est-à-dire si le centre radical est dans l'intérieur des cercles, le problème est impossible; et si γ^2 est négatif, ou si le centre radical est extérieur aux cercles, alors le lieu est tel qu'on l'a trouvé ci-dessus, et le lieu du point d'intersection des polaires est une ligne du quatrième degré donnée par l'équation

$$[y^2(\beta - \beta') + xy(\alpha - \alpha') + x(\alpha'\beta - \alpha\beta') + \gamma^2(\beta - \beta')]^2 +$$
$$+ [x^2(\alpha - \alpha') + xy(\beta - \beta') + y(\alpha\beta' - \alpha'\beta) + \gamma^2(\beta' - \beta)]^2$$
$$+ \gamma^2 [y(\alpha - \alpha') + x(\beta' - \beta) + \alpha'\beta - \alpha\beta']^2 = 0;$$

il est à remarquer que $y(\alpha - \alpha') + x(\beta' - \beta) + \alpha'\beta - \alpha\beta' = 0$ est l'équation de la droite qui passe par les centres des cercles R,r; en prenant l'axe des x parallèle à cette droite, l'on a $\beta = \beta'$, et l'équation de la courbe se réduit à cette forme :

$$(x^2 + y^2)(x^2 + \beta^2) + \gamma^2 (y - \beta)^2 = 0,$$

ligne qui, n'ayant pas d'asymptotes, est fermée ou composée de branches fermées. Un seul cas échappe à cette méthode : c'est celui où les trois centres sont sur une même droite ; le centre radical étant à l'infini, on ne peut le prendre pour origine ; mais alors la droite des centres est évidemment le lieu cherché. Tm.

QUESTION DE MÉCANIQUE

proposée au concours d'agrégation (année 1845, tom. IV, p. 461).

PAR M. TURQUAN,
professeur au collége royal de Pontivy.

Problème. Un point matériel pesant est suspendu à un fil flexible, inextensible, et sans masse, dont l'autre extrémité est fixe; ce pendule est mis en mouvement dans un plan vertical, et le fil s'enroule sur une courbe fixe située dans ce plan et passant par le point de suspension où elle a pour tangente la verticale; quelle doit être cette courbe fixe, pour que la tension du fil soit constante pendant un certain temps; quelles seront les lois du mouvement, et pourra-t-il être oscillatoire? On donne la longueur du fil et la vitesse du pendule au point le plus bas.

Solution. Je prendrai pour axe des y la verticale passant par le point de suspension, et pour axe des x une horizontale passant par le même point, qui dès lors devient l'origine.

Il est évident qu'à mesure que le fil s'enroule sur la courbe, l'extrémité du pendule décrit la développante de cette courbe ; et que cette développante a pour rayon de courbure à un instant quelconque $l-s$, l étant la longueur donnée du fil, et s la longueur de l'arc embrassé par le fil à cet instant, cet arc étant compté à partir du point de suspension. Il est évident encore que x, y étant les coordonnées de l'extrémité de l'arc s, les angles que le rayon de courbure $l-s$ fait avec les axes, auront pour cosinus $\frac{dx}{ds}$ et $\frac{dy}{ds}$.

On peut supprimer le fil auquel est suspendu le point matériel, pourvu qu'on remplace sa tension par une force égale et de même sens ; cette force sera la résistance de la trajectoire, résistance qu'on sait être égale et directement opposée à la pression qu'elle supporte. Cette pression devant être constante, je la désignerai par a, et j'aurai :

$$a=\frac{v^2}{l-s}+g\frac{dy}{ds}. \qquad (1)$$

Au commencement du mouvement, $s=0$; $\frac{dy}{ds}=1$ et la vitesse v est donnée ; représentons-la par k, il viendra :

$$a=\frac{k^2}{l}+g.$$

On voit par là que a ne peut être plus petit que g, ni même égal à g ; car, dans le premier cas la vitesse k serait imaginaire, et dans le second cas elle serait nulle, et le pendule resterait au repos.

Comme le point matériel en mouvement est assujetti à se mouvoir sur une certaine courbe (la développante de la courbe demandée), et n'éprouve aucun frottement, aucune résistance de milieu; le principe des forces vives a lieu, et l'on a :

$$v^2 = k^2 + 2g(\eta - l). \qquad (2)$$

En désignant par ξ, η les coordonnées du point mobile à un instant quelconque.

Je mets cette valeur de v dans l'équation (1), qui deviendra :

$$a = \frac{k^2 + 2g\eta - 2gl}{l - s} + g\frac{dy}{ds},$$

ou bien en observant qu'on a $\eta - y = (l - s)\dfrac{dy}{ds}$, d'où

$$\eta = y + (l - s)\frac{dy}{ds},$$

$$a = \frac{k^2 + 2gy + (l - s)\dfrac{dy}{ds} - 2gl}{l - s} + g\frac{dy}{ds},$$

et après quelques réductions,

$$(2gy + as - 3gl)\,ds + 3g(l - s)\,dy = 0. \qquad (3)$$

J'intégrerai d'abord cette équation; je la rendrai homogène en faisant $y = y' + m$; $s = s' + n$, et en posant :

$$2gm + an - 3gl = 0; \quad l - n = 0,$$

d'où $n = l$, $m = \dfrac{(3g - a)l}{2g}$. Elle se changera ainsi dans la suivante :

$$(2gy' + as')\,ds' - 3gs'dy' = 0,$$

qui pourra s'intégrer facilement, car elle est homogène et linéaire.

On aura en désignant par A une constante arbitraire

$$y' = \frac{a}{g}s' + \mathrm{A}\,s'^{\frac{2}{3}}$$

ou $$y-m=\frac{a}{g}(s-l)+A(s-l)^{\frac{2}{3}}.$$

Je détermine la constante A de manière qu'on ait $y=0$ pour $s=0$. J'aurai ainsi :

$$-m=-\frac{a}{g}l+Al^{\frac{2}{3}} \quad \text{ou} \quad -\frac{(3g-a)l}{2g}=-\frac{a}{g}l+Al^{\frac{2}{3}},$$

d'où $$A=\frac{3(a-g)}{2g}l^{\frac{1}{3}}.$$

Ce qui donne enfin :

$$y-m=\frac{a}{g}(s-l)+\frac{3(a-g)}{2g}l^{\frac{1}{3}}(s-l)^{\frac{2}{3}}. \qquad (4)$$

Je déterminerai ensuite la valeur de x en fonction de s; mais pour cela il sera plus commode d'écrire l'équation (4) ainsi :

$$y'=\frac{a}{g}s'+\frac{3(a-g)^{\frac{1}{3}}}{2g}l\,s'^{\frac{2}{3}}.$$

On en tire d'abord :

$$dy'=\left\{\frac{a}{g}+\frac{a-g}{g}\left(\frac{l}{s'}\right)^{\frac{1}{3}}\right\}ds',$$

et comme on a $dy=dy'$; $ds=ds'$ l'équation

$$ds^2=dx^2+dy^2 \text{ deviendra } ds'^2=dx'^2+dy'^2,$$

d'où

$$dx=\sqrt{ds'^2-dx'^2}=\sqrt{1-\left\{\frac{a}{g}+\frac{a-g}{g}\left(\frac{l}{s'}\right)^{\frac{1}{3}}\right\}^2}\,ds'.$$

Je poserai d'abord $\left(\frac{l}{s'}\right)^{\frac{1}{3}}=u$, d'où $s'=\frac{l}{u^3}$; $ds'=-\frac{3l\,du}{u^4}$ et

$$dx=-\sqrt{1-\left(\frac{a}{g}+\frac{a-g}{g}u\right)^2}\,\frac{3l\,du}{u^4}.$$

Il est facile de voir que le second membre pourra s'intégrer sous forme finie.

Je fais d'abord

$$\frac{a}{g}+\frac{a-g}{g}u=v\,,\ \text{d'où}\ \frac{gv-a}{a-g}=u,\quad du=\frac{gdv}{a-g},$$

et je transformerai par là la valeur de dx en

$$dx=-3lg\,(a-g)^3\,\frac{\sqrt{1-v^2}\,dv}{(gv-a)^4}$$

ou
$$dx=-3\,lg\,(a-g)^3\,\frac{(1-v^2)\,dv}{(gv-a)^4\sqrt{1-v^2}}.$$

Ce second membre deviendra rationnel par une transformation connue. On posera :

$$\sqrt{1-v^2}=(1-v)\,z\,,$$

et l'on aura :

$$dx=-3\,lg\,(a-g)^3\,\frac{8z^2\,(z^2+1)\,dz}{\left\{a+g+(a-g)\,z^2\right\}^4}.$$

Enfin j'aurai :

$$dx=-3\,lg\frac{(a-g)^3}{(a+g)^{\frac{5}{2}}}\,\frac{8z^2\,(z^2+1)\,dz}{\left\{1+\dfrac{a-g}{a+g}z^2\right\}^4},$$

et en faisant :

$$\sqrt{\frac{a-g}{a+g}}\,z=t,$$

$$dx=-3\,lg\,\frac{(a-g)^{\frac{1}{2}}}{(a+g)^{\frac{5}{2}}}\,\frac{8t^2\left\{(a+g)\,t^2+a-g\right\}dt}{(1+t^2)^4}.$$

Ce second membre est maintenant facile à intégrer, et l'on trouvera finalement :

$$x=3lg\frac{(a-g)^{\frac{1}{2}}}{(a+g)^{\frac{5}{2}}}\left\{\frac{8(a+g)t^3}{3\,(t+t^2)^3}+\frac{8at}{3(1+t^2)^3}-\frac{2at}{3(1+t^2)^2}-\frac{t}{1+t^2}-arc.tg\,t+\mathrm{A}\right\}.$$

Pour la valeur de t en s on a :

$$t=\sqrt{\frac{(a+g)\,(l-s)^{\frac{1}{3}}-(a-g)\,l^{\frac{1}{3}}}{(a+g)\left\{l^{\frac{1}{3}}-(l-s)^{\frac{1}{3}}\right\}}}.$$

On déterminera la constante A par la condition que l'abcisse x soit nulle pour $s=0$ ou pour $t=\infty$, car $s=0$ rend $t=\infty$; or les quatre premiers termes de la valeur de a s'évanouissent pour $t=\infty$, le suivant se réduit à $\frac{\pi}{2}$; ce qui donne pour la valeur de la constante :

$$A=\frac{3\pi lg}{2}\cdot\frac{(a-g)^{\frac{2}{3}}}{(a+g)^{\frac{5}{3}}}.$$

s augmentant, t diminue, et la valeur de x augmente, ainsi que le cosinus $\frac{dx}{ds}$ jusqu'à ce qu'on ait :

$$s=l\left(1-\left(\frac{a-g}{a}\right)^3\right).$$

Alors la tangente à la courbe est parallèle à l'axe des x, et la valeur de x a atteint son maximum. En même temps la valeur de y décroît constamment ainsi que celle du cosinus $\frac{dy}{ds}$ qui devient alors égal à zéro.

s continuant à croître y continue à décroître, ainsi que le cosinus $\frac{dy}{ds}$, jusqu'à ce que s soit égal à $l\left(1-\left(\frac{a-g}{a+g}\right)^3\right)$, alors $\frac{dy}{ds}=-1$, mais s ne peut croître au delà de cette valeur, car alors $\frac{dy}{ds}$ deviendrait numériquement plus grand que 1, ce qui serait absurde. Quant à la valeur de x, elle décroîtra, et $\frac{dx}{ds}$ repassera par les mêmes valeurs absolues que précédemment, mais il faudra prendre ces valeurs négativement, sans quoi y ne pourrait pas décroître.

Ainsi la courbe s'arrête brusquement au point où sa longueur est $l\left(1-\left(\frac{a-g}{a+g}\right)^3\right)$, et alors son dernier élément est vertical. Elle a aussi un point d'arrêt à l'origine, car si on prend s négativement, $\frac{dy}{ds}$ devient numériquement plus grand que 1, et celle de $\frac{dx}{ds}$ devient imaginaire.

Pour la trajectoire du mobile, ou la développante de la courbe que nous venons de déterminer, elle a pour équations en désignant par ξ, η, ses coordonnées :

$$\xi = x + (l-s)\frac{dx}{ds}\,;\ \eta = y + (l-s)\frac{dy}{ds}.$$

Comme les valeurs de x et de y, de $\frac{dx}{ds}$ et de $\frac{dy}{ds}$, sont connues en fonction de s, on voit qu'elles font connaître ξ et η au moyen du paramètre auxiliaire s, et qu'ainsi on pourra la construire par points de même qu'on a construit sa développée.

Elle a aussi deux points d'arrêt qui répondent aux valeurs $s=0$, $s=l\left(1-\left(\frac{a-g}{a+g}\right)^3\right)$. Au point d'arrêt qui répond à $s=0$ son élément est horizontal, à l'autre point d'arrêt son élément est vertical.

En remplaçant $\frac{dy}{ds}$ par sa valeur dans l'équation (1), et η par sa valeur en fonction de s dans l'équation (2), on aura la valeur de la vitesse en fonction de s, savoir :

$$v^2 = (a-g)\, l^{\frac{1}{3}}\, (l-s)^{\frac{2}{3}} \text{ ou } v = \sqrt{(a-g)\, l^{\frac{1}{3}}}\, (l-s)^{\frac{1}{3}}.$$

Ainsi la vitesse est constamment proportionnelle à la racine cubique du rayon de courbure de la trajectoire. Comme au point d'arrêt de cette trajectoire, le paramètre s n'est pas encore égal à l, le rayon de courbure, ni la vitesse du mobile ne seront nuls ; comme aussi quand le mobile sera arrivé en ce point, le fil auquel il est attaché ne pouvant plus s'enrouler sur la courbe fixe, les lois du mouvement changeront; il ne pourra donc pas être oscillatoire. On voit aussi qu'à partir de cette époque, la tension du fil cessera d'être constante.

On pourra calculer le temps que le fil emploiera à s'enrouler sur un arc donné de la courbe fixe, et par suite le temps que le point mobile emploiera à parcourir l'arc correspondant de sa trajectoire. En effet si on différentie les équations de la trajectoire, on aura :

$$d\xi = (l-s)\, d\frac{dx}{ds}, \quad dy = (l-s)\, d\frac{dy}{ds};$$

d'où

$$d\xi^2 + d\eta^2 = (l-s)^2 \left\{ \left(d\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d\frac{dy}{ds}\right)^2 \right\}.$$

Et si on remarque que

$$\frac{dx}{ds} = \sqrt{1 - \frac{dy^2}{ds^2}}, \quad \text{d'où } d\frac{dx}{ds} = \frac{-\frac{dy}{ds}\, d\frac{dy}{ds}}{\sqrt{1 - \frac{dy^2}{ds^2}}},$$

que

$$\frac{dy}{ds} = \frac{a}{g} - \frac{ag}{g}\left(\frac{l}{l-s}\right)^{\frac{1}{3}} \quad \text{et } d\frac{dy}{ds} = -\frac{a-g}{3g}\, \frac{l^{\frac{1}{3}}}{(l-s)^{\frac{4}{3}}}\, ds,$$

on aura facilement :

$$\sqrt{\frac{d\xi^2}{dt^2} + \frac{d\eta^2}{dt^2}} =$$

$$= \frac{-(a-g)\, l^{\frac{1}{3}}}{3g(l-s)^{\frac{1}{3}} \sqrt{1 - \left\{ \frac{a}{g} - \frac{a-g}{g}\left(\frac{l}{l-s}\right)^{\frac{1}{3}} \right\}}}\, \frac{ds}{dt} = v =$$

$$= \sqrt{(a-g)\, l^{\frac{1}{3}}\, (l-s)^{\frac{1}{3}}};$$

et enfin

$$dt = \frac{\sqrt{(a-g)\,l^{\frac{1}{3}}}\;ds}{3g(l-s)^{\frac{2}{3}}\sqrt{-\left\{\frac{a}{g}-\frac{a-g}{g}\left(\frac{l}{l-s}\right)^{\frac{1}{3}}\right\}^2}}.$$

Et en répétant les mêmes transformations qui ont déjà été employées dans le calcul de la valeur de x, on arrivera à une valeur de dt, qui sera intégrable, et l'intégration faite, on aura :

$$t = \frac{2g\sqrt{l}}{(a+g)^{\frac{3}{2}}}\,\frac{\zeta}{1+\zeta^2} - \frac{2a\sqrt{l}}{(a+g)^{\frac{3}{4}}}\ \text{arc}\ tg\,\zeta + \mathrm{B}.$$

Note. L'Hôpital qui a le premier traité cette question, parvient à cette équation :

$$5ax = (2y - 2\sqrt{ay} - 2a)\sqrt{2a\sqrt{ay} - a^2};$$

x est horizontal, y vertical et a est le poids du point matériel. (*M. de l'Acad.*, 1700, p. 15.)

SOLUTION DE LA QUESTION 125 (p. 376).

PAR M. MENTION,
Élève en spéciales.

—

Soient les équations de deux ellipses rapportées aux mêmes axes :

$$(ax + by)^2 + (a'x + b'y)^2 = c^2\,;\quad (ax + a'y)^2 + (bx + b'y)^2 = c^2.$$

Les aires des ellipses sont égales, et si les axes sont rectangulaires, les ellipses sont égales. (Jacobi.)

Il faut prouver que les produits des axes sont égaux.

Les équations peuvent se mettre sous la forme :

$$(b^2+b'^2)y^2+2xy(ab+a'b')+(a^2+a'^2)x^2-c^2=0,$$
$$(a'^2+b'^2)y^2+2xy(aa'+bb')+(a^2+b^2)x^2-c^2=0.$$

D'après les relations d'identité (p. 489, t. I), on a pour le carré du premier produit :

$$-\frac{4L^2\sin^2\gamma}{m^3}, \text{ et pour le second, } -\frac{4L'^2\sin^2\gamma'}{m'^3}$$

(γ angle des axes,

$m=B^2-4AC$, $L=AE^2-BDE+CD^2+F(B^2-4AC)$ l'équation de la courbe étant :

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0).$$

Or, $\gamma=\gamma'$: donc il faut faire voir que $L=L'$; $m=m'$.

m et L ne variant pas avec l'origine (observation t. I, p. 489), nous pouvons tirer leurs valeurs des équations actuelles, où $D=0$; $E=0$.

$$m=4(a^2b^2+2aa'bb'+a'^2b'^2)-4(a^2b^2+a^2b'^2+a'^2b^2+a'^2b'^2)$$
$$=4(2aa'bb'-a^2b'^2-a'^2b^2)=-4(ab'-ba')^2;$$
$$m'=4(a^2a'^2+2aa'bb'+b^2b'^2)-4(a^2a'^2+a^2b'^2+b^2a'^2+$$
$$+b^2b'^2)$$
$$=4(2aa'bb'-a^2b'^2-b^2a'^2)=-4(ab'-ba')^2.$$

Ainsi $m=m'$.

Mais $L=-c^2m.$; $L'=-c^2m'$; donc aussi $L=L'$.......

Si $\gamma=90°$, je dis que les ellipses sont égales.

Les conditions d'égalité de deux coniques sont (t. I, p. 493) si $m=m'$,

$N^3L'\sin^4\gamma'=N'^3L\sin^4\gamma$, ou puisque $L=L'$, $\sin\gamma=\sin\gamma'$, $N=N'$, mais $N=A+C-B\cos\gamma$ (voir notation p. 489) $=A+C$, puisque $\gamma=90°$, $N'=A'+C'$.

Vérifions donc si $A+C=A'+C'$; en effet,

$A+C=b^2+b'^2+a^2+a'^2$ ... $A'+C'=a'^2+b'^2+a^2+b^2$.

Donc.... c. q. f. d.

ANALOGIES

du cercle et de l'hyperbole équilatère.

PAR ABEL TRANSON.

La perpendiculaire abaissée d'un point quelconque du cercle sur un diamètre est moyenne géométrique entre les deux segments de ce diamètre. La perpendiculaire abaissée d'un point quelconque de l'hyperbole équilatère sur son axe transverse est également une moyenne géométrique entre les deux segments de cet axe. Ainsi les deux courbes se trouvent réunies dans une même définition ; seulement l'ordonnée du cercle est moyenne entre deux segments *additifs* ; celle de l'hyperbole équilatère entre deux segments *soustractifs*.

De là, entre les deux courbes, de nombreuses analogies qui ont fait proposer quelquefois de substituer à la dénomination un peu longue d'hyperbole équilatère celle d'*hypercycle*, ou, par contraction, *hypercle.*

L'hyperbole équilatère, tournant autour de l'un ou l'autre de ses axes, engendre un solide à une nappe ou à deux nappes. L'un et l'autre de ces solides ont aussi avec la sphère des analogies qui autorisent à les désigner sous les noms d'*hypersphéroïde* à une ou à deux nappes. Certaines questions sur la sphère conduisent à des circonstances de calcul dont l'explication exige la connaissance de ces analogies. J'en donnerai un exemple.

Dans ce qui va suivre, j'ai supprimé, pour abréger, la plupart des démonstrations. Je me borne à dire qu'elles dépendent exclusivement des méthodes qui sont admises dans l'enseignement de la géométrie élémentaire.

I. La détermination de l'hyperbole, comme celle du cercle, dépend d'un seul paramètre. C'est le demi-axe transverse que j'appellerai aussi le *rayon.*

II. La tangente au cercle est perpendiculaire à la ligne qui joint le centre au point de contact, et la tangente à l'hypercycle a une direction antiparallèle à cette même perpendiculaire. Pour constater cette analogie, il faut rapporter la situation de ces deux lignes (la tangente à l'hyperbole et la perpendiculaire à la ligne centrale) à l'un des deux axes de la courbe.

III. Dans l'une et l'autre courbe, la distance du centre à une tangente quelconque multipliée par la distance de ce même centre au point de contact correspondant, donne un produit constant (égal au carré du rayon).

IV. Concevons dans l'une ou l'autre courbe un secteur central, c'est-à-dire un secteur formé par un arc de courbe et les deux lignes centrales aboutissant aux deux extrémités de cet arc. Soit R le rayon de la courbe et h la projection de l'arc sur l'axe de la courbe. Si le secteur fait une révolution autour de l'axe, il engendrera un solide, c'est-à-dire un secteur sphérique ou hypersphérique, ayant pour mesure

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 h.$$

Cette expression, bien connue pour le secteur sphérique, est commune aux secteurs de l'hypersphéroïde à une ou à deux nappes. Il faut seulement bien entendre que h est la projection de l'arc sur l'axe de révolution. D'ailleurs la démonstration se fera à l'aide des propositions II et III, et précisément comme pour la sphère.

V. De l'expression ci-dessus du secteur il est facile de déduire la mesure du segment à deux bases parallèles, c'est-à-dire du segment limité par deux plans perpendiculaires à l'axe de révolution.

Je vais donner le calcul de cette déduction pour le solide sphérique.

Soient (x', y') et (x'', y'') les coordonnées des points extrêmes de l'arc entre les deux bases. Le volume du segment sera :

$$W = \frac{2}{3}\pi R^2 h + \frac{1}{2}\pi(x''y''^2 - x'y'^2).$$

Je remplace, dans cette expression,

$$x''y''^2 - x'y'^2 \text{ par } R^2 h - (x''^2 + x'x'' + x'^2)h\,;$$

et en même temps

$$R^2 \text{ par } \frac{x'^2 + y'^2 + x''^2 + y''^2}{2}\,;$$

et il vient immédiatement :

$$W = \pi h \frac{y'^2 + y''^2}{2} + \frac{1}{6}\pi h^3,$$

ce qui est bien l'expression du segment sphérique, c'est-à-dire *la demi-somme de ses bases multipliée par sa hauteur*, PLUS *la solidité de la sphère dont cette même hauteur est le diamètre*.

En appliquant convenablement le même calcul au segment de l'hypersphéroïde à une ou à deux nappes, on trouve qu'un tel segment a pour mesure *la demi-somme de ses bases multipliée par sa hauteur*, MOINS *la solidité de la sphère dont cette même hauteur est le diamètre*.

VI. On sait transformer une sphère en un *ellipsoïde* à axes inégaux en faisant croître proportionnellement les dimensions dans deux directions perpendiculaires. Le volume ou les portions du volume transformé croissent dans des rapports faciles à déterminer ; de sorte que le volume total de l'ellipsoïde, ou le volume d'un segment d'ellipsoïde, peuvent être calculés facilement sans sortir des méthodes élémentaires ; il n'est pas même nécessaire que les deux bases du segment soient perpendiculaires à l'un des axes de la surface : il suffit qu'ils soient parallèles.

Semblablement, on pourra, sans recourir aux méthodes du calcul infinitésimal, construire le volume d'un segment à deux bases parallèles dans l'*hyperboloïde* quelconque à une ou deux nappes.

VII. Pour montrer, par un exemple simple, l'utilité de ces analogies, je supposerai qu'on ait à résoudre ce problème de géométrie élémentaire.

Problème. « Retrancher d'une sphère donnée un segment » à une seule base qui soit au cylindre de même base et de » même hauteur dans le rapport de m à 1. »

Si R est le rayon de la sphère, y_1 le rayon de base du segment cherché, et h sa hauteur, l'équation immédiate de la question est

$$\pi \frac{y_1^2}{2} h + \frac{1}{6} \pi h^3 = m\pi y_1^2 h,$$

d'où on déduit :

$$h = \frac{3(2m-1)}{3m-1} \text{R}.$$

La possibilité de la question semble exiger que cette valeur de h soit positive, et pour cela m doit être moindre que $\frac{1}{3}$, ou plus grand que $\frac{1}{2}$.

Cependant si le rapport m recevait une valeur intermédiaire aux fractions $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{2}$, la valeur négative de h donnée par la formule précédente serait la hauteur du segment d'*hypersphéroïde* (à deux nappes) qui satisferait à la question.

Note. Les fonctions relatives à l'*hyperbole équilatère* se présentent dans beaucoup de questions de physique et d'astronomie, et sont devenues d'une application numérique facile, grâces aux récents travaux de M. Gudermann sur les *fonctions potentielles*. C'est le nom que cet auteur donne aux lignes trigonométriques circulaires et hyperboliques. Il désigne les premières par des lettres latines, et les dernières par des lettres initiales gothiques. Soit $u^x = \mathrm{P} + \mathrm{Q}$; $u^{-x} = \mathrm{P} - \mathrm{Q}$; u étant une base, alors P et Q sont des *fonctions potentielles* de x, et $\mathrm{P} = \mathfrak{Cos}\, x$; $\mathrm{Q} = \mathfrak{Sin}\, x$; $\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{P}} = \mathfrak{Tang}.\, x$. Si $u = e$, alors

$$\mathfrak{Cos}\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}\,;\ \mathfrak{Sin}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2};\ \text{et si } x = xi = x\sqrt{-1},$$

alors $\mathfrak{Cos}\, ix = \cos x$, et réciproquement $\cos ix = \mathfrak{Cos}\, x$. M. Gudermann a calculé des tables, insérées dans le Journal de Crell (du tome VII au tome XI), pour toutes les fonctions trigonométriques hypercirculaires. Sans doute qu'on publiera un jour ces tables à part. Huyghens avait proposé de nommer les courbes exponentielles *hypertranscendantes*, et Jean Bernoulli, premier auteur de tout ce que nous savons sur les exponentielles, lui demande pourquoi *hyper* plutôt que *hypo* (*Op. omnia*, t. I, p. 180)? de même pourquoi l'hyperbole équilatère serait-elle un hypercycle plutôt qu'un hypocycle ? Il est vrai que la contraction *hypercle* convient aux deux locutions; d'ailleurs ces courbes appartiennent à la grande famille des courbes binômes $y^m \pm x^m = a^m$, que M. Lamé a étudiées dans son excellent opuscule sur les *méthodes*, et lorsque m est pair, les deux signes donnent, le positif une courbe finie, et le négatif une courbe infinie, entre lesquelles existent des analogies fondées sur la théorie des imaginaires; lorsque m est impair, les deux signes donnent la même courbe, à la position près. Tm.

SUR L'ENVELOPPE

des perpendiculaires aux extrémités des diamètres des ellipses

(*Voir* p. 365).

PAR M. AYNARD,
Professeur de mathématiques.

Parmi les courbes nombreuses que l'on peut déduire de l'ellipse par des constructions fort simples, il en est quelques-unes qui méritent une étude spéciale, soit pour les propriétés curieuses dont elles jouissent intrinsèquement, soit pour leur utilité pratique dans la solution de quelques questions importantes. Cette remarque s'applique également bien à toute autre courbe, pourvu qu'elle soit suffisamment connue; et quoique la multiplicité des lieux géométriques que l'on peut tirer d'une même courbe primitive soit indéfinie, une critique judicieuse parvient facilement à discerner ceux qui peuvent être l'objet d'un travail utile.

Si l'on considère une ellipse, et que par tous les points de cette courbe l'on mène des perpendiculaires sur les diamètres correspondants, les intersections successives de ces perpendiculaires déterminent un lieu géométrique qui mérite d'être étudié. Les arcs de la courbe en question jouissent de la propriété remarquable de pouvoir représenter des fonctions elliptiques de première espèce, à module quelconque. Ce résultat, publié par Legendre dans son *Traité des fonctions elliptiques*, était connu antérieurement, et M. Talbot, membre de la Société philosophique de Cambridge, l'avait indiqué dès 1821 dans les anciennes *Annales de Mathématiques* de M. Gergonne, t. XIV, p. 380-381. L'étude des diverses formes dont cette courbe est susceptible est de nature à mériter quelque attention.

Soit
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

l'équation de l'ellipse. Si l'on observe qu'en vertu de la relation connue $\cos^2\varphi+\sin^2\varphi=1$, l'équation étant vérifiée d'elle-même, lorsqu'on remplace x par $a\cos\varphi$ et y par $b\sin\varphi$, on pourra dire que

$$x=a\cos\varphi,\qquad y=b\sin\varphi$$

sont les coordonnées d'un point quelconque M′ de l'ellipse (*fig.* 50). L'équation de la perpendiculaire M′N menée sur le rayon OM′ sera par conséquent :

$$y-b\sin\varphi=-\frac{a\cos\varphi}{b\sin\varphi}(x-a\cos\varphi),$$

ou, sous une forme plus symétrique,

$$by\sin\varphi+ax\cos\varphi-b^2\sin^2\varphi-a^2\cos^2\varphi=0. \qquad (1)$$

D'après la théorie connue des enveloppées (*), la seconde équation du problème s'obtiendra en formant la dérivée de la première par rapport à φ. Ce sera donc :

$$by\cos\varphi-ax\sin\varphi-2b^2\cos\varphi\sin\varphi+2a^2\sin\varphi\cos\varphi=0. \qquad (2)$$

L'élimination de l'angle φ qui figure dans les équations (1) et (2) comme paramètre variable, conduirait à l'équation du lieu. Mais comme cette opération serait laborieuse, et que l'équation finale en x et y serait du sixième degré (p. 367),

---

(*) Si l'on veut éviter cette considération et l'emploi du calcul différentiel, on changera φ en $\varphi+h$ dans l'équation (1), on retranchera l'équation (1) du résultat, et l'on passera à la limite après avoir préalablement divisé par h. C'est là un artifice que l'usage des coordonnées polaires rend très-familier, et qui est à l'abri de toute objection logique.

et par conséquent peu commode à discuter, il sera plus simple de dégager les valeurs des deux coordonnées en fonction de l'indéterminée auxiliaire φ prise pour variable indépendante. Appliquons donc aux équations dont il s'agit la méthode des multiplicateurs, et ajoutons à cet effet le produit de l'équation (1) par *sin* φ à l'équation (2) préalablement multipliée par *cos* φ ; il vient :

$$by = b^2\sin^3\varphi + a^2\cos^2\varphi\sin\varphi + 2b^2\sin\varphi\cos^2\varphi - 2a^2\cos^2\varphi\sin\varphi$$

ou, toute réduction faite, en posant comme on le fait souvent $c = \sqrt{a^2 - b^2}$,

$$y = \frac{c^2\sin^3\varphi + (2b^2 - a^2)\sin\varphi}{b}. \qquad (\alpha)$$

Pour dégager x on multipliera l'équation (1) par $\cos\varphi$ et la seconde par $-\sin\varphi$, en sorte qu'il vient en ajoutant :

$$ax = b^2\sin^2\varphi\cos\varphi + a^2\cos^3\varphi - 2b^2\sin^2\varphi\cos\varphi + 2a^2\sin^2\varphi\cos\varphi,$$

d'où enfin,

$$x = \frac{-c^2\cos^3\varphi + (2a^2 - b^2)\cos\varphi}{a}, \qquad (\beta)$$

formule que des motifs de symétrie eussent suffisamment indiquée (*).

Il sera facile, à l'aide des expressions (α) et (β), de discuter la courbe en suivant les variations de l'abscisse et de l'ordonnée qui répondent aux divers états de grandeur que l'on peut assigner à l'angle φ. La valeur de y est nulle pour $\varphi = 0$,

(*) Les formules que Legendre considère sont les suivantes :

$$x = \frac{\sin\varphi}{b^2}(1 - 2c^2 + c^2\sin^2\varphi); \qquad y = \frac{\cos\varphi}{b}(1 + c^2\sin^2\varphi).$$

On voit qu'elles rentrent dans les expressions des coordonnées du problème actuel. Le demi-grand axe est dirigé sur l'axe des y, et a pour valeur $\frac{1}{b}$, tandis que le demi-petit axe compté sur l'axe des abscisses est égal à l'unité. (*Traité des fonctions elliptiques*, ch. VII.)

et en même temps l'on a $x = a$, en sorte que la courbe passe par l'extrémité du grand axe de l'ellipse sur laquelles les constructions s'opèrent. On pouvait prévoir cette conclusion, puisque la rencontre de la tangente au sommet avec la perpendiculaire menée sur un rayon fort rapproché de OA (*fig.* 50) doit nécessairement déterminer un point du lieu très-voisin du sommet; l'équation, par une raison de continuité, devra donc fournir le sommet lui-même.

On ne peut, lorsque l'on assigne à l'angle φ des valeurs croissantes comprises entre zéro et $\frac{\pi}{2}$, préciser le sens dans lequel varient les expressions des deux coordonnées, qu'en tant que l'on spécifiera le signe de la quantité $(2b^2 - a^2)$, coefficient de $\sin\varphi$ dans la valeur de l'ordonnée. Cette distinction nécessaire donnera évidemment lieu à trois hypothèses différentes, suivant que l'on aura $2b^2 - a^2 \gtreqless 0$. Écartons d'abord les deux dernières suppositions : nous verrons plus tard les modifications qui en résultent dans la configuration générale de la courbe.

En supposant donc que φ augmente depuis zéro jusqu'à $\frac{\pi}{2}$, la valeur de y composée de deux quantités qui croissent et s'ajoutent va sans cesse en augmentant, en sorte que le point décrivant s'élève constamment au-dessus de l'axe des abscisses. Mais la valeur de x est douteuse : les deux quantités qui la composent sont de signe contraire, et chacune d'elles diminue; on ne peut donc décider si la courbe s'éloigne ou se rapproche de l'axe des ordonnées. Pour obtenir un renseignement précis, je cherche quelle est la valeur de φ à laquelle répond le maximum ou le minimum de la quantité $\cos\varphi\,[(2a^2 - b^2) - c^2\cos^2\varphi]$. On peut multiplier par le facteur constant c et mettre l'expression sous la forme équivalente

$(c^2\cos^2\varphi)^{\frac{1}{2}}[2a^2 - b^2 - c^2\cos^2\varphi]$. Grâce à cette préparation, la somme des deux facteurs est constante dans ce produit, et d'après un théorème connu (*), le maximum, s'il existe, sera déterminé par l'équation

$$2c^2\cos^2\varphi = 2a^2 - b^2 - c^2\cos^2\varphi\ ;$$

d'où, en résolvant,

$$\cos\varphi = \sqrt{\frac{2a^2 - b^2}{3c^2}}.$$

Outre la condition de réalité qui est toujours remplie, puisque l'on a dans tous les cas $2a^2 - b^2 > 0$, on doit encore avoir $\frac{2a^2 - b^2}{3c^2} < 1$, condition qui revient à $2a^2 - b^2 < 3a^2 - 3b^2$, ou enfin $2b^2 - a^2 < 0$. Comme nous avons supposé le contraire, il n'y a pas de maximum, en sorte que le point décrivant, s'élevant au-dessus de l'axe des abscisses, se rapproche incessamment de l'axe des ordonnées. Enfin, lorsque l'on suppose $\varphi = \frac{\pi}{2}$, l'on a $x = 0$ et $y = b$, et la courbe passe à l'extrémité du petit axe.

Pour des valeurs de l'angle φ comprises entre $\frac{\pi}{2}$ et π, l'ordonnée repasse par les mêmes valeurs, et l'abscisse ne fait que changer de signe ; d'où il suit que la branche de courbe qui s'étend à gauche de l'axe des y n'est que la répétition exacte de celle qui s'étend de A en B. De plus, comme le changement de φ en $2\pi - \varphi$ dans les équations (α) et (β)

(*) En voici l'énoncé : « Un produit $x^m y^n z^p$.... dans lequel m, n, p.... sont des » nombres entiers ou fractionnaires, et dans lequel la somme des facteurs est » constante, atteint son maximum lorsque l'on a $\frac{x}{m} = \frac{y}{n} = \frac{z}{p}$.... » L'application de ce théorème fort simple, est souvent plus courte que la methode générale qu exige la formation et l'annulation de la dérivée première, sans que l'on puisse quelquefois se dispenser de consulter les dérivées des ordres supérieurs. (*Voir* t. III, p. 165.)

n'influe pas sur la valeur de x et fait changer le signe de y sans en modifier la valeur, le lieu est symétrique par rapport à l'axe des abscisses. Cette double symétrie fait prévoir que si l'on avait éliminé φ entre les équations (α) et (β), l'équation finale $f(x, y) = 0$ n'aurait contenu que des puissances paires des deux variables. D'après l'ensemble de cette discussion sommaire, si l'on attribue à la courbe la forme la plus simple compatible avec les renseignements obtenus, elle aura, comme dans la fig. 51, beaucoup de ressemblance avec l'ellipse ; mais ce tracé grossier a besoin d'être justifié. Consultons à cet effet le coefficient angulaire de la tangente, dont la formation ne saurait offrir aucune difficulté. En différentiant les expressions (α) et (β), il vient :

$$dy = \frac{3c^2\sin^2\varphi\cos\varphi + (2b^2 - a^2)\cos\varphi}{b}\,d\varphi,$$

$$dx = \frac{3c^2\cos^2\varphi\sin\varphi - (2a^2 - b^2)\sin\varphi}{a}\,d\varphi;$$

et par suite,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a\,(3c^2\sin^2\varphi + 2b^2 - a^2)\cos\varphi}{b\,(3c^2\cos^2\varphi + b^2 - 2a^2)\sin\varphi}.$$

Il est aisé de constater que les points A et A', B et B' sont des sommets, puisque les hypothèses $\varphi = 0$ et $\varphi = \pi$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ et $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ rendent en ces points l'expression ci-dessus désignée infinie ou nulle.

Il ne reste plus, pour réduire la discussion à ce qu'elle a vraiment d'essentiel, que de préciser si la courbe est intérieure ou extérieure à l'ellipse, ou tantôt l'un tantôt l'autre. Or, on sait qu'une courbe de l'ordre m ne peut avoir, avec une courbe de l'ordre n, plus de mn points communs ; et comme dans l'énumération de ces points les points de tangence comptent naturellement pour deux, la courbe, si elle coupe l'ellipse, ne peut depuis A jusqu'en B la rencontrer qu'une seule fois ; deux points d'intersection dans cet intervalle exigeraient, d'après la double symétrie des courbes, seize points communs, ce qui est incompatible avec leurs degrés respectifs. Il suffira donc de décider quelle est, en des points fort rapprochés des deux sommets, la position relative des deux courbes. Considérons à cet effet un point fort voisin de A : il correspondra à une valeur de φ que l'on pourra supposer assez petite pour négliger les puissances de φ supérieures à la seconde. D'après cette restriction, les séries qui servent à développer le sinus et le cosinus suivant les puissances de l'arc fourniront immédiatement :

$$\sin\varphi = \varphi, \qquad \cos\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2},$$

et les valeurs des coordonnées de la courbe qui répondent à ce point sont, toute réduction faite :

$$y = \frac{(2b^2 - a^2)\varphi}{b} \ldots\ldots(\gamma), \qquad x = \frac{a^2 + \frac{\varphi^2}{2}(a^2 - 2b^2)}{a} \ldots\ldots(\delta).$$

Mais les points extérieurs ou intérieurs à l'ellipse sont, d'après la théorie spéciale de cette courbe, caractérisés par la condition

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \gtrless 1,$$

qui revient dans le cas actuel, après avoir formé, d'après les valeurs (γ) et (δ) de x et de y, les quantités $\frac{x^2}{a^2}$ et $\frac{y^2}{b^2}$, à l'inégalité suivante :

$$\varphi^2\left(\frac{(2b^2 - a^2)^2}{b^4} + \frac{\varphi^2(a^2 - 2b^2)^2}{a^4} + \frac{a^2 - b^2}{a^2}\right) \gtrless 0,$$

ou, en négligeant le terme en φ^4 et divisant par φ^2 :

$$(a^2 - 2b^2)\cdot(a^2 - 2b^2)^2 \gtrless 0.$$

Comme on a supposé en commençant que la quantité $2b^2 - a^2$ était positive, le premier membre de l'inégalité précédente est toujours négatif, ce qui montre que, dans le voisinage du point A, la courbe est intérieure à l'ellipse; on vérifierait facilement qu'il en est de même dans le voisinage de l'autre sommet B. L'étude du rayon de courbure eût fourni les mêmes résultats; en différentiant une fois de plus les valeurs de x et de y, on l'aurait obtenu sans peine d'après la formule connue $r = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dxdy^2 - dyd^2x}$; mais la longueur des calculs rendait préférable ici l'emploi d'un artifice peu détourné. Enfin, comme de A jusqu'en B, c'est-à-dire depuis $\varphi = 0$ jusqu'à $\varphi = \frac{\pi}{2}$, le coefficient angulaire de la tangente va sans cesse en décroissant, la courbe est exempte de sinuosités, ce qui confirme la forme du quart de courbe AKB (*fig.* 51).

(*La fin prochainement.*)

SOLUTION DU PROBLÈME 100 (t. IV, p. 370),

PAR M. DROUETS,
Elève au Collége royal militaire.

—

Soit un arc continu sans points singuliers et sa corde; si l'on joint le point de l'axe où la tangente est parallèle à la corde aux deux extrémités de la corde, on forme un triangle dont l'aire est plus grande que la moitié de l'aire du segment (*fig.* 49).

Je prends pour axes OA et OY; soient $y = F(x)$ l'équation de la courbe, a la longueur OA, on a $F(0) = 0$; $F(a) = 0$. Soit y_1 l'ordonnée du point m' où la tangente est parallèle à la corde, l'aire du triangle sera $\frac{1}{2}ay_1$. Au lieu de la comparer au demi-segment, je comparerai ay_1 à S aire du segment.

Or $S = \int_0^a Fxdx$, c'est-à-dire la somme des valeurs du produit $Fxdx$ par des valeurs de x infiniment rapprochées entre 0 et a. Soient α, α_1, α_2 ..... α_n les accroissements successifs de l'abscisse depuis 0, de manière que

$$\alpha + \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots . \alpha_n = a,$$

on aura pour le triangle,

$$\alpha y_1 + \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y' + \quad + \alpha_n y_1 \ldots\ldots;$$

pour le segment :

$$\alpha F(0) + \alpha_1 F\alpha_1 + \alpha_2 F(\alpha + \alpha_1) + \quad + \alpha_n F(\alpha + \alpha_1 + + \alpha_n).$$

Ces deux expressions ont le même nombre de termes ; toutes les valeurs $F\alpha_1 \ldots F(\alpha + \alpha' + \ldots)$ sont moindres que y_1 ; donc $S < ay_1$, c'est-à-dire que le triangle est plus grand que la moitié du segment.

J'ai dit que y_1 était la plus grande valeur de y ; en effet, s'il y avait une autre valeur maximum pour m'' par exemple, le point m' en est un par hypothèse, la courbe aurait deux points d'inflexion entre m' et m'', ce qui est contraire à la condition que la courbe n'a pas de points singuliers.

SOLUTION DU PROBLÈME 115 (t. V, p. 167),

PAR M. C. DROUETS,
élève du collége royal militaire de La Flèche.

Étant donnés dans le même plan deux cercles et un point fixe, mener deux tangentes parallèles telles que le rapport des distances du point aux deux tangentes soit un rapport donné $\frac{m}{n}$; par la géométrie élémentaire et par l'analyse quand les deux cercles sont remplacés par des coniques.

Soient C, C' les deux centres, R.... R' les rayons, A le point fixe, mT, m'T' les deux tangentes. Par le point A je conçois une parallèle commune qui coupe la droite mm' des points de contact en O, dans le rapport donné; puis à ce point une parallèle aux rayons Cm, C'm', c'est-à-dire une perpendiculaire à AD ; elle rencontre CC' en I, et divise cette longueur dans le rapport donné ; ainsi on connaît de position et de grandeur le diamètre AI d'une circonférence qui doit contenir le point O; mais dans le trapèze CmC'm', la ligne IR, parallèle aux bases, est une fonction des bases R, R' et du rapport dans lequel le point I divise CC' ;

$$IR = \frac{Rm + R'n}{m + n};$$

donc IO est connu, et par suite le point R ; IR donne la direction des rayons de contact; il existe en dehors de la ligne CC' un point analogue à I, qui donnera aussi deux solutions de la question. Cette solution est particulière au cercle : en *voici une plus générale, facilement applicable aux coniques.* Je conçois le point A comme centre de similitude de la courbe C et d'une seconde D, dont le rapport de similitude à C serait le rapport donné $\frac{m}{n}$; ces deux courbes auraient *alors les tangentes (correspondantes* à un même rayon vecteur) parallèles et à des distances du centre de similitude dont le rapport serait $\frac{m}{n}$; la question reviendrait donc à mener une tangente commune aux courbes D et C'.

Cette dernière construction pourra être ramenée à l'intersection de deux coniques au moyen des polaires réciproques; mais le cas le plus favorable serait celui où les coniques D et C′ auraient un foyer commun; alors le problème se réduirait à l'intersection de deux cercles, qui seraient les polaires réciproques des deux coniques par rapport à un cercle directeur ayant pour centre le foyer commun.

Par rapport au point A, on aura deux courbes semblables à C; chacune d'elles pourra donner quatre tangentes communes avec C; il y aurait alors huit solutions.

Analyse.

Je prends pour axes de coordonnées deux droites rectangulaires passant par le point A. Soient

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0,$$
$$ay^2 + bxy + cx^2 + dy + ex + f = 0,$$

les équations des deux coniques; $y = mx + n$ celles des $y = mx + n'$ deux tangentes parallèles, leurs distances au point A sont : $\dfrac{n}{\sqrt{1+m^2}}$: $\dfrac{n'}{\sqrt{1+m^2}}$; k étant leur rapport, il faut que $n' = nk$. Je vais exprimer que $y = mx + n$ touche la première conique, $ky = mx + nk$ touche la seconde; j'aurai deux équations entre m et n, ce qui déterminera ces deux inconnues. Ces équations sont (Voir t. II, p. 108) :

$$(B^2 - 4AC)\,n^2 + (D^2 - 4AF)m^2 + (E^2 - 4CF) +$$
$$+ 2(2AE - BD)mn - 2(2CD - BE)n + 2(DE - 2BF)m = 0;$$
$$(b^2 - 4ac)\,n^2k^2 + (d^2 - 4af)\,m^2 + (e^2 - 4cf) +$$
$$+ 2(2ae - bd)\,mnk - 2(2cd - be)\,nk + 2\,(de - 2bf)m = 0.$$

L'élimination de m donnera généralement en n une équation du quatrième degré, ce qui déterminera les points B, B′ où les deux tangentes vont couper l'axe de y; or, par chacun de ces points on peut mener deux tangentes; il y aura donc généralement huit solutions.

NOTE

Sur les équations du premier degré en nombre plus grand que celui des inconnues; applications géométriques.

—

PROBLÈME I. Soient n équations entre n inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_n$; représentons par $a_p^{(q)}$ le coefficient de l'inconnue x_p dans l'équation de quantième q; de sorte que (q) n'est pas ici un indice exponentiel, mais un indice local, désignant le nombre d'accents à mettre sur la lettre; $c^{(q)}$ est la quantité toute connue placée dans le second membre de l'équation de quantième q. Toutes ces inconnues ont un dénominateur commun que nous désignerons par $[a_1 a_2 \ldots a_n]$; cette fonction remarquable, dont nous devons la connaissance à Cramer, nommée *résultante* par Laplace, a reçu, dans ces derniers temps, le nom plus expressif de *déterminante* ou simplement le *déterminant*, parce que dans une foule de circonstances, analytiques et géométriques, cette fonction détermine certaines conditions. Aucun de nos traités classiques n'indique la formation *à priori* de cette fonction qu'on rencontre à chaque instant; négligence absurde. Aussi aucun de nos élèves ne sait développer ni combinaison ni permutation. Nous avons indiqué cette règle de formation (t. I, p. 127).

PROBLÈME II. On a, comme l'on sait :

$$x_n = \frac{[a_1^{(1)} \ldots a_{n-1}^{(n-1)} c^{(n)}]}{[a_1^{(1)} \ldots a_n^{(n)}]};$$

si x_n doit être nul, il faut que l'on ait $[a_1 \ldots a_{n-1} c^{(n)}] = 0$; telle est donc aussi l'équation de condition pour que n équations entre $n-1$ inconnues puissent subsister simultanément.

Si l'on doit avoir à la fois $x_n = x_{n-1} = 0$, il faut qu'on ait :

$$[a_1^{(1)} a_2^{(2)} . . a_{n-1}^{(n-1)} c_n] = 0 ;$$

$$[a_1^{(1)} a_2^{(2)} . . . a_{n-3}^{(n-3)} . . . a_{n-1}^{(n-1)} c_{n-2}] = 0 ;$$

telles sont donc les deux équations de condition pour que n équations entre $n-2$ inconnues puissent être satisfaites par les mêmes valeurs, et ainsi de suite.

Problème III. Quelles sont les conditions pour que n droites situées dans un plan, passent par le même point?

Solution. Soient :

$$a'_1 x_1 + a'_2 x_2 = c' ; \quad a''_1 x_1 + a''_2 x_2 = c_2 ; . . \; . . a'^{(n)}_1 x_1 + a^{(n)}_2 x_2 = c_n$$

les n équations des droites ; x_1, x_2 étant les coordonnées courantes, on a n équations entre deux inconnues ; il faut donc $n-2$ équations de condition ; savoir :

$$[a_1^{(1)} . . . . a_{n-1}^{(n-1)} c_n] = 0 ; \text{ etc ;}$$

et dans ces équations les coefficients

$$a_3^{(1)},\ a_4^{(1)} . . . . a_3^{(2)},\ a_4^{(2)},\ \text{etc.},$$

étant arbitraires, mais pas nuls, après la formation de la déterminante, on égalera ces coefficients à l'unité.

Exemple : $n = 3$; on a :

$$a_1' a_2'' c_3 - a_1' c_2 a_3''' - a_2' a_1'' c_3 + a_2' c_2 a_1''' + c_1 a_1'' a_2''' - c_1 a_2'' a_1''' = 0.$$

Lorsque les équations ont cette forme :

$$y = ax + b ; \quad y = a'x + b' ; \quad y = a''x + b'',$$

il faut faire $a_1' = a_1'' = a_1''' = 1$,

$$a_2' = -a ; \quad a_2'' = -a' ; \quad a_2''' = -a'' ; \quad c_1 = b ; \quad c_2 = b' ; \quad c_3 = b'',$$

et l'on a pour équation de condition :

$$[ab'] + [a'b''] + [a''b] = 0 \quad \text{ou} \quad [ab'] = ab' - a'b, \text{ etc.}$$

Problème IV. Quelles sont les conditions pour que n droites situées dans l'espace passent par le même point ?

Solution. Soient :

$$a_1'x_1 + a_2'x_2 + a_3'x_3 = c_1\,; \quad a_1''x_1 + a_2''x_2 + a_3''x_3 = c'_2,$$

les équations de la première droite, où x_1, x_2, x_3, sont les coordonnées courantes, et l'on a encore $2n-2$ équations analogues pour les $n-1$ autres droites ; ainsi en tout $2n$ équations entre 3 inconnues ; ce qui exige $2n-3$ équations de conditions.

Exemple : $n=2$; on forme la déterminante $[a_1'a_2''a_3'''a_4^{IV}]$, dans laquelle on remplace a_4' par c_1, a_4'' par c_2, a_4''' par c_3, et a_4^{IV} par c_4, et on égale le résultat, contenant vingt-quatre termes, à zéro.

Ou :

$$c_4[a_1'a_2''a_3''']-c_3[a_1'a_2''a_3^{IV}]+c_2[a_1'a_2'''a_3^{IV}]-c_1[a_1''a_2'''a_3^{IV}]=0\,;$$

$[a_1'a_2'a_3''']$ désigne une déterminante, où la première lettre de chaque terme porte un accent, la seconde deux accents, la troisième trois accents, et ainsi des autres.

Observation. Cette équation de condition est aussi celle qui existe lorsque quatre plans passent par le même point.

Observation. On a donné ici l'équation d'une droite dans l'espace, par l'intersection de deux plans rencontrant chacun les axes coordonnés ; mais ordinairement chacun de ces plans est parallèle à un des axes ; alors plusieurs coefficients deviennent nuls ; ainsi l'on a :

$$a_3'=0\,; \quad a_3'''=0, \quad a_2''=0\,; \quad a_2^{IV}=0\,;$$

les vingt-quatre termes se réduisant à huit termes, il vient :

$$c_4[-a_1'a_3''a_2'''+a_2'a_3''a_1''']-c_3[a_2'a_3''a_1^{IV}-a_2'a_1''a_3^{IV}]$$
$$+c_2[a_1'a_2'''a_3^{IV}-a_2'a_1'''a_3^{IV}]-c_1[a_1''a_2'''a_3^{IV}-a_3''a_2'''a_1^{IV}]=0.$$

Si l'on fait $a_1'=a_1''=a_1'''=a_1^{IV}$, ce qui est permis, alors l'équation de condition devient :

$$c_4[a_1'a_3''-a_1''a_2''']+c_3[a_2'a_3^{IV}-a_1''a_2']+c_2[a_2'''a_1^{IV}-a_3^{IV}a_2']+$$
$$+c_1[a_1'''a_3''-a_3^{IV}a_2''']=0.$$

Exemple : $n=3$; il y a trois équations de condition.

Remarque. Les premiers travaux sur les *déterminants* sont de Vandermonde, et après lui presque tous les grands analystes s'en sont occupés, et M. Cauchy considérablement et à diverses reprises, de nos jours. Il serait instructif de réunir tous les théorèmes *réellement* différents de l'illustre académicien. On lira aussi avec fruit ce que M. Catalan a récemment publié dans les mémoires de l'Académie de Bruxelles : aux propriétés analytiques des déterminants correspondent des théorèmes géométriques de *collinéation*, de droites qui passent par le même point, de plans qui passent par la même droite, et aussi par le même point. En général la géométrie est dans l'analyse et *vice versâ*, et c'est dans la science du *nombre* qu'on peut dire avec Jacotot : *Tout est dans tout.*

Problème V. Si l'on a $n+m$ equations du premier degré entre n inconnues, il faut m équations de condition entre les coefficients, et si elles ne subsistent pas, on ne pourra par aucun système de valeurs des inconnues satisfaire aux équations. Supposons que dans chacune de ces équations on ait fait passer la quantité connue dans le premier membre ; prenons n quelconques de ces équations ; elles suffisent, généralement parlant, pour déterminer les n inconnues ; en substituant ces valeurs dans les m équations restantes, on n'obtiendra pas de résultats nuls, résultats qu'on nomme les *erreurs*. Si l'on avait pris un autre système de n équations, on aurait eu d'autres *erreurs*. La question est donc de trouver pour les n inconnues des valeurs telles que la somme des erreurs soit la moindre possible ; et comme l'erreur $-e$ doit être réputée aussi grande que l'erreur $+e$, il faut s'attacher à ce que la somme d'une fonction symétrique *paire* des erreurs soit au minimum. Par le calcul des probabilités, on prouve que cette fonction est la somme des carrés ; ainsi, considérant les premiers membres comme représentant l'expression analytique des erreurs, on fait la somme des carrés de ces premiers membres et d'après la théorie du maximum ; on égale à zéro, les dérivées de cette somme, prises successivement par rapport aux n inconnues ; ce qui fournit n équations du premier degré entre ces inconnues, qui déterminent ces inconnues ; substituant ces valeurs dans les $n+m$ équations, on obtient $n+m$ résultats, dont la somme des carrés est moindre que si on avait adopté un autre système.

PROBLÈME VI. Mener une droite par trois points donnés.

Solution. Il s'agit de trouver les valeurs de a et de b qui satisfont aux trois équations :

$$ax'-b-y'=0; \quad ax''-b-y''=0, \quad ax'''-b-y'''=0;$$

et supposons que l'équation de condition n'existe pas ; alors pour avoir la valeur de a et de b, on forme la fonction :

$$(ax'-b-y')^2+(ax''-b-y'')^2+(ax'''-b-y''')^2;$$

et égalant à zéro les dérivés par rapport à a et b, il vient :

$$a(x'^2+x''^2+x'''^2)-b(x'+x''+x''')=x'y'+x''y''+x'''y''';$$
$$a(x'+x''+x''')-3b=y'+y''+y''';$$

les valeurs de a et b mises dans l'équation

$$y=ax+b,$$

donnent la droite de *moindre erreur*.

Il en est de même, si on voulait trouver un cercle passant par plus de trois points ; mais ce problème n'est pas identique, comme on pourrait le croire, avec celui que M. Lionnet a résolu (p. 449).

7. En appliquant la méthode des *moindres carrés* à n équations à n inconnues, on doit trouver les mêmes valeurs que donne la résolution directe. Au système donné, on peut donc substituer *à priori* un autre système de n équations à n inconnues et ayant les mêmes valeurs; ce qui fournit d'intéressantes relations d'identité entre les déterminantes.

8. La méthode des *moindres carrés*, d'une si grande importance en physique expérimentale, a été découverte et publiée pour la première fois par Legendre en 1805.

M. Gauss l'avait trouvée aussi de son côté en 1795.

C'est M. Bienaymé (Jules) qui en a donné le premier une démonstration rigoureuse. (*Savants étrangers*, t. V, p. 513, 1838.)

QUESTIONS.

131. O étant le centre d'une ellipse, OA, OB deux demi-diamètres conjugués donnés de grandeur et de direction, construisez le parallélogramme OACB.

Si du centre O vous menez à volonté OA' qui rencontre AC en A'; par le point A' une parallèle à la diagonale CO qui rencontre OA en C', puis par ce dernier point une parallèle à la seconde diagonale AB, le point B' où elle rencontre CB est sur la direction du diamètre conjugué à OA'.

(*Breton de Champ.*)

132. Faire passer, par cinq points donnés dans l'espace, un cylindre droit à base circulaire.

133. On nomme *points conjugués* d'une ellipse, les extrémités de deux diamètres conjugués: 1° la somme des carrés des normales par rapport au même axe de deux points conjugués est constante;

2° La somme des carrés des quatre rayons vecteurs est constante ;

3° L'on a $(a-r)^2+(a-r')^2=c^2$; r, r' rayons vecteurs conjugués issus d'un même foyer ; $a=\frac{1}{2}$ grand axe ; $c=$ excentricité. (*G. Ritt.*)

ANNONCES.

Rectification relative à la strophoïde (p. 470).

M. Ritt, auquel nous devons la communication de ce mémoire, nous écrit que c'est M. Montucci, docteur de l'Académie de Sienne, qui en est l'auteur.

PARTIE GÉOMÉTRIQUE DE L'ALGÈBRE

DE

Abou Abdallah Mohammed ben Moussa (*al Khowarezmi*),

PAR M. ARISTIDE MARRE.

L'ouvrage de *Mohammed ben Moussa*, auquel, ne fût-ce que par reconnaissance, étaient si légitimement dus les honneurs de l'impression, est resté manuscrit et depuis trois siècles dans l'oubli, quand pour la première fois, en 1831, M. *Rosen* l'a publié en arabe et en anglais. M. *Libri* vient aussi de reproduire, dans le 1er volume de son *Histoire des sciences en Italie*, l'une des traductions latines que l'on conservait à la bibliothèque royale. Celle-ci n'est pas aussi complète que le manuscrit dont s'est servi M. *Rosen*. La partie géométrique, entre autres, ne s'y trouve pas. (*Chasles*, Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie, p. 490.) C'est cette lacune dans la reproduction latine de l'algèbre de *Mohamed ben Moussa*, que nous voulons combler par une traduction faite sur la version anglaise du manuscrit d'Oxford ; là se bornera notre tâche. Mais il ne sera peut-être pas inutile de rappeler succinctement ce que fut *Mohammed ben Moussa*, et quels sont ses titres impérissables à notre reconnaissance.

Abou Abdallah Mohamed ben Moussa, de *Khowarezm sur l'Oxus* (de là son nom de *Alkhowarezmi*), vécut et écrivit sous le khalife *Al Mamoun*, qui commença à régner à *Bagdad* en l'an 814.

Il abrégea, à la requête de l'illustre Abbasside, mais avant l'accession de ce prince au khalifat, le *Sindhind* (tables astronomiques), traduit par *Mohammed ben Ibrahim al Fazâry* d'après l'ouvrage d'un astronome indien qui visita la cour d'*Al Mansour* dans la 156^{e} année de l'hégire ou 773^{e} de notre ère. (*Ebn al Adami*, préf. à ses tabl. astronomiq. ; *Casiri*, I. 427-428 ; *Colebrooke*. Dissertation, p. LXIV-LXII.)

On ne doit pas le confondre avec *Abou Djafar Mohammed ben Moussa*, l'un des trois fils de *Moussa ben Shaker*. En effet, *Aboulfaradj* (Histor. Dyn., p. 280) et *Casiri* (I, 386-418) rapportent que *Moussa ben Shaker*, dont la jeunesse n'avait été rien moins qu'honorable, car il avait débuté par le métier de bandit, avait ensuite trouvé moyen de s'attacher à la cour du khalife *Al Mamoun*, et qu'après sa mort ce grand prince prit soin de l'éducation de ses trois fils *Mohammed*, *Ahmed* et *Al Hassan*, qui plus tard s'illustrèrent comme mathématiciens et astronomes sous le khalife *Al Mohtaded*. On sait que ce dernier régna de 279 à 289 de l'hégire, ou de 892 à 902 de notre ère. (*Rosen.*, p. XII.)

Mohammed, dans sa préface, nous apprend que ce fut encore *Al Mamoun*, devenu khalife, qui l'encouragea à écrire un ouvrage *populaire* sur l'algèbre, ou plutôt, suivant ses propres expressions un petit ouvrage sur le calcul par *Gebr* et *Mokabalah*, restreint à ce qu'il y a de plus aisé et de plus utile en arithmétique, c'est-à-dire aux opérations dont on a constamment besoin dans les cas d'héritage, de donations, de procès, de négoce et affaires de la vie pratique, ou nécessaires pour la mesure des terres, le creusement des canaux, le calcul géométrique, etc.

Pour comprendre ce que nous devons à *Mohammed ben Moussa*, il suffit de rappeler que c'est dans son ouvrage que nous avons puisé nos premières connaissances algébriques, qu'il est notre véritable instituteur dans cette branche principale des sciences mathématiques; avant de juger son œuvre, il faut mûrement réfléchir sur ce fait, qu'un traité d'algèbre, *regardé comme élémentaire au IX^e^ siècle* chez les Arabes, et en quelque sorte comme manuel pratique à l'usage du peuple, est devenu 700 ans après, l'*ars magna* des Européens, la base et l'origine de leurs grandes découvertes dans les sciences. (*Chasles*, Aper. Hist., p. 491). A. M.

Mesure.

Sachez que la signification de l'expression « *un par un* » est mesure (1), car l'on entend par là une coudée (2) (en longueur) par une coudée (en largeur). Tout quadrangle équilatéral et équiangle, qui a une coudée pour chacun de ses côtés, a aussi *un* pour son aire. Un tel quadrangle a-t-il deux coudées pour son côté, alors l'aire du quadrangle est quatre fois l'aire d'un quadrangle, dont le côté est une coudée. Il en est de même de *trois* par *trois*, et ainsi de suite, en montant ou en descendant : par exemple, un demi par un demi, qui donne un quart, ou d'autres fractions, toujours suivant la même règle. Un carré, dont chaque côté est une demie coudée, est égal à un quart de la figure qui a une coudée pour son côté. De la même manière, un tiers par un tiers, ou un quart par un quart, ou un cinquième par un cinquième, ou deux tiers par un demi, ou plus ou moins que ceci, toujours d'après la même règle (3).

Un côté d'une figure quadrangulaire équilatérale, pris une fois, est la racine de ce carré; si ce même côté est multiplié par deux, alors il équivaut à deux des racines du carré, qu'il soit petit ou grand.

Si vous multipliez la hauteur d'un triangle équilatéral par la moitié de la base sur laquelle la ligne marquant la hauteur se tient perpendiculaire, le produit donne l'aire de ce triangle (4).

Dans tout quadrangle équilatéral, le produit d'un diamètre multiplié par la moitié de l'autre sera égal à son aire (5).

Dans un cercle, le produit de son diamètre, multiplié par trois et un septième, sera égal à la périphérie. C'est là, la règle généralement suivie, dans la vie pratique, quoiqu'elle ne soit pas tout à fait exacte. Les géomètres ont deux autres méthodes. Une d'elles consiste en ceci, que vous multipliez le diamètre par lui-même, puis par dix, et qu'enfin vous preniez la racine du produit; la racine sera la périphérie. Les astronomes parmi eux se servent de l'autre méthode; la voici : vous multipliez le diamètre par soixante-deux mille huit cent trente-deux, et divisez le produit par vingt mille; le quotient est la périphérie (6).

Les deux méthodes conduisent à très-peu près au même résultat.

Si vous divisez la périphérie par trois et un septième, le quotient est le diamètre.

L'aire du cercle sera trouvée si l'on multiplie la moitié de la circonférence par la moitié du diamètre; puisque dans tout polygone dont les côtés et les angles sont égaux, tels que triangles, quadrangles, pentagones et ainsi de suite, l'aire est trouvée en multipliant la moitié de la périphérie par la moitié du diamètre du cercle moyen qui peut être tracé au travers.

Si vous multipliez le diamètre d'un cercle par lui-même, et que vous retranchiez du produit un septième et un demi-septième de ce même produit, alors le reste est égal à l'aire du cercle. Ceci conduit à très-peu près au même résultat que la méthode donnée ci-dessus (7).

Toute portion d'un cercle peut être comparée à un arc. Cet arc sera ou exactement égal à la demi-circonférence, ou plus petit ou plus grand qu'elle. Ceci peut être fixé par la flèche (8) de l'arc. Quand il arrive qu'elle est égale à la moitié de la corde, c'est qu'alors l'arc est exactement la moitié de la circonférence; est-elle plus petite que la moitié de la corde, alors l'arc est moindre que la demi-circonférence; la flèche est-elle plus longue que la demi-corde, alors l'arc comprend plus de la moitié de la circonférence.

Si vous avez besoin de déterminer le cercle auquel il appartient, multipliez la moitié de la corde par elle-même, divisez par la flèche et ajoutez le quotient à la flèche, la somme est le diamètre du cercle auquel cet arc appartient (9).

S'il vous faut calculer l'aire de l'arc, multipliez la moitié du diamètre du cercle par la moitié de l'arc et conservez le produit dans votre pensée. Alors retranchez la flèche de l'arc, de la moitié du diamètre du cercle, si l'arc est plus petit que le demi-cercle, ou s'il est plus grand que le demi-cercle, retranchez la moitié du diamètre du cercle, de la flèche de l'arc. Multipliez le reste par la moitié de la corde de l'arc, et retranchez le produit de celui que vous avez retenu dans votre pensée si l'arc est moindre que la moitié du cercle, ou ajoutez-le à ce même produit si l'arc est plus grand que le demi-cercle. La somme après l'addition, ou le reste après la soustraction, est l'aire de l'arc (10).

On trouve le volume d'un corps quadrangulaire en multipliant la longueur par la largeur, et alors par la hauteur.

S'il est d'autre forme que la quadrangulaire (circulaire ou triangulaire par exemple), mais telle cependant qu'une ligne représentant sa hauteur puisse se tenir perpendiculairement sur la base, et être encore parallèle aux côtés, il faut le calculer en déterminant d'abord l'aire de sa base. Celle-ci, multipliée par la hauteur, donne le volume du corps.

Les cônes et les pyramides triangulaires ou quadrangulaires sont calculés en multipliant un tiers de l'aire de la base par la hauteur (11).

Observez que dans tout triangle rectangle, les deux petits côtés étant multipliés chacun par lui-même, les produits, additionnés ensemble, égalent le produit du long côté multiplié par lui-même. La preuve en est ci-dessous (12).

Nous traçons un quadrangle ABCD, avec ses côtés égaux et ses angles égaux. Nous partageons la ligne AC en deux moitiés au point K, et de ce point nous tirons une parallèle jusqu'au point R. Puis nous partageons aussi la ligne AB en deux moitiés au point T, et tirons une parallèle jusqu'au point G. Alors le carré ABCD est divisé en quatre quadrangles qui ont côtés égaux et angles égaux, et sont de même aire ; savoir, les carrés AK, CK, BK et DK. Maintenant, nous tirons du point H au point T une ligne qui divise le quadrangle AK en deux parties égales : il se forme ainsi deux triangles dans le quadrangle, savoir les triangles ATH et HKT. Nous savons que AT est la moitié de AB, et que AH lui est égal, comme moitié de AC; et la ligne TH qui les joint est opposée à l'angle droit. Nous tirons de la même manière des lignes de T à R, de R à G, et de G à H. Ainsi tous les carrés donnent naissance à huit triangles égaux, et quatre d'entre eux, conséquemment, valent la moitié du grand carré AD. Nous savons que la ligne AT multipliée par elle-même est égale à l'aire de deux triangles, et AH donne l'aire de deux triangles qui leur sont égaux; leur somme est en conséquence quatre triangles. Mais la ligne HT multipliée par elle-même donne pareillement l'aire de quatre de ces triangles. Nous apercevons donc que la somme de AT multipliée par elle-même et de AH multipliée par elle-même, est égale à TH multipliée par elle-même. C'est là l'observation que nous étions désireux d'éclaircir. Voici la figure y relative (*fig.* 1).

Les quadrangles sont de cinq espèces : premièrement avec les angles droits et les côtés égaux; secondement, avec les angles droits et les côtés inégaux; troisièmement, le rhombe avec des côtés égaux et des angles inégaux ; quatrièmement, le rhomboïde, dont la longueur diffère de la largeur et dont les angles sont inégaux ; seulement les deux grands côtés et les deux petits sont respectivement d'égale longueur ; cinquièmement, les quadrangles avec angles et côtés inégaux (13).

Première espèce. — L'aire d'un quadrangle dont les côtés sont égaux et les angles droits, ou les côtés inégaux et les angles droits, peut être trouvée en multipliant la longueur par la largeur. Le produit est l'aire. Par exemple : une pièce de terre quadrangulaire, dont chaque côté a cinq coudées, a une aire de vingt-cinq coudées carrées. Voici quelle est la figure (*fig.* 2).

Deuxième espèce. — Une pièce de terre quadrangulaire ; ses deux grands côtés sont de huit coudées chacun, tandis que la largeur est six. Vous trouvez l'aire en multipliant six par huit, ce qui donne quarante-huit coudées. Voici pour ce cas la figure (*fig.* 3).

Troisième espèce (14).—Le rhombe : ses côtés sont égaux ; que chacun d'eux soit cinq et que ses diagonales soient l'une huit et l'autre six coudées. Vous pouvez alors calculer l'aire, soit par l'une des diagonales, soit par les deux. Comme vous les connaissez toutes deux, vous multipliez l'une par la moitié de l'autre, le produit est l'aire ; c'est-à-dire que vous multipliez huit par trois, ou six par quatre ; cela donne vingt-quatre coudées, et c'est l'aire. Si vous ne connaissez qu'une des diagonales, alors vous faites attention qu'il y a deux triangles pour chacun desquels deux côtés ont respectivement cinq coudées, tandis que le troisième côté est la diagonale. Dès lors vous pouvez faire le calcul d'après les règles pour le triangle. Voici la figure (*fig.* 4).

La *quatrième espèce*, ou rhomboïde, est calculée de la même manière que le rhombe (15). Voici quelle est la figure (*fig.* 5).

On calcule les autres quadrangles en tirant une diagonale et en les évaluant comme triangles (16).

Les triangles sont de trois sortes : acutangles, obtusangles ou rectangles (17).

La propriété du triangle rectangle est que si vous multipliez chacun de ses deux petits côtés par lui-même, qu'alors vous les ajoutiez ensemble, leur somme sera égale au long côté multiplié par lui-même. Le caractère du triangle acutangle est celui-ci : Si vous multipliez chacun de ses deux petits côtés par lui-même, et si vous additionnez les produits, leur somme est plus grande que le long côté seul multiplié par lui-même. La définition du triangle obtusangle est celle-ci : si vous multipliez ses deux petits côtés chacun par lui-même, et si vous additionnez les produits, leur somme est moindre que le produit du long côté multiplié par lui-même.

Le triangle rectangle a deux cathètes et une hypoténuse. Il peut être considéré comme la moitié d'un quadrangle. Vous trouvez son aire en multipliant une de ses cathètes par la moitié de l'autre. Le produit est l'aire

Exemples. Un triangle rectangle, une cathète étant six coudées, l'autre huit, et l'hypoténuse dix. Vous l'évaluez en multipliant six par quatre, ce qui donne vingt-quatre : c'est là l'aire. Ou si vous le préférez, vous pouvez aussi le calculer par la hauteur qui s'élève perpendiculairement du plus long côté ; car les deux plus petits côtés peuvent eux-mêmes être considérés comme deux hauteurs. Si vous préférez cela, vous multipliez la hauteur par la moitié de la base. Le produit est l'aire (18). Voici la figure (*fig.* 6).

Seconde espèce. — Un triangle équilatéral avec ses angles aigus, dont chaque côté a dix coudées de long. Son aire peut être déterminée par la ligne représentant sa hauteur et le point d'où elle émerge. Observez que dans tout triangle isocèle, une ligne tirée jusqu'à la base pour représenter la hauteur émerge de la base à angle droit, et que le point d'où elle s'élève est toujours situé au milieu de la base; si, au contraire, les deux côtés ne sont pas égaux, alors ce point ne se trouve jamais au milieu de la base (19). Dans le cas actuellement sous nos yeux, nous apercevons que, quel que soit le côté vers lequel nous tirions la ligne qui doit représenter la hauteur, ce sera toujours nécessairement en son milieu que cette ligne tombera, là où la longueur de la base est cinq. Maintenant la hauteur sera ainsi obtenue : vous multipliez cinq par lui-même; alors multipliez un des côtés, c'est-à-dire dix par lui-même, ce qui donne cent. Maintenant vous retranchez de ce produit celui de cinq multiplié par lui-même, ce qui est vingt-cinq; le reste est soixante-quinze, dont la racine est la hauteur. Celle-ci est une ligne commune aux deux triangles rectangles (20).

Si vous avez besoin de trouver l'aire, multipliez la racine de soixante-quinze par la moitié de la base, qui est cinq. Vous effectuez ceci, en multipliant d'abord cinq par lui-même; alors vous pouvez dire, que la racine de soixante-quinze est à multiplier par la racine de vingt-cinq. Le produit est mille huit cent soixante-quinze; prenez sa racine, c'est l'aire; c'est quarante-trois et une petite quantité (21). Voici la figure (*fig.* 7).

Il y a aussi des triangles acutangles avec des côtés différents. Leur aire sera trouvée par le moyen de la ligne représentant la hauteur, et du point d'où s'élève cette dernière. Prenez, par exemple, un triangle, dont un des côtés est quinze coudées, un autre quatorze et le troisième treize coudées. Afin de trouver le point d'où s'élève la ligne marquant la hauteur, vous pouvez prendre pour base tel côté qu'il vous plaira choisir, par exemple : celui qui est long de quatorze coudées. Le point d'où s'élève la ligne représentant la hauteur, est situé sur cette base à une distance inconnue de chacun des deux autres côtés. Essayons de trouver sa distance inconnue du côté qui est long de treize coudées (22).

Multipliez cette distance par elle-même ; il en résulte *Màl*. Retranchez-le de treize multiplié par lui-même, c'est-à-dire cent soixante-neuf. Le reste est cent soixante-neuf moins *Màl*. La racine de ceci est la hauteur. Le reste de la base est quatorze moins *Shaï*. Nous multiplions ce reste par lui-même ; il en résulte cent quatre vingt-seize et *Màl* moins vingt-huit *Shaï*. Nous retranchons ceci de quinze multiplié par lui-même ; le reste est vingt-neuf, et vingt-huit *Shaï* moins *Màl*. La racine de ceci est la hauteur. Attendu que la racine de ceci est la hauteur, et que la racine de cent soixante-neuf moins *Màl* est pareillement la hauteur, nous savons qu'elles sont toutes deux identiques. Réduisez-les, en transportant *Màl* contre *Màl*, puisque tous deux sont négatifs. Il reste vingt-neuf plus vingt-huit *Shaï*, qui sont égaux à cent soixante-neuf. Retranchez maintenant vingt-neuf de cent soixante-neuf. Le reste est cent quarante, égal à vingt-huit *Shaï*. *Shaï* est conséquemment cinq. Telle est la distance du point susdit, du côté de treize coudées. Le complément de la base vers l'autre côté est neuf. Maintenant pour trouver la hauteur, vous multipliez cinq par lui-même et retranchez ce produit, du côté contigu, qui est treize, multiplié par lui-même. Le reste est cent quarante-quatre. Sa racine est la hauteur. C'est douze (23). La hauteur forme toujours deux angles droits avec la base, et on l'appelle la *colonne*, parce qu'elle se tient perpendiculairement. Multipliez la hauteur par la moitié de la base, qui est sept. Le produit est quatre vingt-quatre, ce qui est l'aire (24). Voici la figure (*fig.* 8).

La troisième espèce est celle du triangle obtusangle avec un angle obtus et des côtés de longueurs différentes. Par exemple, un côté étant six, un autre cinq, et le troisième neuf. L'aire d'un tel triangle sera trouvée par le moyen de la hauteur et du point d'où s'élève une ligne représentant cette hauteur. Ce point, dans un tel triangle, peut être situé seulement sur son plus grand côté (25). Prenez le donc comme base : car si vous préfériez prendre un des petits côtés comme base, alors ce point tomberait par delà le triangle. Vous pouvez trouver la distance de ce point, et la hauteur, de la même manière que j'ai montrée pour le triangle acutangle ; le calcul tout entier est le même ; voici la figure (*fig.* 9).

Nous avons traité précédemment des cercles (26), de leurs propriétés et de leur évaluation. Ce qui suit est un exemple : si un cercle a sept pour son diamètre, alors il a vingt-deux pour sa circonférence. Vous trouvez son aire de la manière suivante : Multipliez la moitié du diamètre (27), qui est trois et un demi, par la moitié de la circonférence qui est onze. Le produit est trente huit et un demi, ce qui est l'aire. Ou bien vous pouvez encore multiplier le diamètre qui est sept, par lui-même ; ceci est quarante-neuf ; en en retranchant un septième et un demi-septième, ce qui est dix et un demi, il reste trente-huit et un demi, ce qui est l'aire. Voici la figure (*fig.*10).

Si quelqu'un s'enquiert du volume d'un pilier pyramidal, sa base étant quatre coudées par quatre coudées, sa hauteur dix coudées, et les dimensions à son extrémité supérieure deux coudées par deux coudées ; nous savons déjà que toute pyramide va en décroissant vers son sommet, et que un tiers de l'aire de sa base, multiplié par la hauteur, donne son volume. La présente pyramide n'a pas de sommet. Nous devons en conséquence chercher à déterminer ce qui manque à sa hauteur pour rétablir le sommet. Nous observons que le rapport de la hauteur totale au dix que nous avons maintenant devant nous, est égal au rapport de quatre à deux (28). Or comme deux est la moitié de quatre, dix doit pareillement être la moitié de la hauteur totale, et la hauteur entière du pilier doit être vingt coudées. A présent nous prenons un tiers de l'aire de la base ; c'est cinq et un tiers, et nous le multiplions par la hauteur qui est vingt. Le produit est cent six coudées et deux tiers, dont nous devons alors retrancher le fragment que nous avons ajouté afin de compléter la pyramide. C'est ce que nous exécutons en multipliant un et un tiers, ce qui est un tiers du produit de deux par deux, par dix; cela donne treize et un tiers. C'est là le fragment que nous avons ajouté afin de compléter la pyramide. Retranchant de cent six coudées et deux tiers, il reste quatre-vingt-trois coudées et un tiers; et c'est là le volume de la pyramide tronquée. Voici la figure (*fig.* 11).

Si le pilier a une base circulaire (29), retranchez un septième et un demi-septième du produit du diamètre multiplié par lui-même, le reste est la base.

Si quelqu'un dit : « Il y a une pièce de terre triangulaire, deux de ses côtés ont dix coudées chacun, et la base douze, quelle doit être la longueur d'un côté d'un carré situé dans un tel triangle? » La solution est celle-ci (30). D'abord vous déterminez la hauteur du triangle, en multipliant la moitié de la base, par elle-même, et retranchant le produit qui est trente-six, de l'un des deux petits côtés multiplié par lui-même, ce qui est cent; le reste est soixante-quatre : prenez-en la racine, c'est huit. Voilà la hauteur du triangle. Son aire est donc quarante huit coudées; puisque tel est le produit de la hauteur multipliée par la moitié de la base qui est six. Maintenant nous prenons pour un côté du carré cherché : *Shaï*. Nous le multiplions par lui-même; il en résulte *Mâl*, que nous gardons dans notre pensée. Nous savons qu'il doit rester deux triangles, aux deux côtés du carré, et un au-dessus. Les deux triangles aux deux côtés du carré sont égaux entre eux : ils ont même hauteur et sont rectangulaires. Vous trouvez leur aire en multipliant *Shaï* par six moins *un demi-Shaï*, ce qui donne six *Shaï* moins un demi-*Mâl*. Telle est l'aire de l'ensemble des deux triangles situés des deux côtés du carré. L'aire du triangle supérieur sera trouvée en multipliant huit moins *Shaï*, qui est la hauteur, par un demi-*Shaï*. Le produit est quatre *Shaï* moins un demi-*Mâl*. Tout ceci réuni est égal à l'aire du carré plus celle des trois triangles : ou, dix *Shaï* égalent quarante-huit, ce qui est l'aire du grand triangle. D'où *Shaï* est quatre coudées et quatre cinquièmes de coudée; et c'est là la longueur d'un côté du carré. Voici la figure (*fig.* 12).

NOTES.

(1) Le savant arabiste M. *Rosen* n'est pas certain si sa traduction de la définition que *Mohammed* donne de la mesure est correcte. Bien que les points diacritiques manquent en partie dans le manuscrit, il ne peut cependant, dit-il, y avoir aucun doute pour ce qui est de la lecture du passage.

(2) Le mot arabe est *zara*, coudée, avant-bras. Dans les définitions des termes techniques données par *Bhascara-Acharya*, page 2 du *Lilavati*, on rencontre cette même mesure. Dans la cinquième stance, il dit : huit largeurs d'un grain d'orge sont ici un doigt; quatre fois six doigts, une coudée (*cara*, avant-bras); quatre coudées, un bâton; etc. Suivant le commentateur *Ganésa*, ceci s'applique à la coudée pratique adoptée par les artisans, et vulgairement appelée *gadj*; suivant le même, trois longueurs d'un grain de riz aussi bien que huit largeurs d'un grain d'orge constituent le doigt. Quant au bâton (*danda*), *Manou* 2.41. dit qu'il doit être coupé à peu près de la hauteur d'un homme.

(3) Le début de *Mohammed ben Moussa* montre suffisamment que c'était véritablement bien une sorte de manuel, à l'usage du peuple, qu'il voulait composer; il ne donne pas les définitions de la science, il enseigne de prime abord le moyen pratique de mesurer les surfaces, celle du carré premièrement, et cela à l'aide d'exemples numériques. On peut à ce passage comparer l'introduction à la géométrie de *Beha-eddin*.

(4) *Mohammed ben Moussa*, versé dans les sciences des hindous, ne donne point ici la formule particulière qui convient à la surface du triangle équilatéral. Il donne le moyen général de mesurer un triangle quel qu'il soit (la hauteur par la moitié de la base), quoiqu'il connût non-seulement la formule $S = \sqrt{3 . \frac{a^4}{16}}$, mais encore

celle qui donne la surface d'un triangle quelconque en fonction de ses trois côtés. Mais il n'oublie pas qu'il écrit pour le vulgaire, et non pour des mathématiciens; une seule règle, qui convienne à tous les cas, suffit. *Beha-eddin* au contraire a bien soin de relater la règle : « Tu multiplies par 3 le carré de la quatrième partie du carré d'un côté indistinctement; ensuite c'est la racine carrée du produit, la réponse. »

(5) Il faut observer la différence de signification attachée au mot diamètre par *Mohammed ben Moussa* et par *Beha-eddin*. Ici, le diamètre est la diagonale du carré, ou le diamètre du cercle circonscrit. Quand *Beha-eddin*, au contraire, donne la mesure du polygone régulier d'un nombre pair de côtés, il dit : multiplie le demi-diamètre, par la demi-somme des côtés, et il ajoute : or, le diamètre est la ligne qui joint les points milieux de deux côtés opposés.

Ainsi, pour *Mohammed ben Moussa*, c'est le diamètre du cercle circonscrit, et pour *Beha-eddin*, c'est le diamètre du cercle inscrit.

Les mathématiciens hindous *Souryadâsa* et *Ranganâtha*, disent la diagonale ou diamètre d'un tétragone. (*Lilavati*, p. 59.)

(6) Ici nous remarquons trois valeurs distinctes du rapport de la circonférence au diamètre, trois formules différentes. La première donne $\pi = \frac{22}{7}$, c'est le rapport d'*Archimède*. La deuxième donne : $\pi = \sqrt{10}$, et la troisième, celle en usage parmi les astronomes et la plus exacte en même temps, suppose $\pi = \frac{62832}{20000}$; ces trois valeurs en décimales, sont :

3,1428. . . . . .
3,16227. . . . .
3,14160. . . . .

Pour obtenir une plus grande approximation que cette dernière, il faut se servir du rapport 3,1415926. . . . .

La première et la troisième formule

$$\text{circ} = \frac{22}{7}\,\text{D} \quad \text{et} \quad \text{circ} = \frac{62832}{20000}\,\text{D},$$

se trouvent dans le *Lilavati* de *Bhascara*, p. 87 de l'introduction de M. Colebrooke. Seulement cette dernière est donnée par le géomètre hindou sous la forme plus simple, à laquelle elle est réductible, en divisant par 16 les deux termes du rapport

$$\text{circ} = \frac{3927}{1250}\,\text{D}.$$

La seconde formule circ $= \sqrt{10\,D^2}$ se trouve dans le *Ganita d'hyaya* de *Brahmagupta*, § 40. Nous croyons devoir rectifier à ce sujet l'erreur que M. *Rosen* a laissée échapper. Il dit que cette seconde formule se rencontre dans le *Vija Ganita*, p. 308, 309. Pour le lecteur qui n'aurait pas l'ouvrage de *Colebrooke* entre les mains, et ne pourrait se porter aux pages désignées, cette erreur ne serait pas indifférente, car elle ferait supposer que c'est *Bhascara*, l'auteur du *Vija Ganita* qui emploie cette formule, tandis que c'est *Brahmagupta*, antérieur de près de six cents ans, et qui n'en emploie pas de plus approchée. On lit aussi dans le savant ouvrage de M. *Chasles*, p. 446. « Il paraît, d'après le texte anglais, que *Brahmegupta* a regardé cette expression $(\sqrt{10})$, comme étant le rapport *exact* de la circonférence au diamètre. *Chaturveda*, dans ses notes, semble le croire ainsi. Cela ne nous étonne point de la part de ce scoliaste; mais il est difficile de penser qu'un géomètre qui a été capable d'écrire sur la théorie du quadrilatère inscrit au cercle, et de résoudre les questions que nous avons trouvées dans l'ouvrage de *Brahmegupta*, ait commis cette faute. Il est vrai que la quadrature du cercle a été aussi l'écueil d'un grand nombre de géomètres modernes, qu'elle a entraînés dans des erreurs semblables; quoique plusieurs d'entre eux eussent donné des preuves d'un véritable et profond savoir en mathématiques. Il nous suffira de citer *Oronce Finée* et *Grégoire de Saint-Vincent*. L'expression $\sqrt{10}$ est précisément le rapport que *J. Scaliger* disait avoir trouvé le premier, et croyait avoir démontré géométriquement : mais on connaissait depuis longtemps en Europe cette expression, qu'on savait n'être qu'approchée. On l'attribuait aux arabes ou aux indiens, et l'on supposait que ces peuples l'avaient regardée comme exacte. »

La présence simultanée des trois valeurs de π, et le langage de *Mohammed ben Moussa*, devaient prouver suffisamment, ce me semble, aux géomètres européens *Purbach*, *Regiomontanus*, *Buteon*, etc., que les Arabes ne regardaient point $\sqrt{10}$, comme la valeur *exacte* du rapport. Voici une note marginale du manuscrit d'Oxford, faite sur le passage qui nous occupe, s'il restait quelques doutes, elle pourrait les dissiper : « Ceci est une approximation, non pas l'exacte vérité; personne ne peut fixer l'exacte vérité de ceci, et trouver la circonférence réelle, excepté celui qui sait tout : car la ligne n'est pas droite de manière à ce que son exacte longueur puisse être trouvée. Ceci est appelé une approximation, de la même manière que l'on dit des racines carrées des nombres irrationnels, qu'elles sont une approximation, et non pas l'exacte vérité; car Dieu seul sait quelle est la racine exacte. La meilleure méthode ici donnée, c'est de multiplier le diamètre par trois et un septième : car elle est la plus aisée et la plus prompte. Dieu sait mieux ! » (*Rosen*, p. 200.)

Quant aux Hindous, croyaient-ils $\sqrt{10}$ le rapport exact? Du temps de *Bhascara*, évidemment non; car des trois valeurs du rapport, celle-ci seule n'est pas mentionnée par *Bhascara*, et au contraire c'est celle de *Brahmagupta*. Ce qui a fait pencher à croire que *Brahmagupta* la regardait peut-être comme exacte, c'est simplement l'expression anglaise *neat value* (*) appliquée à ce rapport $\sqrt{10}$, et que l'on a traduite par *valeur exacte*, *vraie*; or, de l'avis de Johnson et de Walker, ce n'est pas là la signification du mot *neat*. Aryabhatta, antérieur à Brahmagupta, avait pour ce rapport, une valeur plus approchée, $\frac{22}{7}$, et il ne la croyait pas exacte !

M. *Rosen* fait observer qu'il a simplement traduit les mots *handasah* par *geometricians* (géomètres), quoique, d'après la manière dont *Mohammed* se sert ici de cette expression, il semblerait qu'il la prenait dans un sens plus spécifique. Il cite à l'appui *Firouzabadi* (*Kamus*, p. 814, éd. Calcutt.), qui donne au mot *handasah* une origine persane, et prétend qu'il signifie « celui qui détermine à l'aide de mesures où les canaux pour l'eau seront creusés. » Les Persans eux-mêmes assignent une autre signification au mot *hindisah*, comme ils le prononcent; ils l'emploient dans le sens de notation décimale des nombres (*Burhani Kati*). Si nous adoptions cette version, ajoute M. *Rosen*, le passage nous apparaîtrait sous un jour entièrement nouveau. Les *handassi*, auxquels notre auteur attribue les deux dernières formules, seront alors les mathématiciens Hindous, qui avaient apporté avec eux la notation décimale; et les *alhandasah*, auxquels la seconde et la plus exacte de ces méthodes est attribuée, seront les astronomes parmi ces mathématiciens Hindous. Ce qui précède donne tout lieu de croire cette dernière version préférable.

(7) L'aire du cercle dont le diamètre est d, est :

$$\pi\frac{d^2}{4}=\frac{22}{7\times4}d^2=\left(1-\frac{1}{7}-\frac{1}{2\times7}\right)d^2.$$

La première méthode donne aire du cercle

$$=\frac{\text{circ}}{2}\times\frac{d}{2}\quad\text{ou}\quad\frac{\pi d}{2}\times\frac{d}{2}\quad\text{ou}\quad\pi\frac{d^2}{4},$$

(*) C'est probablement une erreur typographique, il faut lire *near*, approchée. Tm.

en supposant $\pi = \frac{22}{7}$, elle conduit identiquement au même résultat que le produit effectué de $\left(1 - \frac{1}{7} - \frac{1}{2 \times 7}\right)$ par d^2, c'est-à-dire à $\frac{11}{14} d^2$, valeur donnée comme bonne dans la pratique, quand on n'a pas besoin d'une grande approximation, par *Bhascara Acharya*, p. 89 du *Lilavati*. Ces différents moyens d'obtenir la surface du cercle, sont tous énoncés par *Beha-edd n*. (*Khelasat al Hisab*. Géomét., 2e section.)

(8) Les Hindous avaient aussi les mots *sara*, *ishou*, et autres synonymes qui signifient flèche, pour désigner cette même droite. *Bhascara* et *Brahmagupta* emploient le mot flèche. De plus, le commentateur *Chatourveda* observe dans ses notes au *Ganita-d'hyaya*, 41e stance, que ce qui est appelé de son temps (diamètre moins la flèche), est dénommé par *Arya-Bhatta* la grande flèche. En effet, *Aryabhatta* dit : « Dans un cercle, le produit des flèches est égal au carré de la demi-corde des deux arcs. »

Arya-Bhatta est le plus ancien algébriste Hindou connu; il fut à peu près contemporain de *Diophante*; il se servait de la valeur $\pi = \frac{22}{7}$, que n'employa pas *Brahmagupta* qui vint après lui, mais qui fut adoptée plus tard par *Bhascara*. Pour donner une idée de ses connaissances algébriques, il suffit de dire qu'il donna la résolution de l'équation du premier degré à deux inconnues, en nombres entiers, par une méthode semblable à celle de *Bachet de Meziriac*, qui a paru en Europe, pour la première fois, en 1624.

(9) Dans la partie géométrique du *Khelasat-al-Hisab*, ce passage ou son analogue ne se rencontre pas. *Beha-Eddin* se borne à donner, dans un ordre logique, les définitions des différentes lignes des surfaces et des corps, puis à énoncer les moyens de mesurer ces surfaces et les volumes et les surfaces de ces corps. En revanche, nous retrouvons cet énoncé chez les Hindous dans le *Ganita d'hyaya* de *Brahmagupta*, stance 41 : « Le carré de la corde, divisé par quatre fois la flèche, et ajouté à la flèche, est le diamètre. » *Chatourveda*, dans son commentaire, l'explique par quatre exemples, dont les trois derniers sont imités par *Bhascara* dans son *Lilavati*, § 148-153, et dans son *Vija-Ganita*, § 123-125 et 139. Voici l'un de ces exemples : « Un bambou haut de dix-huit coudées était brisé par le vent; le sommet touchait la terre à six coudées de la racine : dites la longueur des segments du bambou. (Ces segments sont dix et huit.) » *Bhascara* donne l'énoncé de *Mohammed* mot à mot; ainsi il dit : « Le carré de la demi-corde étant divisé par la flèche, le quotient ajouté à la flèche est

prononcé le diamètre du cercle. Le commentateur *Ganésa* observe que prononcé signifie *cela a été déclaré ainsi par les anciens*. *Aryabhatta* et *Brahmagupta*, sont considérés comme des anciens par les commentateurs de *Bhascara*. Nous rapporterons encore ici la règle suivante pour trouver l'arc. Elle est citée par *Ganesa* d'après *Arya-Bhatta :* « Six fois le carré de la flèche étant ajouté au carré de la corde, la racine carrée de la somme est l'arc.

(10) C'est ce qu'exprime plus brièvement *Beha-Eddin* lorsqu'il dit : « Quant aux deux *segments*, marque bien le centre, et achève les deux secteurs, alors il se forme là un triangle ; retranche-le du plus petit secteur, il en résulte le plus petit segment, ou ajoute-le au plus grand, il en résulte le plus grand segment. »

Colebrooke, dans la traduction du *Lilavati*, *p*. 96, donne la note suivante, intéressante en elle-même, et qui trouve naturellement ici sa place :

« Pour trouver l'aire de l'arc ou le segment d'un cercle, la règle suivante est donnée dans le *Ganita-Sára* de *Vishnou*, ainsi que le rapporte *Gangádhara* ; cette même règle est enseignée par *Césava*, cité par son fils *Ganésa :* « La flèche étant multipliée par la demi-somme de la corde et de la flèche, et un vingtième du produit étant ajouté à ce produit, la somme est l'aire du segment. »

La règle de *Srid'hara*, citée par *Ganésa*, est : « le carré de la flèche, multiplié par la demi-somme de la corde et de la flèche, étant multiplié par dix et divisé par neuf, la racine carrée du produit est l'aire de l'arc. » *Ganésa* ajoute : « la corde et la flèche étant données, trouvez le diamètre, puis la circonférence, et par suite l'arc. Alors, des extrémités de l'arc, tirez des lignes au centre du cercle. Trouvez l'aire du secteur (*Vritta-chanda*, portion d'un cercle) en multipliant la moitié de l'arc, par le demi-diamètre ; et l'aire du triangle, en multipliant la moitié de la corde par le demi-diamètre diminué de la flèche. Retranchant l'aire du triangle de l'aire du secteur, la différence est l'aire du segment. » Le *Manórandjana* donne une semblable règle ; mais il trouve l'aire du secteur par la proposition : comme la circonférence entière est à l'aire entière, de même l'arc proposé est à l'aire du secteur. »

Comme on le voit, les derniers moyens employés pour trouver l'aire du segment ne sont autres que ceux de *Mohammed-ben-Moussa* et de *Beha-Eddin*. La formule rapportée par *Ganga-d'hara*, et enseignée par *Césava*, segment $=\frac{21}{20}f\left(\frac{c+f}{2}\right)$, f désignant la flèche et c la corde, donne pour le cas particulier $f=\mathrm{R}$, où le segment égale le demi-cercle, la valeur $\frac{441}{280}\mathrm{R}^2$, et si l'on emploie la formule habituelle $R^2, \left(\pi = \frac{22}{7}\right)$, on trouve, pour le demi-cercle $\frac{440}{280} R^2$. La différence est donc de $\frac{1}{280}$.

(11) Pour les cylindres et prismes de chaque espèce, multiplie la hauteur par la surface plane de la base. — Pour les cônes entiers et les pyramides de chaque espèce, multiplie la hauteur par un tiers de l'aire de la base. (*Beha-Eddin*, Géom., 3e section.)

Ainsi, nos deux auteurs arabes regardent le cylindre comme une variété du prisme, comme un prisme, le cône comme une pyramide. Cette assimilation a un caractère encore plus frappant chez les Hindous, qui par le seul mot *sama-châta* (solide de figure régulière avec des côtés égaux) désignent le parallélipipède, le cylindre, etc.; pour les pyramides et les cônes, ils emploient l'expression *souchi-châta* (*solide aigu*). (*Lilavati*, stance 217.)

(12) La preuve qu'en donne *Mohammed-ben-Moussa* ne s'applique qu'au triangle rectangle isocèle. La vérité géométrique énoncée se vérifie pour le triangle donné en exemple. Elle parle aux yeux, et son but est d'aider la mémoire plutôt que de satisfaire rigoureusement l'esprit. Aussi termine-t-il en disant : « C'est cette observation que nous étions désireux *d'éclaircir.* » C'est cette figure relative au carré de l'hypoténuse que *Beha-Eddin* appelle la *figure de la fiancée.* Jusqu'ici on n'a pu expliquer d'où est provenue cette désignation. Les précieux fragments arabes et persans inédits, relatifs à l'Inde, antérieurement au onzième siècle de l'ère chrétienne, recueillis et publiés récemment par M. *Reinaud*, jetteront un jour nouveau sur cette question. L'auteur des deux passages que nous allons rapporter d'après le savant professeur est *Beladori.* Son véritable nom était *Ahmed*, fils de *Yahya;* il vivait à la cour du khalife de Bagdad *Almotavakkel*, et dirigea l'éducation d'un prince de la famille du khalife. Il mourut l'an 279 de l'hégire (892 de J. C.). L'ouvrage est intitulé : *Livre des Conquêtes des pays;* il appartient à la riche bibliothèque de Leyde. « *Mohammed*, fils de *Cassem*, quitta *Armâyl* ayant avec lui *Djehem*, fils de *Zakhar Aldjofy;* il arriva un vendredi devant *Daybal ;* des navires lui amenèrent en cet endroit des hommes, des armes et des machines. Aussitôt il creusa un fossé autour de son camp. Les approches du fossé étaient défendues par des hommes armés de lances, et les étendards étaient tenus déployés. Chaque troupe de guerriers était rangée auprès de son étendard; en même temps, *Mohammed* fit dresser la machine de guerre nommée *la fiancée*, laquelle était de la force de cinq cents hommes. Or, il y avait à *Daybal* un grand *bodd* surmonté d'un grand mât; sur le mât était

un drapeau rouge qui, lorsque le vent soufflait, se déployait sur la ville. »

Le *bodd* est un temple (probablement consacré à *Bouddha*). (*Reinaud.*) Le second passage est une lettre du fameux *Hadjadj*, gouverneur musulman de l'Irac, à son lieutenant *Mohammed* (celui dont il est question dans le premier passage), campé aux portes de *Daybal*. « Dresse *la fiancée* et raccourcis-lui une des jambes; tu placeras la machine du côté de l'Orient; ensuite tu appelleras l'homme chargé de la faire mouvoir, et tu lui ordonneras de viser le mât dont tu m'as fait la description. » *Beladori* continue son récit : « On lança donc des projectiles contre le mât, qui fut brisé; cet événement affligea vivement les Infidèles. »

Les Arabes, aussi bien que les Hindous, disent *jambe* ou *côté* d'un triangle; ce fut probablement cette machine de guerre qui donna son nom à la figure du carré de l'hypoténuse. La panoplie aura fourni cette expression à la géométrie, de même que les mots *arc*, *flèche*, etc. (*fig.* 1 et 2).

Nous allons rapporter ici la démonstration figurée du théorème du carré de l'hypoténuse donnée par les Hindous, et une autre du même genre, à laquelle la connaissance de la première a dû conduire naturellement.

$$c^2 = (a-b)^2 + 4\frac{ab}{2} = a^2 - 2ab + b^2 + 2ab = a^2 + b^2,$$

$$c^2 = (a+b)^2 - 4\frac{ab}{2} = a^2 + b^2 + 2ab - 2ab = a^2 + b^2.$$

(13) Ce sont ces quadrangles avec angles et côtés inégaux que *Beha-Eddin* nomme *trapèzes*. Le célèbre commentateur d'*Euclide*, *Nasr' Eddin*, parle aussi de trapèzes, et ces quadrilatères n'ont pas de côtés parallèles. Le mot trapèze, qui répond à la dénomination sanscrite *rishama-chatourasra*, s'applique, chez les Hindous, au tétragone qui a ses quatre côtés inégaux. C'est la signification que lui donne aussi *Euclide* (définition 34ᵉ du 1ᵉʳ livre), c'est celle-là que lui ont toujours conservée les Anglais. C'est vers la fin du siècle dernier que le mot trapèze a pris la signification qu'il a aujourd'hui en France; jusque là, parmi nous, il avait eu celle d'*Euclide*.

Chatourveda, le commentateur de *Brahmagupta*, distingue aussi cinq espèces de tétragones ou quadrilatères. Le tétragone est (*sama-chatourasra*) équilatéral; (*âyata-sama-chatourasra*) oblong avec côtés égaux (deux à deux); (*doui-sama-chatourasra*) ayant deux côtés égaux; (*tri-sama-chatourasra*) ayant trois côtés égaux; (*vishama-chatourasra*) les ayant tous inégaux.

Ganésa distingue les quadrangles en deux classes principales. Ils ont leurs diagonales égales ou inégales. La 1re classe comprend 4 espèces : carré, trapèze, parallélogramme oblique, rectangle. La seconde classe renferme 6 espèces : losange, trois côtés égaux, rhomboïde, deux côtés égaux, quatre côtés inégaux ou trapèze; perpendiculaires égales ou trapézoïde.

Outre les figures planes citées par *Mohammed-ben-Moussa*, nous trouvons encore dans *Beha-Eddin*, la *lune*, le *fer à cheval*, le *navet*, le *myrobolan*, certains trapèzes qu'il dénomme : *trapèze à une pointe*, *à deux pointes* et *concombre*. Puis, parmi les polygones singuliers d'un plus grand nombre de côtés, les figures *scalariforme*, *tympaniforme*, *spiculiforme*.

Nous trouvons de même chez les Hindous les figures suivantes, citées par *Srid'hara*, *Souryadasa* et *Gangad'hara*. On peut en faire le curieux rapprochement avec les figures planes de *Beha-Eddin*.

Le *gadja-danta* ou dent d'éléphant, que l'on peut traiter comme un triangle; le *bâléndou*, ou le croissant, qui peut être considéré comme composé de deux triangles; le *yava*, ou grain d'orge (lentille convexe), traité comme consistant soit en deux triangles, soit en deux segments; le *némi*, ou jante de roue, considéré comme un quadrilatère. La *vadja*, ou la foudre, traitée comme comprenant deux triangles, suivant *Souryadasa*, ou un quadrilatère avec deux segments ou deux trapèzes, suivant *Gangad'hara*, ou bien encore deux quadrilatères, suivant *Srid'hara;* la *sanc'ha* ou conque, le *mridanga*, ou grand tambour, et beaucoup d'autres.

(14) Soient en général d, d', les diagonales d'un losange, c son côté. Son aire sera $\frac{dd'}{2} = d \times \sqrt{c^2 - \frac{d^2}{4}}$.

On peut remarquer en passant que *Mohammed-ben-Moussa* dans tous ses exemples, choisit des nombres rationnels entiers; de plus ici les côtés du losange sont ceux du carré précédemment figuré, et les diagonales sont les côtés du rectangle qu'il vient de donner pour exemple.

(15) Les deux triangles rectangles qui joints au rectangle forment le rhomboïde, ne sont autres que deux des quatre triangles rectangles qui constituent le rhombe. On doit remarquer encore que leurs côtés sont trois nombres entiers consécutifs 3, 4 et 5.

(16) « Partage les autres quadrilatères en deux triangles, alors la somme des deux aires est égale à l'aire de la somme. » *Beha-Eddin*.

(17) *Mohammed-ben-Moussa* et *Beha-Eddin* ne définissent ni l'un ni l'autre le triangle dont ils reconnaissent trois espèces; ils énoncent la propriété caractéristique qui distingue chacune d'elles.

Ganésa dit : « Le triangle est une figure qui contient trois angles et consiste en autant de côtés. » Selon lui, le triangle est ou rectangulaire (*jatya*) ou trilatéral et (oblique) (*tribhoudja*) comme le fruit du *Sringata* (Trapa natans). On le distingue encore d'après la direction de la perpendiculaire (*lamba*), c'est-à-dire suivant que la perpendiculaire tombe en dedans ou en dehors du triangle, en *antar-lamba* acutangle et *bahir-lamba* obtusangle. *Chatourveda* au contraire, le commentateur de *Brahmagupta*, distingue trois sortes de triangles ; ce sont le (*sama-tribhoudja*) équilatéral, (*doui-sama-tribhoudja*) isocèle, et (*vishama-tribhoudja*) scalène.

(18) C'est le triangle moitié du rectangle déjà donné comme exemple, et en même temps équivalent au losange dont on a donné la figure. Les côtés sont les trois nombres pairs consécutifs : 6, 8, 10 doubles des trois côtés 3, 4, 5, nombres impairs consécutifs des triangles rectangles qui constituent le susdit losange.

(19) Pour trouver dans un triangle quelconque, le pied de la perpendiculaire, on a d'après *Beha-Eddin*, en appelant a la base, b le côté moyen, c le plus petit côté, la formule suivante :

$$x = \frac{a}{2} - \frac{(b+c)(b-c)}{2a}.$$

Si dans cette formule, on fait $b=c$, on voit immédiatement que

$$x = \frac{a}{2}.$$

(20) $H = \sqrt{10^2 - 5^2} = \sqrt{100 - 25} = \sqrt{75}.$

(21) $S = H \times \frac{B}{2} = \sqrt{75} \times 5 = \sqrt{75} \times \sqrt{25} = \sqrt{1875} = 43{,}30.$

(22)
$$\begin{aligned} 15^2 - (14-x)^2 &= 13^2 - x^2 \\ 15^2 - 196 - x^2 + 28x &= 169 - x^2 \\ 29 + 28x &= 169 \\ 28x &= 140 \\ x &= 5. \end{aligned}$$

Beha-Eddin emploie la formule

$$x = \frac{a}{2} - \frac{(b+c)(b-c)}{2a} = 7 - \frac{28.2}{2.14} = 7 - 2 = 5.$$

Il arrive à cette formule en appliquant le théorème qui donne la valeur du carré fait sur un côté opposé à un angle aigu.

(23) $H = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{144} = 12.$

(24) La hauteur et les trois côtés sont les quatre nombres entiers consécutifs : 12, 13, 14, 15. *Mohammed ben Moussa* a choisi le triangle le plus propre à servir d'exemple. Nous résumerons ici les

observations auxquelles ces nombres ont conduit M. *Chasles* dans son Aperçu historique. «Ces nombres sont très-remarquables en ce qu'ils sont ceux choisis à plusieurs siècles d'intervalle, non-seulement par les Hindous, mais aussi par *Héron d'Alexandrie*, *Héron le Jeune*, les trois fils de *Moussa ben Shaker*, *Léonard de Pise*, *Jordan*, *Lucas de Burgo*, *Georges Valla*, *Tartalea*, etc.» L'usage général de ces trois nombres semblait dire qu'ils avaient une origine commune; mais M. *Chasles* en y réfléchissant davantage, ne tarda pas à reconnaître que ces nombres n'offraient probablement pas les secours historiques qu'il avait espérés d'abord. En effet, on aura cherché naturellement, pour les trois côtés du triangle à proposer en exemple, trois nombres pour lesquels l'aire de ce triangle, et conséquemment la hauteur, fussent exprimées en nombres rationnels. Cette question se réduit à construire deux triangles rectangles en nombres rationnels, ayant un côté commun. C'est ainsi que *Brahmagupta* a fait. Maintenant parmi tous les systèmes de deux triangles rectangles exprimés en nombres rationnels entiers, et ayant un côté commun, on aura pris celui où ces nombres sont les plus petits ; ce sont ceux qui ont pour côtés, le premier 5, 12, 13, et le second 9, 12, 15. Plaçant ces deux triangles de manière que leurs deux côtés égaux se confondent et que les autres côtés des angles droits soient dans le prolongement l'un de l'autre, on forme le triangle acutangle qui a sa base égale à 14, et ses deux autres côtés égaux à 13 et à 15. C'est ainsi que différents géomètres, chacun de son côté, auront pu être conduits au triangle exprimé par les nombres 13, 14, 15.

(25) Dans le triangle obtusangle, multiplie la perpendiculaire qui tombe de l'angle obtus sur le côté opposé, par la moitié de ce côté opposé, ou inversement (*Beha-Eddîn*. — *Khelasat al Hisàb*).

Dans un triangle obtusangle, la base multipliée par la moitié de la perpendiculaire, est l'aire (*Ganésa*. Commentaire au *Lilavati*). Ce même géomètre hindou donne une démonstration directe et bien simple du théorème qui exprime la surface du triangle en fonction de sa base et de sa hauteur. Il forme un rectangle qui a même base que le triangle et pour hauteur la moitié de la perpendiculaire. L'inspection de la figure fait reconnaître *à priori* que la surface du triangle est égale à celle du rectangle, d'où il conclut que l'aire du triangle est égale au produit de la base par la moitié de la perpendiculaire.

Dans le *Khelesat al Hisàb*, nous avions répété d'après M. *Taylor* de Bombay, qu'il n'existait aucun exemple de la multiplication par le *Réseau* ou *Shabacah* dans les livres sanscrits ; la traduction du *Lilavati* par l'illustre *Colebrooke*, nous prouve le contraire ; l'exemple qui se rencontre dans le commentaire est de *Ganesa*.

(26) ***Mohammed ben Moussa*** et ***Beha-Eddin*** ne définissent point la circonférence; ***Beha-Eddin*** divise la ***ligne courbe*** en ***ligne circulaire qui est connue***, et en ***courbe non circulaire***, dont il n'a point à s'occuper dans son ***Khelasat al Hisâb***.

Dans les ouvrages hindous, dans ceux de ***Brahmagupta*** et de ***Bhascara***, on ne voit pas de définition du cercle, et ***Ganésa*** explique cette absence de définition, en disant que le cercle et l'arc n'ont pas besoin d'être définis.

(27) Il est à remarquer que ni ***Mohammed ben Moussa***, ni ***Beha-Eddin*** n'emploient de mot unique équivalent au nôtre: *rayon*. Ils mentionnent toujours le diamètre, et pour *rayon*, ils disent demi-diamètre. Les Hindous ont un mot *carcata*, ouverture de compas, littéralement *écrevisse*, pour désigner le rayon (p. 90 du *Lilavati*).

(28) H : 10 : : 4 : 2 d'où H = 20.

$$\text{Pyramide entière} = 5\frac{1}{3} \times 20 = 106\frac{2}{3}.$$

$$\text{Fragment ajouté} = \frac{4}{3} \times 10 = 13\frac{1}{3}.$$

$$\text{Pyramide tronquée} = 106\frac{1}{3} - 13\frac{1}{3} = 83\frac{1}{3}.$$

Pour la pyramide tronquée, multiplie un côté de la plus grande base par la hauteur, et divise le produit par la différence entre un côté de cette base et un de la petite, tu as alors la hauteur de la pyramide entière; mène ensuite l'opération à fin (***Beha-Eddin***).

(29) C'est-à-dire si le pilier prend la forme d'un cône tronqué. Alors multiplie le diamètre de la plus grande base par la hauteur, et divise le produit par la différence des diamètres des deux bases, il en résulte la hauteur du cône comme s'il était entier, etc. (***Beha-Eddin***).

(30) Voici la marche suivie par l'auteur pour résoudre cette question :

$$H = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{64} = 8$$

$$S = 8 \times 6 = 48$$

$$S = x^2 + x\left(6 - \frac{1}{2}x\right) + (8 - x)\frac{1}{2}x;$$

donc
$$x^2 + 6x - \frac{1}{2}x^2 + 4x - \frac{1}{2}x^2 = 48$$

$$10\,x = 48$$

$$x = \frac{48}{110} = 4\frac{4}{5}.$$

SUR L'ENVELOPPE

des perpendiculaires aux extrémités des diamètres des ellipses

(*Voir* p. 540).

PAR M. AYNARD,
Professeur de mathématiques.

Considérons maintenant le cas où la quantité $2b^2 - a^2$ est négative. En se reportant toujours aux valeurs primitives de x et de y, on constate facilement que la courbe passe encore aux extrémités A et A′, B et B′ des deux axes de l'ellipse lorsque l'on suppose $\varphi = 0$, et $\varphi = 2\pi$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$, et $\varphi = \frac{3\pi}{2}$. Si l'on donne à φ une valeur positive très-peu différente de zéro $\varphi = \alpha$, la valeur de y est fort petite et négative, en sorte que le point décrivant s'abaisse au-dessous de l'axe des abscisses; en même temps la valeur de x est plus grande que α, ce qui prouve que la courbe s'éloigne à la fois des deux axes à partir du point A; on peut facilement vérifier ce résultat en remplaçant, comme on l'a déjà fait plus haut, $\sin \alpha$ par α, et $\cos \alpha$ par $1 - \frac{\alpha^2}{2}$, et négligeant les puissances de α supérieures à la seconde. Un calcul précédent nous a montré que s'il existe un maximum pour x, il correspond à une valeur de φ, dont le cosinus est :

$$\cos \varphi = \sqrt{\frac{2a^2 - b^2}{3c^2}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\mu)$$

Cette valeur, inadmissible dans l'hypothèse $2b^2 - a^2 > 0$, est au contraire parfaitement admissible dans le cas actuel, et détermine pour x une valeur maxima que l'on peut calculer. L'ordonnée a aussi un maximum qu'il est utile de trouver pour savoir quelle est celle des deux coordonnées qui commence le plus tôt à décroître ; cherchons donc le maximum de la valeur absolue des valeurs négatives de y, c'est-à-dire le maximum de l'expression

$$\sin\varphi\left[(a^2-2b^2)-c^2\sin^2\varphi\right].$$

Après avoir multiplié par le facteur constant c, on met ce produit sous la forme :

$$(c^2\sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}}\,(a^2-2b^2-c^2\sin^2\varphi),$$

et comme la somme des facteurs est constante, l'équation qui détermine la valeur cherchée est :

$$2c^2\sin^2\varphi=a^2-2b^2-c^2\sin^2\varphi;$$

d'où :

$$\sin\varphi=\sqrt{\frac{a^2-2b^2}{3c^2}}\quad\ldots\ldots\ldots\quad(\nu).$$

Il est important de remarquer que la valeur de l'angle φ dont on vient de trouver le sinus est la même que celle qui rend x maximum ; la somme des carrés des expressions (μ) et (ν) est égale à l'unité. Lors donc que φ croît jusqu'à cette limite, la courbe s'éloigne à la fois des deux axes, puis elle se rapproche simultanément de l'un et de l'autre, lorsque φ reçoit des valeurs plus grandes. Au point c, où x et y ont atteint en même temps leur maximum, il y a nécessairement rebroussement, puisqu'une courbe algébrique ne peut avoir de points anguleux ; il restera seulement à décider si le rebroussement est de première ou de seconde espèce. Au delà du point c, la courbe rentre dans l'intérieur de l'ellipse ABA'B', et elle coupe l'axe des abscisses une seconde fois ; car on trouve, en annulant l'ordonnée et en omettant la solution $\sin\varphi=0$ déjà connue :

$$\sin\varphi=\sqrt{\frac{a^2-2b^2}{c^2}}.$$

La valeur de x correspondante est :

$$x=\frac{2bc}{a}.$$

Enfin, lorsque $\varphi=\frac{\pi}{2}$, la courbe passe en B à l'extrémité du petit axe, et pour des valeurs de φ plus grandes, on obtient quatre autres parties de courbes exactement semblables au quart de courbe ACMB (*fig.* 52).

Consultons maintenant le coefficient angulaire de la tangente ; en se reportant à l'expression primitivement trouvée, on voit qu'il est infini en A et en A′, ce qui confirme qu'en ces points comme dans le premier cas la tangente est verticale ; en B et en B′, elle est horizontale, puisque la valeur du coefficient angulaire s'annule pour $\varphi=\frac{\pi}{2}, =\frac{3\pi}{2}$. Au point limité dans le sens des x et des y, $\frac{dy}{dx}$ se présente sous la forme $\frac{0}{0}$; on aura sa véritable valeur en prenant la dérivée respective des deux termes, ce qui donne pour le point C :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a}{b}\cdot\frac{6c^2\sin\varphi\cos^2\varphi-3c^2\sin^3\varphi-(2b^2-a^2)\sin\varphi}{-6c^2\cos\varphi\sin^2\varphi+3c^2\cos^3\varphi-(2a^2-b^2)\cos\varphi}$$

$$=-\frac{a\sin\varphi}{b\cos\varphi}\cdot\frac{6c^2\cos^2\varphi-3c^2\sin^2\varphi-(2b^2-a^2)}{6c^2\sin^2\varphi-3c^2\cos^2\varphi+(2a^2-b^2)}$$

$$=-\frac{a}{b}\sqrt{\frac{a^2-2b^2}{2a^2-b^2}}\cdot\frac{2(2a^2-b^2)-(a^2-2b^2)-(2b^2-a^2)}{2(a^2-2b^2)-(2a^2-b^2)+(2a^2-b^2)};$$

d'où finalement :

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{a}{b}\sqrt{\frac{a^2-2b^2}{2a^2-b^2}}\cdot\frac{2a^2-b^2}{a^2-2b^2}.$$

Comme l'on a, d'après l'hypothèse, $a^2 - 2b^2 > 0$, et que $2a^2 - b^2$ est toujours une quantité positive, l'expression précédente est négative, et par conséquent la tangente forme au point C un angle obtus avec la partie positive de l'axe des abscisses.

Il est nécessaire, pour déterminer si la courbe offre dans son cours des points d'inflexion, de rechercher si $\frac{d^2y}{dx^2}$ peut s'annuler. Il vient, en différentiant, l'expression de $\frac{dy}{dx}$.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{a}{b\mathrm{D}^2} \{ [3c^2\cos^2\varphi\sin\varphi - (2a^2 - b^2)\sin\varphi] [6c^2\sin\varphi\cos^2\varphi - \\ - 3c^2\sin^3\varphi - (2b^2 - a^2)\sin\varphi] - [3c^2\sin^2\varphi\cos\varphi + \\ + (2b^2 - a^2)\cos\varphi] [- 6c^2\cos\varphi\sin^2\varphi + 3c^2\cos^3\varphi - \\ - (2a^2 - b^2)\cos\varphi] \},$$

expression dans laquelle on a posé :

$$\mathrm{D} = (3c^2\cos^2\varphi + b^2 - 2a^2)\sin\varphi.$$

Pour savoir si $\frac{d^2y}{dx^2}$ peut s'annuler, il suffit d'égaler à zéro la quantité comprise entre les accolades, et de voir si les racines de l'équation ainsi formée sont imaginaires ; on posera donc :

$$\sin^2\varphi[3c^2\cos^2\varphi - (2a^2 - b^2)] [6c^2\cos^2\varphi - 3c^2\sin^2\varphi - (2b^2 - a^2)] - \\ - \cos^2\varphi [3c^2\sin^2\varphi + (2b^2 - a^2)] [- 6c^2\sin^2\varphi + 3c^2\cos^2\varphi - \\ - (2a^2 - b^2) = 0 ;$$

ou bien :

$$\sin^2\varphi[3c^2\cos^2\varphi - (2a^2 - b^2)] [- 9c^2\sin^2\varphi + 7a^2 - 8b^2] + \\ + \cos^2\varphi [3c^2\sin^2\varphi + (2b^2 - a^2)] [-9c^2\cos^2\varphi - 7b^2 + 8a^2] = 0.$$

Introduisons la tangente à l'effet de n'avoir qu'une seule ligne trigonométrique, il vient :

$$\left.\begin{array}{r}9c^2(2a^2-b^2)\\-(2a^2-b^2)(7a^2-8b^2)\\ \end{array}\right| \begin{array}{r}\mathrm{tg}^4\varphi+18c^4\\+(2b^2-a^2)(8a^2-7b^2)\\-(2a^2-b^2)(7a^2-8b^2)\end{array}\left|\begin{array}{l}\mathrm{tg}^2\varphi-9c^2(2b^2-a^2)\\ \quad+(2b^2-a^2)(8a^2-\\ \end{array}\right.$$

Cette équation revient finalement en réduisant le plus pos sible à la suivante :

$$(2a^2-b^2)^2\,\mathrm{tang}^4\varphi-4(c^4-a^2b^2)\,\mathrm{tang}^2\varphi+(2b^2-a^2)^2=0$$

d'où l'on tire :

$$\mathrm{tg}\varphi=\pm\sqrt{2(c^4-a^2b^2)^2\pm\sqrt{4(c^4-a^2b^2)^2-(2a^2-b^2)^2(2b^2-a^2)^2}}$$

Pour que les racines soient réelles, il faut en premier lie que l'on ait :

$$4(c^4-a^2b^2)^2-(2a^2-b^2)^2\,(2b^2-a^2)^2>0.\;\ldots\ldots(\tau),$$

condition qui revient à :

$$[\,2(c^4-a^2b^2)+(2a^2-b^2)\,(2b^2-a^2)]\,[2(c^4-a^2b^2)-$$
$$-(2a^2-b^2)\,(2b^2-a^2)>0.$$

Le premier facteur se réduit à $-a^2b^2$; donc il faut, pour qı l'inégalité précédente puisse avoir lieu, que le second facteı soit négatif, c'est-à-dire que l'on ait :

$$a^4+b^4-\frac{11}{4}\,a^2b^2<0\,;$$

ou bien :

$$\left(a^2-\frac{11}{8}b^2\right)^2-b^4\left(\frac{11^2}{8^2}-1\right)^2<0\,;$$

ou :

$$\left(a^2-\frac{11}{8}\,b^2\right)^2-\left(b^2\,\frac{\sqrt{57}}{8}\right)^2<0\,;$$

ou enfin :

$$\left(a^2-b^2\,\frac{11+\sqrt{57}}{8}\right)\left(a^2-b^2\,\frac{11-\sqrt{57}}{8}\right)<0.$$

Il résulte de cette dernière inégalité que a^2 doit toujou être compris entre $b^2\left(\frac{11-\sqrt{57}}{8}\right)$ et $b^2\left(\frac{11+\sqrt{57}}{8}\right)$; or, a^2 est évidemment plus grand que la première quantité; donc la condition (τ) revient définitivement à la suivante :

$$8a^2 < b^2\,(11+\sqrt{57}).$$

Mais il ne suffit pas que la quantité soumise au second radical dans l'expression de tang φ soit positive, il faut encore que la quantité soumise au premier radical le soit aussi, ce qui exige que l'on ait :

$$c^4 - a^2b^2 > 0,$$

ou :

$$a^4 + b^4 - 3a^2b^2 > 0.$$

Cette condition revient à :

$$\left(a^2 - \frac{3}{2}b^2\right)^2 - \frac{5}{4}b^4 > 0;$$

ou bien à :

$$\left(a^2 - \frac{(3+\sqrt{5})b^2}{2}\right)\left(a^2 - \frac{(3-\sqrt{5})b^2}{2}\right) > 0.$$

Cette dernière inégalité exige que la valeur de a^2 soit supérieure ou inférieure à chacun des deux facteurs pour qu'ils puissent être de même signe, et comme l'on a :

$$a^2 > \frac{3-\sqrt{5}}{2}\,b^2,$$

l'on devra avoir aussi :

$$a^2 > \frac{3+\sqrt{5}}{2}\,b^2 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\sigma)$$

On déduit de la comparaison des inégalités (τ) et (σ)

$$12+4\sqrt{5} < 11+\sqrt{57},$$

inégalité absurde, qui apprend que les valeurs de tang φ sont constamment imaginaires. Il s'ensuit que $\frac{d^2y}{dx^2}$ ne peut s'annuler et que par conséquent la courbe est exempte d'inflexions. Ce dernier résultat fait connaître que le rebroussement qui existe au point C est du premier genre, car il y aurait au moins une inflexion si le rebroussement était de seconde espèce.

Cherchons maintenant le périmètre de la courbe : en différentiant les expressions (1) et (2) valeurs primitives de x et de y on trouve après quelques réductions faites :

$$b \sin\varphi \, dy + a \cos\varphi \, dx = 0,$$

$$b \cos\varphi \, dy - a \sin\varphi \, dx = [(2b^2 - a^2)\cos^2\varphi + (2a^2 - b^2)\sin^2\varphi]\, d\varphi;$$

d'où l'on déduit pour la différentielle de l'arc :

$$ds = \frac{\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}}{ab} [(2b^2 - a^2)\cos^2\varphi + (2a^2 - b^2)\sin^2\varphi]\, d\varphi.$$

Posons :

$$\operatorname{tang}\psi = \frac{a\cos\varphi}{b\sin\varphi},$$

φ étant ainsi l'angle que fait avec le petit axe de l'ellipse le diamètre qui aboutit au point dont les coordonnées sont

$$x = a\cos\varphi \quad \text{et} \quad y = b\sin\varphi;$$

il viendra par une substitution qui n'offre aucune difficulté :

$$ds = \frac{ab\,[(2b^2 - a^2)\,b^2\sin^2\psi + (2a^2 - b^2)\,a^2\cos^2\psi]\,d\psi}{(a^2\cos^2\psi + b^2\sin^2\psi)^{\frac{5}{2}}},$$

d'où

$$\frac{1}{ab}s(\psi_0, \psi_1) = \int_{\psi_0}^{\psi_1} \frac{[(2b^2 - a^2)b^2\sin^2\psi + (2a^2 - b^2)a^2\cos^2\psi]\,d\psi}{(a^2\cos^2\psi + b^2\sin^2\psi)^{\frac{5}{2}}} \ldots\ldots(3),$$

en désignant par $s(\psi_0, \psi_1)$ l'arc de la courbe compté entre les points correspondants aux valeurs ψ_0 et ψ_1 de l'angle ψ.

Augmentons et diminuons le second membre de l'équation (3) de l'expression

$$\int_{\psi_0}^{\psi_1} \frac{[(2b^2-a^2)a^2\cos^2\psi+(2a^2-b^2)b^2\sin^2\psi]d\psi}{(a^2\cos^2\psi+b^2\sin^2\psi)^{\frac{5}{2}}},$$

il viendra :

$$\frac{1}{ab}s(\psi_0,\psi_1)=\int_{\psi_0}^{\psi_1}\frac{(a^2+b^2)\,d\psi}{(a^2\cos^2\psi+b^2\sin^2\psi)^{\frac{3}{2}}}-$$

$$-\int_{\psi_0}^{\psi_1}\frac{2a^2b^2d\psi}{(a^2\cos^2\psi+b^2\sin^2\psi)^{\frac{5}{2}}}+\int_{\psi_0}^{\psi_1}\frac{(a^4\cos^2\psi+b^4\sin^2\psi)d\psi}{(a^2\cos^2\psi+b^2\sin^2\psi)^{\frac{5}{2}}}\ldots (4).$$

D'ailleurs l'équation (4) peut s'écrire de la manière suivante :

$$\frac{1}{ab}s(\psi_0,\psi_1)=\int_{\psi_0}^{\psi_1}\frac{2(a^4\cos^2\psi+b^4\sin^2\psi)d\psi}{(a^2\cos^2\psi+b^2\sin^2\psi)^{\frac{5}{2}}}-$$

$$-\int_{\psi_0}^{\psi_1}\frac{a^2b^2\,d\psi}{(a^2\cos^2\psi+b^2\sin^2\psi)^{\frac{3}{2}}}.$$

Rapprochant la dernière égalité de l'égalité (3) il vient :

$$\int_{\psi_0}^{\psi_1}\frac{(a^4\cos^2\psi+b^4\sin^2\psi)d\psi}{(a^2\cos^2\psi+b^2\sin^2\psi)^{\frac{5}{2}}}+\int_{\psi}^{\psi_1}\frac{a^2b^2d\psi}{(a^2\cos^2\psi+b^2\sin^2\psi)^{\frac{3}{2}}}=$$

$$=\int_{\psi_0}^{\psi_1}\frac{(a^2+b^2)d\psi}{(a^2\cos^2\psi+b^2\sin^2\psi)^{\frac{3}{2}}},$$

d'où

$$\int_{\psi_0}^{\psi_1} \frac{2(a^4\cos^2\psi+b^4\sin^2\psi)d\psi}{(a^2\cos^2\psi+b^2\sin^2\psi)^{\frac{5}{2}}} - \int_{\psi_0}^{\psi_1} \frac{a^2b^2d\psi}{(a^2\cos^2\psi+b^2\sin^2\psi)^{\frac{5}{2}}} =$$

$$\int_{\psi_0}^{\psi_1} \frac{2(a^2+b^2)d\psi}{(a^2\cos^2\psi+b^2\sin^2\psi)^{\frac{3}{2}}} - \int_{\psi_0}^{\psi_1} \frac{3a^2b^2d\psi}{(a^2\cos^2\psi+b^2\sin^2\psi)^{\frac{5}{2}}}$$

Donc

$$\frac{1}{ab}s(\psi_0,\psi_1) = \int_{\psi_0}^{\psi_1} \frac{2(a^2+b^2)d\psi}{(a^2\cos^2\psi+b^2\sin^2\psi)^{\frac{3}{2}}} - \int_{\psi_0}^{\psi_1} \frac{3a^2b^2d\psi}{(a^2\cos^2\psi+b^2\sin^2\psi)^{\frac{5}{2}}},$$

ou en appelant e l'excentricité $\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$,

$$\frac{1}{b}s(\psi_0,\psi_1) = \int_{\psi_0}^{\psi_1} \frac{2(2-e^2)d\psi}{(1-e^2\sin^2\psi)^{\frac{3}{2}}} - \int_{\psi_0}^{\psi_1} \frac{3(1-e^2)d\psi}{(1-e^2\sin^2\psi)^{\frac{5}{2}}} \cdots\cdots \quad (4).$$

Considérons maintenant l'expression

$$\frac{e^2\sin\psi\cos\psi}{(1-e^2\sin^2\psi)^{\frac{3}{2}}}.$$

Différentions-la par rapport à ψ et puis intégrons entre les limites ψ_0 et ψ_1 il viendra :

$$\frac{e^2\sin\psi_1\cos\psi_1}{(1-e^2\sin^2\psi_1)^{\frac{3}{2}}} - \frac{e^2\sin\psi_0\cos\psi_0}{(1-e^2\sin^2\psi_0)^{\frac{3}{2}}} = \int_{\psi_0}^{\psi_1} \frac{2(2-e^2)d\psi}{(1-e^2\sin^2\psi)^{\frac{3}{2}}} -$$

$$- \int_{\psi_0}^{\psi_1} \frac{3(1-e^2)d\psi}{(1-e^2\sin^2\psi)^{\frac{5}{2}}} - \int_{\psi_0}^{\psi_1} \frac{d\psi}{(1-e^2\sin^2\psi)^{\frac{1}{2}}}.$$

On tire de cette dernière égalité et de l'égalité (4) :

$$\frac{1}{b}s(\psi_0,\psi_1) = \int_{\psi_0}^{\psi_1} \frac{d\psi}{(1-e^2\sin\psi^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{e^2\sin\psi_1\cos\psi_1}{(1-e^2\sin^2\psi_1)^{\frac{3}{2}}} - \frac{e^2\sin\psi_0\cos\psi_0}{(1-e^2\sin\psi_0)^{\frac{3}{2}}}.$$

Si l'on fait $\psi_0 = 0$ et que l'on appelle $s(\psi_1)$ ce que devient $s(\psi_0, \psi_1)$ on a :

$$s(\psi_1) = b\mathrm{F}(e, \psi_1) + \frac{be^2 \sin\psi_1 \cos\psi_1}{(1 - e^2 \sin^2\psi_1)^{\frac{1}{2}}}.$$

C'est le résultat de M. Talbot. Si l'on fait en outre $\psi_1 = \frac{\pi}{2}$, il vient :

$$s = 4b\,\mathrm{F}(e),$$

s désignant le périmètre total de la courbe.

Ajoutons en dernier lieu que l'expression

$$\frac{be^2 \sin\psi \cos\psi}{(1 - e^2 \sin^2\psi)^{\frac{3}{2}}}$$

représente la distance de l'extrémité du diamètre de l'ellipse qui fait un angle ψ avec le petit axe au point de la courbe correspondant ; c'est ce que l'on vérifie aisément en éliminant $x - a\cos\psi$ et $y - b\sin\psi$ entre les équations (1) et (2) et l'équation suivante :

$$r^2 = (x - a\cos\psi)^2 + (y - b\sin\psi)^2,$$

et puis remplaçant dans la valeur de r tirée de l'équation finale $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$ par leurs valeurs en $\sin\psi$ et $\cos\psi$.

DES SYSTÈMES SIMULTANÉS

de description de l'ellipse par le point d'une droite de longueur constante inscrite dans un angle fixe,

PAR M. BRETON (DE CHAMP),
Ingénieur des ponts et chaussées.

—

Dans une note publiée en 1844 (*), j'ai eu l'occasion de

(*) *Nouvelles Annales des Mathématiques*, t. III, p. 292.

faire remarquer que certaines propriétés de l'ellipse dépendent de ce que cette courbe est une épicycloïde *allongée* ou *raccourcie* décrite par le point du plan d'un cercle roulant intérieurement sur une circonférence d'un diamètre double du sien. En se plaçant à ce point de vue, on est conduit à des théorèmes intéressants ; telle est la construction du rayon de courbure de l'ellipse donnée par M. Transon (*). Je me propose actuellement d'y montrer quelques-unes des relations par lesquelles les axes principaux de l'ellipse et ses diamètres conjugués sont liés aux divers systèmes de génération de cette courbe, au moyen du point d'une droite de longueur constante inscrite dans un angle fixe, *qui ont la propriété de décrire simultanément l'ellipse par un même point mobile.*

1. Je rappellerai d'abord que si MN est une droite de longueur constante continuellement inscrite dans l'angle droit YOX, le point i de cette droite décrit une ellipse ayant pour axes les côtés de cet angle, et que les segments iN, iM *additifs* ou *soustractifs* (**) sont égaux en longueur aux demi-axes OA, OB comptés suivant OX, OY (le lecteur est prié de faire les figures).

Supposons, pour fixer les idées, que l'on ait un système additif ; pour avoir le système correspondant, décrivez du point O, comme centre avec le rayon OA, une circonférence, et soit I celui de ses points qui se trouve avec i sur une même perpendiculaire IP à OX. Menez ensuite parallèlement au rayon OI la droite iM'N', qui rencontre OX en M' et OY en N' ; il est aisé de voir que iM', iN', et par suite M'N', sont des longueurs constantes, quelle que soit la position du point décrivant. Car, à cause des parallèles, iN' = OI, par conséquent le triangle iNN' est isocèle, d'où il suit que iMM' l'est

(*) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, t. III, p. 595, et *Journal de M. Liouville*, t. X, p. 151.

(**) Ces dénominations sont dues à M. Terquem. V. *Manuel de Géométrie.*

aussi ; donc $iM' = iM$. On voit par là que le point i peut être regardé à volonté comme placé sur MN ou sur le prolongement de M'N', de manière à déterminer dans le premier cas des segments *additifs*, et dans le second, des segments *soustractifs*. C'est en cela que consiste le type le plus simple de deux systèmes *simultanés* de description de l'ellipse ; je les désignerai, comme les segments eux-mêmes, par les noms d'*additif* et de *soustractif*.

Observation. Rien n'empêche de faire la recherche du second système au moyen de la circonférence décrite du centre O avec le rayon OB ; on n'obtient de cette manière aucun nouveau résultat, ainsi qu'il est facile de s'en convaincre.

2. Lorsqu'on prend, au lieu de l'angle droit YOX, un angle quelconque, il y a non plus *deux*, mais *quatre* systèmes simultanés, ayant, comme les précédents, des segments de même longueur ; ce qui suit a pour objet leur détermination et l'exposition de leurs propriétés les plus saillantes.

Pour bien comprendre l'existence et la raison d'être de ces systèmes, il faut remonter à la génération des épicycloïdes. Lorsqu'une courbe roule sur une autre courbe, chaque point attaché invariablement à la première et entraîné avec elle décrit une trajectoire normale à la droite qui le joint au point de contact, principe que l'on doit à Descartes. Dans le cas particulier d'un cercle qui roule intérieurement sur une circonférence d'un rayon double du sien, la tangente à la trajectoire du point de la circonférence mobile passe donc constamment par le centre du cercle fixe, d'où il suit évidemment que cette trajectoire est un de ses diamètres ; cette proposition est d'ailleurs facile à démontrer d'une manière tout à fait élémentaire.

Concevons présentement que par le centre O du cercle fixe on ait mené deux droites OX, OY, et que dans une de ses positions la circonférence mobile les coupe en M et N, si l'on regarde la corde MN comme attachée invariablement à cette circonférence, ses extrémités, d'après ce qui vient d'être dit, demeureront respectivement sur les côtés de l'angle YOX, et si ce dernier est droit, tout point i de MN décrira une ellipse.

Quand au lieu de l'angle droit on a un angle yOx aigu ou obtus, et une corde mn, la conclusion est la même; seulement les côtés Ox, Oy ne sont plus les axes de la courbe. Pour les trouver, il faut mener par le point décrivant i le diamètre MN du cercle mobile, et tirer les droites indéfinies OMX, OMY, lesquelles seront visiblement les axes cherchés, l'angle YOX étant droit par construction. Tout point i attaché invariablement au plan du cercle qui roule décrit donc une ellipse, et on peut le regarder comme lié à une corde quelconque, continuellement inscrite dans un angle fixe. De là une infinité de systèmes, *additifs* ou *soustractifs*, suivant que le point i est intérieur ou extérieur au cercle mobile. Il n'est même pas nécessaire que ce point soit sur la corde mn ou sur son prolongement; le sommet d'un triangle quelconque imn construit sur mn décrit une ellipse comme tout point de cette corde (*).

Si l'on appelle a, b les demi-axes, α, β, les segments, et φ, l'angle du système, on a évidemment les relations $\alpha\beta = ab$, et $\sin\varphi = \frac{\alpha \pm \beta}{a \pm b}$, selon que le système est *additif* ou *soustractif*.

3. Je vais chercher maintenant parmi tous ces systèmes ceux où les segments, soit *additifs*, soit *soustractifs*, comptés sur une corde ou sur son prolongement, entre le point i et les côtés d'un angle fixe, sont de même longueur, comme

(*) Voir *Nouvelles Annales de Mathématiques*, t. V, p. 191, la solution analytique de M. Terquem.

il arrive dans le cas d'un angle droit. Supposons un système *additif*, composé de la corde mn inscrite dans l'angle yOx. Après avoir tracé la circonférence Omn et déterminé les points M, N, où elle est rencontrée par les axes OX, OY, je prends les arcs $Mm_1 = Mm$, $Nn_1 = Nn$; de cette manière, on a la corde $m_1n_1 = mn$, et elle passe visiblement en i. Cette corde et l'angle y_1Ox_1, dont les côtés passent en m_1, n_1, forment donc un deuxième système *additif* qui satisfait à la condition d'avoir des segments égaux en longueur à ceux du système donné. Il y a plus : que l'on décrive du centre i avec l'un des segments im par exemple comme rayon, une circonférence qui coupe Ox, Ox_1 en m', m_1', on verra avec un peu d'attention que les droites im', im_1' rencontrent Oy_1, Oy' en des points n_1', n', situés sur la circonférence décrite du même centre i avec le second segment in, d'où il suit que le quadrilatère $m'm_1'n'n_1'$ est un trapèze isocèle, et par conséquent *inscriptible.* La circonférence déterminée par ses sommets passe nécessairement aussi par le point O, car on aperçoit sans peine que les angles $m'On'$, $m'm_1'n'$ du quadrilatère $On'm_1'm'$, qui a trois sommets de communs avec $m'm_1'n'n_1'$, sont supplémentaires l'un de l'autre : cela résulte simplement des constructions indiquées.

Si donc on imagine que cette circonférence roule à l'intérieur d'un cercle de rayon double, les cordes $m'n_1'$, $m_1'n'$, que le point i partage en deux segments *soustractifs* égaux à im, in, demeureront inscrites dans les angles y_1Ox, yOx_1; en d'autres termes, on a deux nouveaux systèmes, nécessairement *soustractifs*, et il est facile de s'assurer qu'il n'y en a aucun autre où les segments soient de même longueur.

4. De ce que l'on a pris $Mm_1 = Mm$, $Nn_1 = Nn$, je conclus que l'axe OX est la bissectrice des angles xOx_1, yOy_1, et l'axe OY la bissectrice de leurs suppléments.

Une semblable relation existe entre les axes et les droites qui vont du centre O de la courbe ou des circonférences fixes aux centres des cercles mobiles ; il suffit, pour le voir, de construire les deux systèmes *additif* et *soustractif*, relatifs aux axes, comme au n° 1.

Ceci compris, je nommerai *correspondants* parmi les systèmes qui viennent d'être définis par l'égalité des segments, *ceux dont les angles ont un côté commun*. Ils sont nécessairement d'espèce différente, c'est-à-dire que l'un est additif et l'autre soustractif. L'angle formé par les deux côtés non communs et son supplément ont pour bissectrices les axes de l'ellipse.

5. Lorsque la corde mobile mn du système additif prend la position GH perpendiculaire à l'un des côtés Ox de l'angle fixe, de manière que le triangle GOH soit rectangle en H, celle du système *soustractif correspondant* relatif à Ox devient aussi perpendiculaire sur Ox en H, c'est-à-dire que les deux cordes coïncident alors en direction.

Dans ce cas, OG est un diamètre du cercle roulant, et le point G est le *centre instantané de rotation* (*) ; donc GH n'est autre chose que la normale à l'ellipse menée par le point décrivant i, d'où je conclus que la droite Oi est, en direction, le *diamètre conjugué* au côté Ox.

Cela se démontre d'ailleurs directement : supposez que la corde GH prenne les positions LP, LQ, qui ont en commun le point L de OG ; du point K' où Oi coupe la perpendiculaire LK, abaissée de L sur Ox ; menez à cette droite une parallèle qui rencontre LP, LQ en p, q, je dis que ces deux points sont sur l'ellipse, car on a :

$$Pp : LP :: KK' : LK, \quad \text{et } KK' : LK :: Hi : GH ;$$

donc :

$$Pp : LH :: Hi : GH.$$

(*) Voir *Nouvelles Annales de Mathématiques*, t. II, p. 281.

Or, $LP = GH$ par construction ; donc $Pp = Hi$. Par un raisonnement semblable, on trouverait $Qq = Hi$; donc p et q sont bien les positions qu'occupe le point i sur LP, LQ. Remarquez maintenant que le triangle LPQ étant isocèle par construction, sa base PQ est partagée en deux parties égales par la perpendiculaire LK ; par conséquent, la même chose a lieu dans le triangle Lpq, et l'on a $K'p = K'q$, c'est-à-dire que la corde pq parallèle à Ox est divisée en deux parties égales par Oi, C. Q. F. D.

6. On peut même démontrer, sans sortir de cet ordre de considérations, que si Oi divise en deux parties égales toute corde menée dans l'ellipse parallèlement à Ox, réciproquement Ox divise en deux parties égales toute corde parallèle à Oi ; propriété fondamentale des diamètres conjugués, bien connue d'ailleurs par la théorie des sections coniques.

Suivez en effet la droite mobile, à partir de la position GH, jusqu'à ce qu'elle vienne se coucher sur Ox. A ce moment, G tombe en O, i en i', et H en H'. Pour savoir quelle est la position correspondante du cercle roulant, il suffit de remarquer que les extrémités de la droite mobile sont constamment les pieds des perpendiculaires abaissées de l'extrémité du diamètre qui passe en O sur les côtés de l'angle fixe. Donc en élevant sur les droites Ox, Oy des perpendiculaires aux points H', O, leur point d'intersection G' sera le point cherché, et $G'i'$ la normale à l'ellipse en i'. Or, il résulte de cette construction que $G'i'$ est perpendiculaire à Oi : donc la tangente en i' est parallèle à Oi.

Enfin le point H'', où la normale $G'i'$ rencontre Oi, étant sur la circonférence décrite par le diamètre OG', on peut regarder l'ellipse comme engendrée par le point i' de la droite G'H'', inscrite continuellement sans changer de longueur dans l'angle G'OH'' considéré comme fixe, auquel cas la démonstration du numéro qui précède s'applique mot pour mot.

7. La position particulière où la droite mobile est perpendiculaire à l'un des côtés de l'angle fixe, mérite encore d'être remarquée en ce qu'elle fournit une démonstration fort simple de la construction donnée par M. Chasles (*), pour déterminer, tant en direction qu'en grandeur, les axes d'une ellipse dont on connaît deux diamètres conjugués. Il ne s'agit, au fond, que de trouver un système de génération de l'ellipse composé d'une droite mobile dans un angle fixe. Or, d'après ce qui a été dit plus haut, si de l'extrémité du demi-diamètre Oi l'on abaisse une perpendiculaire iH sur Oi', et que l'on porte sur cette ligne, de part et d'autre du point i, $iG = ig = Oi'$, la droite GH et l'angle GOH formeront un système *additif* propre à la description de l'ellipse ; et comme d'autre part la droite gH et l'angle gOH formeront le système *soustractif* correspondant, on aura pour les directions cherchées des axes les bissectrices de l'angle Og et de son supplément. De plus, l'angle en H des triangles GHO, gHO étant droit, les longueurs OG, Og seront les diamètres des cercles roulants de l'un et de l'autre système, d'où il suit que la première sera égale à la somme, et la seconde à la différence des demi-axes.

8. On pourrait faire beaucoup d'autres applications des propriétés qui appartiennent aux *systèmes simultanés* ; mais pour éviter d'être trop long, je me bornerai à signaler dans la construction précécente les moyens qu'elle offre de démontrer *à la fois*, et le plus brièvement possible, les deux relations fameuses qui existent entre les axes principaux et les diamètres conjugués.

1° On a vu que M, N, étant les extrémités du diamètre déterminé par le point décrivant i dans le cercle roulant du

---

(*) Voir *Nouvelles Annales de Mathématiques*, t. III, p. 349, la vérification analytique par M. Terquem.

système *additif* décrit sur OG, iN, iM, sont les longueurs des demi-axes. Or, par les propriétés des cordes qui se coupent dans le cercle, on a $iN \times iM = iG \times iH = Oi' \times iH$, mais Oi' est la base, et iH la hauteur du parallélogramme $OiDi'$ construit sur les deux demi-diamètres conjugués, et $Oi' \times iH$ en mesure la surface : donc *cette surface est constante et égale au rectangle des demi-axes.*

2° Oi étant, par construction, une *médiane* du triangle GOg, on a la relation :

$$\overline{OG}^2 + \overline{Og}^2 = 2(\overline{Oi}^2 + \overline{Gi}^2) = 2(\overline{Oi}^2 + \overline{Oi'}^2);$$

mais

$$OG = iN + iM \text{ et } Og = iN - iM;$$

donc

$$\overline{OG}^2 + \overline{Og}^2 = 2(\overline{iN}^2 + \overline{iM}^2);$$

donc aussi

$$\overline{Oi}^2 + \overline{Oi'}^2 = \overline{iM}^2 + \overline{iN}^2,$$

c'est-à-dire que *la somme des carrés de deux demi-diamètres conjugués est constante et égale à la somme des carrés des demi-axes.*

Nota. Ce n'est que pour fixer les idées qu'on s'est servi, pour cette démonstration, uniquement du système *additif*; rien n'empêche d'y substituer le système soustractif, et en général toutes les fois que l'on n'a besoin d'en considérer qu'un seul, on peut prendre l'un ou l'autre indifféremment.

NOTE SUR LA DIVISION ABRÉGÉE

PAR M. FINCK,

docteur ès sciences, professeur à l'École d'artillerie et au collége royal de Strasbourg.

Ce que j'ai publié à ce sujet dans les *Annales*, et dans mon

Arithmétique, deuxième édition, page 108 (en 1843; comparez la note de la page 467 des *Annales*), sur la méthode de Fourier, fournit deux limites du dernier diviseur, outre celle que j'ai énoncée; ces deux autres limites sont : 9 fois le nombre des chiffres négligés au diviseur; ce qui est évident, et 9 fois le nombre des chiffres déterminés au quotient. Cette dernière est énoncée en toutes lettres dans mon Arithmétique, et n'oublions pas que la méthode de Fourier *n'est que la méthode ancienne appliquée à tous les chiffres du quotient*, *avec changement dans l'ordre suivant lequel on soustrait les produits partiels.* Si l'on en doute, on n'a qu'à traiter un même exemple par les deux. Cette même dernière règle étant indépendante du nombre des chiffres décimaux des deux nombres donnés, on voit que l'opération si effrayante, consistant dans l'addition des chiffres du diviseur, est écartée. Je vais présenter la démonstration de ladite règle, avec quelques modifications, pour mieux l'adapter à la méthode ancienne; elle ne diffère guère de celle qui a déjà été publiée dans les *Annales*. Voici comment on peut la formuler.

Si le dernier diviseur est $\overset{=}{>}\frac{9}{n}$ *multiplié par le nombre des chiffres du quotient traité comme un nombre entier, l'erreur du dernier chiffre de ce quotient est comprise entre* $+1$ et $-n$; *le nombre* n *est à volonté* $>$ *ou* <1.

Soit D le diviseur total, D_{i+1} le dernier diviseur, $d_i\, d_{i-1} \ldots d_{-\infty}$ la partie restante, i pouvant être $><0$; j'entends par d_i le chiffre qui exprime des unités égales chacune à 10^i. Je suppose que le quotient doive être déterminé à une unité près; la question peut toujours se ramener à ce cas. Si le diviseur est composé d'un nombre infini de chiffres ($d_{-\infty}$) tous les chiffres du quotient seront cherchés par la méthode abrégée; dans le cas contraire rien n'empêche de supposer nuls les chiffres du diviseur à partir du dernier chiffre significatif exclusivement. Soit le quotient $c_{a-1}\ldots c_1 c_0$; le dernier chiffre c_0 est déterminé par le diviseur D_{i+1}; l'avant-dernier c_1 par $D_{i+1}\, d_i$, etc. Le premier c_{a-1} par

$$D_{i+1}\, d_i\, d_{i-1}\ldots\, d_{i-a+2}.$$

Dans le dividende on prend sur la gauche ce qu'il faut pour trouver c_a au moyen du diviseur D, le reste à droite n'entre pas en ligne de compte. Soit R_{i+1} le reste final fourni par cette partie de gauche; le dernier dividente partiel donnant au quotient des unités simples, il s'ensuit que R_{i+1} est de même espèce que D_{i+1}, ce qu'on reconnaît d'ailleurs; de plus $R_{i+1} < D_{i+1}$; si donc à côté de R_{i+1} on descend les chiffres négligés au dividende, on aura un nombre $< D$ pour reste final par rapport au dividende total. Soit R ce reste, S la somme des produits partiels qui n'ont pas été retranchés; $R - S$ est égal au dividende moins le produit du diviseur total par le quotient $c_{a-1}\ldots c_0$. Si donc $S < nD$, $R - S$ tombe entre D et $-nD$, et l'erreur du quotient est comprise entre 1 et $-n$.

RS comprend les produits suivants :

$$c_{a-1} \times d_{i-a+1}\ldots d_{-\infty},$$

lequel

$$= c_{a-1}.\, 10^{a-1}.d_{i-a+1}\ldots\, d_{-\infty} < c_{a-1}.\, 10^{a-1}\, 10^{i-a+1},$$

$$= c_{a-1}.\, 10^{i+1},$$

$$c_{a-2} \times d_{i-a+2}\ldots\, d_{-\infty\, 1}\ldots$$

$$= c_{a-2}.\, 10^{a-2}.\, d_{i-a+2}\ldots\, d_{-\infty} < c_{a-2}.\, 10^{i+1},$$

$$c_0 \times d_i \ldots d_{-\infty}\ldots \qquad < c_0 \,.\, 10^{i+1}.$$

Donc

$$S < (c_{a-1} + c_{a-2} + \ldots + c_0)\; 10^{i+1} \leqq 9\,a.\; 10^{i+1}.$$

Et pour que $S < n\,D$, il suffit que

$$9a.\; 10^{i+1} \leqq n\; D_{i+1}.\; 10^{i+1},$$

ou que $$9\,a < n\, D_{i+1}. \quad c.\, q.\, f.\, d.$$

Ainsi prenez sur la gauche du diviseur une tranche plus grande que $\frac{9}{n}$ multiplié par le nombre des chiffres du quotient; à la suite conservez au diviseur autant de chiffres plus un, que le quotient doit en avoir, et au dividende négligez sur la droite tout ce qui ne sert pas à faire connaître le premier chiffre du quotient, au moyen des deux parties conservées au diviseur.

Voilà ma théorie : elle n'est pas longue; est-elle confuse? Elle donne le quotient à une unité près, si l'on veut. Il est clair du reste que si $R_{i+1} < c_{a-1} + c_{a-2} + \ldots + c_0$, le quotient est approché en moins.

Remarque 1. Si le diviseur est fini quant au nombre de ses chiffres, on peut prendre pour limite de D_{i+1} la somme des chiffres placés à sa droite. Car soit $D = D_{i+1} d_i \ldots d_{i-r}$;

$$\begin{aligned} S &= c_0 \times d_i \ldots d_{i-r} + 10.\, c_1 \times d_{i-1} \ldots d_{i-r} + \\ &\quad + 10^2 c_2\, d_{i-2} \ldots d_{i-r} + \ldots + 10^r c_r\, d_{i-r}, \\ &= d_{i-r} \times c_r \ldots c_2\, c_1\, c_0 + d_{i-r+1} \cdot 10.\, c_{r-1} \ldots c_0 + \ldots \\ &< c_{r-a}\, 10^{r+1} (d_{i-r} + {}^{i-r+1}d + \ldots + d_i). \end{aligned}$$

Cette somme exprimant des unités dont chacune vaut 10^{i-r}, de sorte que unités du premier ordre :

$$S < 10^{i+1} (d_{i-r} + \ldots + d_i);$$

si donc $$d_{i-r} + \ldots + d_i < D_{i+1},$$
on conclura que $S < D$, etc., $R < D$ et $> -D$.

Remarque 2. Dans les discussions scientifiques, il me semble bon de rester à la température 0; on évite ainsi les tempêtes dans un verre d'eau. J'admets ce qui est prouvé, rien de plus.

Voyez à ce sujet une discussion antérieure (il ne s'agit pas de celle de 1845). Du reste je ne parle ici que pour moi; je ne donne de conseils à personne, parce que la plupart du

temps, des conseils non demandés sont estimés moins que rien par ceux à qui on les donne. C'est le parti que je me permets de prendre moi-même quelquefois ; l'âge m'a donné un peu d'expérience.

BIBLIOGRAPHIE.

ÉLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE ET DE TRIGONOMÉTRIE, ouvrage exclusivement adopté par M. le ministre de la marine pour les écoles royales d'hydrographie, par C. F. FOURNIER, officier de la Légion d'honneur, examinateur de la marine. 3ᵉ édition, revue, corrigée et augmentée. Paris, 1846, in-8 de 568 pages ; 8 planches (*).

« Hoc enim habet ingenium humanum ut eum ad solida non sufficiat, in supervacaneis se atterat (*De dignitate et augmentis scientiarum*, lib. III, cap. 6) ; » l'esprit humain est ainsi fait : ne suffisant déjà plus à cultiver les connaissances utiles, solides, il se consume entièrement dans des recherches vainement superflues. Cette pensée de l'illustre philosophe ne s'applique pas seulement aux déplorables travaux scolastiques, qu'on glorifie derechef, vers lesquels on dirige tant de jeunes intelligences, qu'on cherche si malheureusement à introduire dans l'école ; invasion barbare, en parfaite harmonie avec cette profonde corruption du goût et de la langue littéraires, si manifestement visible, chez nos premiers écrivains, même chez les Quintiliens de l'époque. Dans les mathématiques aussi nous nous plaisons souvent à dissiper le temps *in supervacaneis*, et par conséquent à ne plus en conserver

---

(*) Robiquet, rue Pavée-Saint-André-des-Arts, nᵒ 2.

assez pour les choses indispensables. Toutefois, il s'est rencontré dans le dernier siècle un analyste éminent, auteur élémentaire, qui a su se préserver de ce défaut et écrire pour former des citoyens destinés à des carrières spéciales, et non pour plaire à des savants de profession. La méthode d'Euclide, renouvelée par Legendre, a fait oublier celle de Bezout. Ne serait-il pas possible de réunir les avantages des deux méthodes, d'allier la sévérité logique de l'une à l'utilité immédiatement pratique de l'autre? Un essai de ce genre mérite des encouragements, et c'est à ce titre surtout que nous paraît recommandable cette nouvelle édition dont nous avons à parler. La géométrie est divisée en trois sections : 1° les préliminaires ; 2° mesure des surfaces ; 3° les solides.

1° Les préliminaires (9-144). Sous cette dénomination, l'auteur range toutes les définitions, tous les théorèmes relatifs à l'égalité et à la similitude des figures, nécessaires pour mesurer les aires, évaluer les volumes, but final de cette partie de la science. La droite et la circonférence sont considérées, comme le fait Bezout, avant de venir à l'*angle ;* mais, à l'instar du même auteur, il aurait fallu définir l'angle comme le résultat du mouvement d'une droite qui s'est écartée d'une autre ; car c'est là la notion intime que nous avons de cette quantité. Ne pas vouloir parler du mouvement en géométrie, est une superstition d'autant moins tolérable, qu'Euclide lui-même nous en donne l'exemple dans la définition des trois corps ronds.

Des perpendiculaires et des obliques (p. 32). Nous croyons que ces propositions, que donnent tous les traités, forment double emploi ; ce sont de simples corollaires de théorèmes sur les relations de grandeurs dans le triangle, entre les côtés et les angles.

Parallèles (p. 40). On admet très-raisonnablement, comme axiome, l'égalité des angles correspondants.

La proposition sur l'équidistance des parallèles (p. 42) forme double emploi avec le théorème sur l'égalité des côtés opposés dans le parallélogramme.

Les positions possibles de deux circonférences sont soigneusement indiquées (p. 53); on désirerait plus de problèmes sur les contacts des cercles ; on en a souvent besoin dans les arts.

A la page 77, on lit ce théorème assez utile :

Si deux triangles rectangles ont seulement l'hypoténuse égale, le côté opposé au plus grand angle aigu est aussi le plus grand.

Les infiniment petits sont abordés franchement, sans ambages, sans ces interminables circonlocutions qui plâtrent le *saltum mortale* du rectiligne au curviligne, mais ne l'évitent pas; aussi, selon la méthode de Cavalleri, on dit que *le cercle peut être considéré comme un polygone régulier d'une infinité de côtés dont l'apothème se confond avec le rayon* (p. 106).

Le passage du commensurable à l'incommensurable est indiqué à l'instar de Legendre.

Les préliminaires contiennent toutes les propriétés usuelles des polygones semblables, des polygones réguliers, et les problèmes qui s'y rapportent.

2° Mesure des surfaces (145-232). L'auteur nomme *dimensions* la hauteur et la base d'un triangle, d'un rectangle, etc., expression commode en plusieurs occasions. Parlant de la *quadrature* du cercle, on lit (p. 158) : *actuellement on a obtenu le nombre* π, *ou le rapport de la circonférence au diamètre, d'une manière tellement approchée que la connaissance du rapport exact n'offrirait aucun avantage réel.* Depuis Lambert, il est rigoureusement démontré que *ce rapport* n'existe pas, c'est-à-dire qu'il est impossible de l'indiquer par un nombre *fini* de chiffres dans aucun système de numération, ni même le carré de ce rapport; mais il n'est pas prouvé que ce rapport ne puisse être indiqué par des radicaux, par des exponentielles, etc. ; il n'est pas même démontré qu'on ne puisse, à l'aide de la règle et du compas, construire une droite égale en longueur à une circonférence donnée, droite dont l'existence est certaine.

Le problème sur la surface d'une section faite dans la carène d'un vaisseau (p. 166) donne une formule d'une grande utilité pour d'autres applications du même genre.

Le théorème de Pythagore est démontré à l'aide des triangles semblables. Les plans et les angles polyèdres sont traités avec beaucoup de soins, et préparent convenablement aux théorèmes de la trigonométrie sphérique.

3° *Solides* (p. 233-257). *Solides* est synonyme de *volumes*, et tel devrait être le nom de cette troisième section; cette synonymie engage l'auteur à distinguer les corps solides et les corps *fluides*, distinction qui semble être ici peu à sa place.

Les volumes sont évalués d'après la méthode de Legendre.

L'auteur consacre un chapitre spécial très-intéressant aux *solides tronqués*. Nous signalons ce théorème : *le volume d'un parallélipipède tronqué est égal au produit de la demi-somme de deux faces parallèles multipliées par leur distance* (p. 281), ce qui établit une analogie entre ce volume et l'aire du trapèze.

On donne des applications au volume de la carène d'un vaisseau; pourquoi ne donne-t-on pas, dans les traités élémentaires, quelques exemples d'évaluation de volumes dans les problèmes si féconds de *déblais* et *remblais*?

Cette section est terminée par un ensemble de théorèmes sur la sphère et le triangle sphérique, théorèmes très-développés, complétement discutés, et préparant ainsi à l'étude des deux trigonométries placées à la fin de l'ouvrage (359-512). Toutes les formules sont éclaircies par des exemples numériques, et les cas *douteux* sont habilement *mnémonisés*. La démonstration des formules sin$(a \pm b)$, etc., paraît longue, embarrassée et peu mnémonique. On désirerait quelques applications soit nautiques, soit astronomiques : le savant auteur les a sans doute réservées pour son Traité de navigation.

Tout candidat qui possédera bien le contenu de cette géométrie, est capable de répondre aux examens sur cette partie. En faut-il davantage ? Tm.

CONSIDÉRATIONS ÉLÉMENTAIRES

Sur les nombres; suite naturelle des nombres impairs; crible pour les nombres premiers; table relative au nombre des nombres premiers.

—

1. *Toute quantité est la différence de deux carrés*, car l'on a identiquement :

$$p=\left(\frac{p+1}{2}\right)^2-\left(\frac{p-1}{2}\right)^2.$$

2. *Tout nombre impair* est la différence *de deux carrés entiers*, car on a l'identité :

$$2p+1=(p+1)^2-p^2.$$

3. *Tout nombre pairement pair est la différence de deux carrés entiers*, à cause de l'identité :

$$4p=(p+1)^2-(p-1)^2.$$

4. *Un nombre simplement pair ne peut être la différence de deux carrés entiers*; car ces deux carrés sont nécessairement ou tous deux pairs ou tous deux impairs; dès lors leur différence est divisible par 4.

5. *Une puissance entière quelconque d'un nombre entier est la différence de deux carrés*, car une telle puissance est pairement paire ou impaire.

Observation. Cette proposition *élémentaire*, consignée par M. Rallier des Ourmes dans l'article IMPAIR du *Dictionnaire des Mathématiques de l'encyclopédie méthodique* semblait avoir échappé à l'attention des arithmologues'; son existence a été récemment signalée à l'Académie des sciences (*Comptes rendus*, 1846, 2^{me} semestre, p. 151).

6. *La différence de deux carrés entiers est un nombre premier, lorsque la somme des racines est un nombre premier et que leur différence est égale à l'unité; et lorsque la différence de deux carrés entiers est un nombre premier, cette différence est nécessairement égale à la somme des racines.*

Remarque. M. Lescure a proposé d'employer la table des *carrés* des nombres naturels, pour opérer des multiplications; cet emploi est fondé sur l'identité

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = ab.$$

(*Comptes rendus de l'Académie*, 1835, 2^{me} semestre, p. 151.)

7. *La somme des* n *premiers termes de la suite naturelle des nombres impairs est égale à* n^2.

Observation. Cette proposition, déjà énoncée dans le *Lilavati* (chap. V, sect. 1), se démontre intuitivement en rangeant des points en carrés.

8. *Tout nombre pairement pair est égal à la somme d'une suite de nombres impairs consécutifs, en nombre pair;* c'est une conséquence de (3) et de (7).

9. *Tout nombre impair, non premier, est égal à la somme d'une suite de nombres impairs consécutifs, en nombre impair*; conséquence de (2) et de (7).

10. *La puissance entière d'un nombre entier est toujours égale à la somme d'une suite de nombres impairs consécutifs*; conséquence de (5).

11. *Un nombre simplement pair ne peut être égal à la*

somme d'une suite de nombres impairs consécutifs ; car ce nombre serait la différence de deux carrés, ce qui est impossible (4).

12. *Un nombre premier ne peut être égal à la somme d'une suite de nombres impairs consécutifs* ; conséquence de (6).

13. *Dans la suite naturelle des nombres impairs, faisant la somme de* n *termes en partant du premier* ; *la même somme en partant du second ; puis en partant du troisième, etc. ; on forme une progression arithmétique dont la raison est* 2n.

Soit x un terme quelconque de la suite ; le n^{me} terme à partir de x est $x+2n-2$ et la somme de ces n termes est $nx+n^2-n$; si l'on part du terme suivant $x+2$, cette somme devient $nx+n^2-n+2n$; donc, etc.

14. *Problème.* Trouver tous les nombres premiers compris entre 1 et n^2 ;

Solution. Formez successivement les progressions arithmétiques suivantes :

$$
\begin{array}{c}
9,\ 15,\ 21,\ 27\ldots\\
25,\ 35,\ 45,\ 55\ldots\\
49,\ 63,\ 77,\ 91\ldots\\
\ldots\ldots\ldots\\
q^2,\ q^2+2q,\ q^2+4q,\ q^2+6q\ldots\\
\ldots\ldots\ldots\\
(n-1)^2,\ n^2-1.
\end{array}
$$

En poussant chaque progression jusqu'au terme le plus approché de n^2.

Les nombres impairs non renfermés dans ces suites sont les nombres premiers cherchés.

Observation. Ce crible ne diffère pas essentiellement de celui d'Erathosthène, d'une si admirable simplicité ; mais il se présente sous une forme un peu abrégée, puisqu'on n'a pas besoin d'écrire les nombres pairs.

15. **Euler a démontré pour les nombres premiers de la forme $4n+1$; 1° n est la somme de deux nombres triangulaires.** 2° Ces nombres premiers sont la somme de deux carrés entiers et d'une seule manière seulement. 3° Si un nombre de la forme $4n+1$ n'est la somme de deux carrés que d'une seule manière, il est nombre premier. 4° Tout nombre qui peut être la somme de deux carrés de plusieurs manières, n'est pas un nombre premier. (M. de Pet. 1760-1761.) Il semblerait d'après ces restrictions, qu'il y a moins de nombres premiers de la forme $4n+1$ que de la forme $4n-1$; on verra ci-dessous qu'il n'en est pas ainsi. Euler s'est servi de ces propriétés comme critérium de nombre premier, lorsqu'il s'agit de très-grands nombres.

16. *La somme des cubes des nombres naturels est le carré du nombre triangulaire marqué par le nombre des termes. Observation* ; cette proposition se trouve aussi dans le *Lilavati* au chapitre ci-dessus cité.

17. *En prenant dans la suite des nombres impairs, une suite de termes dont le premier soit le double d'un nombre triangulaire plus un et dont le dernier soit le double du nombre triangulaire consécutif moins un, la somme de cette suite est un cube*; conséquence de (7, 8, 16).

Cette observation élémentaire a été l'objet d'une communication à l'Académie (*Comptes rendus*, 1846, 2ème semestre, p. 501).

18. Nous donnons ici d'après M. Scherk, professeur à Halle, le nombre des nombres premiers des deux formes $4n\pm1$ renfermés entre 1 et 1000; 1 et 2000; 1 et 3000, etc. (*Crelle*, t. X, p. 208, 1833).

	$4n+1$	$4n-1$		$4n+1$	$4n-1$		$4n+1$	$4n-1$
1,000	81	87	18,000	1,023	1,041	35,000	1,865	1,867
2,000	148	155	19,000	1,074	1,084	36,000	1,908	1,916
3,000	212	218	20,000	1,131	1,131	37,000	1,958	1,964
4,000	269	281	21,000	1,178	1,182	38,000	2,007	2,010
5,000	331	338	22,000	1,229	1,235	39,000	2,054	2,053
6,000	385	398	23,000	1,278	1,286	40,000	2,096	2,107
7,000	444	456	24,000	1,332	1,336	41,000	2,138	2,153
8,000	501	506	25,000	1,377	1,385	42,000	2,190	2,202
9,000	556	561	26,000	1,428	1,432	43,000	2,244	2,250
10,000	611	618	27,000	1,484	1,477	44,000	2,288	2,291
11,000	661	674	28,000	1,527	1,528	45,000	2,335	2,340
12,000	710	728	29,000	1,574	1,579	46,000	2,384	2,377
13,000	769	778	30,000	1,618	1,627	47,000	2,326	2,325
14,000	821	831	31,000	1,670	1,670	48,000	2,476	2,470
15,000	869	835	32,000	1,714	1,718	49,000	2,520	2,515
16,000	923	939	33,000	1,769	1,769	50,000	2,566	2,567
17,000	972	988	34,000	1,822	1,816			

On voit qu'il y a à peu près autant de nombres premiers d'une forme que d'une autre au moins, dans cet intervalle.

NOTE

sur les plans tangents aux surfaces du second degré.

PAR MM. DELACOUR ET MAYER D'ALMBERT,
Anciens élèves de l'École polytechnique.

I. L'équation du plan tangent aux surfaces du second ordre de la forme générale

$$(x'-x)\frac{dF}{dx}+(y'-y)\frac{dF}{dy}+(z'-z)\frac{dF}{dz}=0,$$

ne se prête pas toujours à des calculs simples; il est une forme qui pourra souvent être plus commode, et que nous allons présenter. Nous suivrons une marche analogue à celle qui, dans la géométrie plane, conduit à une équation de la tangente à une courbe du deuxième degré, qui dépende seulement du coefficient d'inclinaison, et non des coordonnées des points de contact.

1° *Ellipsoïde.* Soient $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ l'ellipsoïde rapporté à son centre et à ses axes, et $px+qy+rz=t$ un plan sécant quelconque, et exprimons que son intersection avec la surface se réduit à un point unique, ou qu'il en est ainsi de sa projection sur un plan quelconque celui des (x, y) par exemple; à cet effet, éliminons z entre ces deux équations, il vient :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{(t-px-qy)^2}{r^2c^2}=1,$$

ou :

$$\left(\frac{1}{b^2}+\frac{q^2}{c^2r^2}\right)y^2+\frac{2pq}{c^2r^2}xy+\left(\frac{1}{a^2}+\frac{p^2}{c^2r^2}\right)x^2-\frac{2qt}{c^2r^2}y-$$
$$-\frac{2pt}{c^2r^2}x+\frac{t^2}{c^2r^2}-1=0,$$

et en appelant A, B, C, D, E, F les coefficients successifs, on sait que pour que cette équation se réduise à un point unique : 1° $B^2-4AC<0$, condition implicitement remplie, puisque cette équation représente la projection d'une courbe fermée du deuxième degré;

$$2^\circ \quad AE^2+CD^2+FB^2-BDE-4ACF=0,$$

qui devient ici :

$$\left(\frac{1}{b^2}+\frac{q^2}{c^2}\right)\frac{p^2t^2}{c^4r^4}+\left(\frac{q}{a^2}+\frac{p^2}{c^2r^2}\right)\frac{q^2t^2}{c^4r^4}+\frac{p^2q^2}{c^4r^4}\left(\frac{t^2}{c^2r^2}-1\right)-$$
$$-\frac{2p^2q^2t^2}{c^6r^6}-\left(\frac{1}{a^2}+\frac{p^2}{c^2r^2}\right)\left(\frac{1}{b^2}+\frac{q^2}{c^2r^2}\right)\left(\frac{t^2}{c^2r^2}-1\right)=0;$$

ou, en réduisant, $t^2=a^2p^2+b^2q^2+c^2r^2$.

L'équation du plan tangent à l'ellipsoïde peut donc s'écrire :

$$px+qy+rz=\sqrt{a^2p^2+b^2q^2+c^2r^2}.$$

2° *Hyperboloïde à une nappe.* Son équation est :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

il suffit de changer dans les résultats précédents c^2 en $-c^2$ pour avoir la nouvelle équation du plan tangent, qui sera :

$$px+qy+rz=\sqrt{a^2p^2+b^2q^2-c^2r^2}.$$

3° *Hyperboloïde à deux nappes.* Son équation est :

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

et la nouvelle équation du plan tangent est :

$$px+qy+rz=\sqrt{a^2p^2-b^2q^2-c^2r^2}.$$

4° *Paraboloïde elliptique.* Dans cette surface, il ne saurait y avoir de plan tangent parallèle à l'axe ; car en faisant passer un plan par l'axe et le point de contact, il couperait la surface suivant une parabole dont l'axe serait celui même de la surface, et le plan tangent suivant une droite qui serait dès lors à la fois tangente à la parabole et parallèle à l'axe de cette courbe, ce qui est impossible. Nous mènerons donc un plan sécant coupant l'axe du paraboloïde ; l'intersection avec la surface sera une ellipse dont la projection sera aussi une ellipse. Il suffira d'exprimer que cette projection se réduit à un point unique.

Soit $sy^2+s'z^2=ss'x$ le paraboloïde elliptique rapporté à son axe et à son sommet, et $px+qy+rz=t$ le plan sécant ; la projection de leur intersection sera pour le plan des (x, y) :

$$psy^2+ps'z^2+ss'rz+ss'qy=ss't.$$

Pour que cette équation représente un point, il faut que $sr^2+s'q^2+pt=0$; d'où, substituant t dans l'équation du plan, il viendra pour équation du plan tangent :

$$px + qy + rz + \frac{sr^2 + s'q^2}{4p} = 0.$$

5° *Paraboloïde hyperbolique.* Dans cette surface, il n'y a pas de plan tangent parallèle à l'axe. On s'en rendrait compte, comme précédemment, en menant un plan par l'axe et un point quelconque des deux génératrices suivant lesquelles le plan est tangent à la surface. Il faut donc faire mouvoir parallèlement à lui-même un plan sécant non parallèle à l'axe ; un tel plan coupe la surface suivant une hyperbole dont la projection peut être une hyperbole ou une droite; dans ce dernier cas, on ne saurait exprimer par la projection que le plan devient tangent; on évitera cette difficulté en considérant la projection sur un plan perpendiculaire à l'axe de la surface, car le plan sécant ne pourra lui être perpendiculaire et la projection être une droite; nous exprimerons donc que la projection sur le plan ZOY se réduit à deux droites.

Soit $sy^2 - s'z^2 = ss'x$ et $px + qy + rz = t$ la surface et le plan sécant; en éliminant x, il vient :

$$psy^2 - ps'z^2 - ss'rz - ss'qy + ss't = 0,$$

équation qui représente deux droites sous la condition :

$$t = \frac{s'q^2 - sr^2}{p};$$

la nouvelle équation du plan tangent est donc pour ce cas :

$$px + qy + rz = \frac{sr^2 - s'q^2}{4p},$$

résultat qu'on pourrait déduire du cas du paraboloïde elliptique en changeant s' en $-s'$.

II. Pour montrer la simplification que peut apporter cette équation du plan tangent dans certains cas, nous résoudrons d'abord cette question de Monge :

Trouver le lieu décrit par le sommet d'un trièdre tri-

rectangle dont les faces restent constamment tangentes à une surface du second ordre.

Prenons un ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

Les trois faces des trièdres étant tangentes à la surface, leurs équations sont :

$$(\alpha)\begin{cases} px+qy+rz=\sqrt{a^2p^2+b^2q^2+c^2r^2} \\ p'x+q'y+r'z=\sqrt{a^2p'^2+b^2q'^2+c^2r'^2} \\ p''x+q''y+r''z=\sqrt{a^2p''^2+b^2q''^2+c^2r''^2}. \end{cases}$$

Les axes étant rectangulaires, on a :

$$(\beta)\begin{cases} p^2+q^2+r^2=1 \\ p'^2+q'^2+r'^2=1 \\ p''^2+q''^2+r''^2=1. \end{cases}$$

Les trois plans sont perpendiculaires entre eux, ce qui donne :

$$(\beta)\begin{cases} pp'+qq'+rr'=0 \\ pp''+qq''+rr''=0 \\ p'p''+q'q''+r'r''=0. \end{cases}$$

L'élimination des neuf quantités

$$p,\ q,\ r,\ p',\ q',\ r',\ p'',\ q'',\ r'',$$

se fait simplement en observant que les six dernières conditions équivalent à celles-ci (voir t. I, p. 388 et 497) :

$$(\gamma)\begin{cases} p^2+p'^2+p''^2=1 \\ q^2+q'^2+q''^2=1 \\ r^2+r'^2+r''^2=1. \end{cases} \qquad (\gamma)\begin{cases} pq+p'q'+p''q''=0. \\ pr+p'r'+p''r''=0 \\ qr+q'r'+q''r''=0. \end{cases}$$

Car il suffit de faire la somme des carrés des équations (α), en ayant simplement égard aux six dernières ; il vient en effet :

$$x^2+y^2+z^2=a^2+b^2+c^2,$$

c'est-à-dire une sphère.

On trouverait de même pour un hyperboloïde, selon qu'il serait à une ou à deux nappes, $x^2+y^2+z^2=a^2\pm b^2-c^2$. Pour le paraboloïde elliptique les équations (α) seraient :

$$(\alpha)\begin{cases} p^2x + pqy + prz = -\frac{1}{4}(sr^2 - s'q^2) \\ p'^2x + p'q'y + p'r'z = -\frac{1}{4}(sr'^2 - s'q'^2) \\ p''^2x + p''q''y + p''r''z = -\frac{1}{4}(sr''^2 - s'q''^2). \end{cases}$$

Les équations (γ) subsistent d'ailleurs toujours entre les neuf quantités p, q, r, p', q', r', p'', q'', r'', de sorte qu'en ajoutant les équations (α), en ayant égard aux relations (γ), il vient pour le lieu un plan $x=-\frac{1}{4}(s+s')$. Pour un paraboloïde à deux nappes, ce serait :

$$x=-\frac{1}{4}(s-s').$$

III. Comme second exemple, nous résoudrons cette question (énoncée page 516, tome V des *Nouvelles Annales*) :

Trois plans rectangulaires touchant trois surfaces confocales du second ordre, le lieu d'intersection est une sphère.

Soient les trois ellipsoïdes de révolution confocaux :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{b^2}=1;\qquad \frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}+\frac{z^2}{b'^2}=1;$$

$$\frac{x^2}{a''^2}+\frac{y^2}{a''^2}+\frac{z^2}{b''^2}=1.$$

$$a^2-b^2=a'^2-b'^2=a''^2-b''^2=c^2.$$

L'équation du plan tangent à l'un des ellipsoïdes est :

$$px+qy+rz=\sqrt{a^2p^2+b^2(q^2+r^2)},$$

d'après les équations (6) $q^2+r^2=1-p^2$; d'où :

$$px+qy+rz=\sqrt{(a^2-b^2)p^2+b^2};$$

les deux autres plans auraient pour équations :

$$p'x + q'y + r'z = \sqrt{(a'^2 - b'^2)p'^2 + b'^2},$$
$$p''x + q''y + r''z = \sqrt{(a''^2 - b''^2)p''^2 + b''^2},$$

faisant la somme des carrés de ces équations, et ayant égard aux relations (γ), il vient : $x^2 + y^2 + z^2 = c^2 + b'^2 + b''^2$.

On voit par la symétrie du calcul que les ellipsoïdes que nous avons supposés de révolution autour de l'axe focal pourraient l'être également autour du petit axe; dans ce cas la coïncidence des foyers des ellipsoïdes est remplacée par celle des circonférences que décrivent les foyers des ellipses génératrices. Les autres cas où trois surfaces du second ordre peuvent être confocales, se traiteraient d'une manière tout à fait analogue.

Note. Le théorème de Monge a été démontré la première fois par Poisson, par le moyen employé ci-dessus, en faisant usage des relations de Lagrange (*Correspondance sur l'École Polytechnique*, t. I, p. 237; publiée en 1808). Du reste ce théorème n'est plus qu'un cas particulier du théorème sur les surfaces confocales, qu'on doit à M. Dupin et dont il est convenable de donner de suite une démonstration pour le cas général; une propriété analogue existe pour deux coniques confocales, qui, lorsqu'elles se confondent donnent lieu au théorème sur l'angle droit circonscrit à une conique, déjà connu des anciens et qu'on rencontre dans tous les traités élémentaires.

Dans nos *relations d'identité* pour les surfaces du second degré, nous indiquerons une relation entre les quatre coefficients p, q, n, t du plan tangent, pour l'équation générale, à axes quelconques de la surface, analogue à celle que nous avons donnée pour la tangente (t. II, p. 108).

RELATIONS D'IDENTITÉ

et équations fondamentales relatives aux lignes du second degré. (*Voir* t. IV, p. 526.)

—

Problèmes sur les directrices; théorie générale des directrices et des foyers.

PROBLÈME LXIX. Étant données les équations d'une conique et d'une droite, à quels caractères peut-on reconnaître que la droite est une directrice ?

Solution. Soit :

$$\varphi(x,y) = Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0,$$

l'équation de la conique ; $dy + ex + f = 0$, celle de la droite $\gamma =$ angle des axes.

x' et y' étant les coordonnées du pôle de la droite, relativement à la conique

$$x'(k'd + ke + mf) = -nd + le + kf;$$
$$y'(k'd + ke + mf) = l'd - ne + k'f;$$

(V. t. II, p. 305) ; transportons l'origine au pôle, à cet effet, remplaçons dans l'équation de la conique x et y, respectivement par $x + x'$ et $y + y'$, il vient :

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + y[2Ay' + Bx' + D] +$$
$$+ x[2Cx' + By' + E] + \varphi(x',y') = 0;$$
$$(k'd + ke + mf)^2\varphi(x',y') = A[l'd - ne + k'f]^2 +$$
$$+ B[l'd - ne + k'f][-nd + le + kf] + C[-nd + le + kf]^2 +$$
$$+ D[l'd - ne + k'f][k'd + ke + mf] +$$
$$+ E[-nd + le + kf][k'd + ke + mf] + F[k'd + ke + mf]^2;$$

ayant égard aux relations d'identité 1,2,3,4,5 données, t. IV, p. 425 et 426, on trouve :

$$(k'd + ke + mf)^2 \varphi(x', y') =$$
$$= L[l'd^2 + le^2 + mf^2 - 2nde + 2k'df + 2kef] = LV,$$

(t. IV, p. 108).

$$(k'd + kc + mf)^2 \; [2Ay' + Bx' + D] =$$
$$= (k'd + ke + mf) \; [2A(l'd - ne + k'f) + B(-nd + le + kf) +$$
$$+ D\,(k'd + ke + mf)] = 2dL\,[dk' + ke + mf]\,;$$

ainsi l'équation de la conique devient :

$$(k'd + ke + mf)^2 \; (Ay^2 + Bxy + Cx^2) +$$
$$+ 24\,[dy + ex]\;[dk' + ke + mf] + LV = 0.$$

Si la droite est une directrice, la nouvelle origine est un foyer; alors, d'après les deux relations connues (tome II, page 427), on trouve, après avoir divisé par le facteur $L(k'd + ke + mf)^2$,

$$L\,(d^2 - e^2) = V\,(A - C)\,; \qquad (1)$$
$$2Ld\,(e - d\cos\gamma) = V[B - 2A\cos\gamma]\,; \qquad (2)$$

d'où

$$d^2(B - 2C\cos\gamma) - 2de\,(A - C) + e^2\,(2A\cos\gamma - B) = 0\,; \quad (3)$$

il faut donc que les deux rapports $\frac{e}{d}$, $\frac{f}{d}$ satisfassent à deux quelconques des équations (1), (2), (3), pour que la droite donnée par l'équation $dy + ex + f = 0$, soit une directrice, et *vice-versâ* ; ce qu'il fallait trouver.

Problème LXX. Étant donnée l'équation d'une conique, trouver celle d'une directrice.

Solution. Même notation que pour le problème précédent ; l'équation (3) détermine la direction des directrices ; elle est identique avec l'équation aux directions des axes principaux (v. t. I, p. 496) ; donc les directrices sont parallèles aux axes principaux; ces directions étant connues, l'équation (1) ou l'équation (2) détermine la position. Faisant $\frac{d}{e}=d'$; $\frac{f}{e}=f'$; d' est connue; les équations (1) et (2) deviennent :

$$\left.\begin{aligned} m(\mathrm{A}-\mathrm{C})f'^2+2f'(\mathrm{A}-\mathrm{C})(k'd'+k)+\mathrm{L}(1-d'^2)+ \\ +(\mathrm{A}-\mathrm{C})[l'd'^2+l-2nd']=0; \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

$$\left.\begin{aligned} mf'^2(\mathrm{B}-2\mathrm{A}\cos\gamma)+2f'(\mathrm{B}-2\mathrm{A}\cos\gamma)(k'd'+k)+ \\ +2\mathrm{L}d'(d'\cos\gamma-1)+ \\ +(\mathrm{B}-2\mathrm{A}\cos\gamma)(l'd'^2+l-2nd')=0. \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Si $\mathrm{A}=\mathrm{C}$, l'équation (3) donne $d'^2=1$; l'équation (4) devient une identité, il faut alors recourir à l'équation (5); on sait que cette équation $\mathrm{A}=\mathrm{C}$ subsiste lorsque les axes coordonnés, ou les parallèles à ces axes coupent la conique en quatre points situés sur le même cercle. Si l'on a en même temps $\mathrm{B}=2\mathrm{A}\cos\gamma$, les deux racines de l'équation (5) deviennent infinies; ce qui doit être, puisque la conique devenant alors un cercle, les directrices sont à l'infini.

Si $m=0$, les deux équations (4) ou (5) ne donnent qu'une valeur pour f', ce qui est le cas de la parabole, qui a deux directrices *réelles*, dont l'une est située à l'infini, et deux directrices imaginaires, à directions réelles; si m n'est pas nul, d' ayant deux valeurs, on aura pour f' quatre valeurs, deux réelles et deux imaginaires. La discussion est analogue à celle qu'on a établie pour les foyers. (V. t. II, p. 430.)

PROBLÈME LXXI. Étant donnés trois points d'une conique et une directrice, trouver la conique?

1° *Solution analytique.* Même notation que dans le problème I; et pour simplifier, prenons $\gamma=\frac{1}{2}\pi$; et la directrice pour axe des y; alors $d=f=0$; e étant quelconque, faisons $e=1$.

L'équation (3) donne $\mathrm{B}=0$, alors l'équation (2) devient une identité, et l'équation (1) donne :

$L = l(C-A)$, ou $AE^2 + CD^2 - 4ACF = (C-A)(D^2-4AF)$; et $D^2 + E^2 = 4AF$; l'équation de la conique prend donc la forme

$$4A^2y^2 + 4ACx^2 + 4ADy + 4AEx + D^2 + E^2 = 0. \quad (6)$$

Soient x', y'; x'', y''; x''', y'''; les coordonnées des trois points donnés, on aura pour déterminer les trois rapports $\frac{C}{A}, \frac{D}{A}, \frac{E}{A}$, les trois équations :

$$D^2 + E^2 + 4ADy' + 4AEx' + 4ACx'^2 = -4A^2y'^2; \quad (6)$$

et deux équations semblables en y'', x'', y''', x''', on en déduit :

$$D(y'-y'') + E(x'-x'') + C(x'^2-x''^2) = -A(y'^2-y''^2), \quad (7)$$
$$D(y'-y''') + E(x'-x'') + C(x'^2-x'''^2) = -A(y'^2-y'''^2), \quad (8)$$
$$D[x'y''' - y'x''' + x''y' - y''x' + x'''y'' - x''y'''] =$$
$$= C[x'(x''^2 - x'''^2) + x''(x'''^2 - x'^2) + x'''[x'^2 - x''^2]] +$$
$$+ A[x'(y''^2 - y'''^2) + x''[y'''^2 - y'^2] + x'''[y'^2 - y''^2]];$$

où $D = \dfrac{CM + AN}{\rho}$; de là on déduit en changeant x en y, et *vice versâ*, et les signes, $E = \dfrac{CM' + AN'}{\rho}$; ou ρ est le double de l'aire du triangle, qui a pour sommets les trois points donnés; substituant les valeurs de D et E dans l'équation (6), il vient :

$$C^2(M^2 + M'^2) + 2AC[MN + M'N' + 2\rho(My' + Mx' + \rho x'^2)] +$$
$$+ A^2[N^2 + N'^2 + 4\rho(Ny' + N'x' + \rho y'^2)] = 0.$$

Le signe de C détermine les espèces des deux coniques, qui satisfont à la question ; lorsque C est imaginaire, la question est impossible. Si $C = 0$, la conique devient une parabole ; et d'ailleurs, on n'a besoin que de se donner deux points, si l'on veut que la conique soit une parabole. C étant nul dans l'équation (6), il ne reste que deux coefficients à déterminer.

Les coordonnées du centre sont $x = -\dfrac{E}{2C}$; $y = -\dfrac{D}{2A}$; et les coordonnées du foyer $x = -\dfrac{E}{2A}$; $y = -\dfrac{D}{2A}$; il faut se rappeler que le foyer est le pôle de l'axe des y. (V. t. II, p. 305.)

Les coordonnées du second foyer sont :

$$x = \frac{E(C-2A)}{2AC}; \quad y = -\frac{D}{2A}.$$

2° *Solution géométrique*. Soient M, M', M''; les trois points donnés et MP, M'P', M''P'' les perpendiculaires sur la direction; on partage la droite MM' au point I en deux segments *additifs* proportionnels à MP et M'P'; et de même en I' en deux segments soustractifs; un de ces points est nécessairement sur la directrice; décrivant une circonférence sur II' comme diamètre, le foyer est évidemment sur cette circonférence; agissant de même par rapport à l'une quelconque de deux droites MM'', M'M'' on aura une seconde circonférence, qui coupe la première, généralement parlant, en deux mêmes points, dont chacun est le foyer d'une des deux coniques cherchées; F désignant ce foyer, le rapport $\dfrac{FM}{MP}$ indique l'espèce de la conique.

Conservant la même notation que ci-dessus, un calcul facile donne pour équation de la circonférence décrite sur le diamètre II',

$$(x'^2 - x''^2)(y^2 + x^2) + 2y(y'x''^2 - x'^2y'') - 2xx'x''(x' - x'') +$$
$$+ x'^2y''^2 - x''^2y'^2 = 0,$$

x et y étant les coordonnées du foyer, on remplace D et E par $-2Ay$ et $-2Ax$ dans les équations (6) et (7) et l'on élimine ensuite C.

La discussion ne présente aucune difficulté.

Observation. Les deux points d'intersection ne peuvent être les deux foyers d'une même conique; car, soient F et F′ ces deux points ; supposons qu'ils s'agisse d'une ellipse, on aurait donc $FM+F'M=FM'+F'M'$, et ensuite $\frac{FM}{FM'}=\frac{F'M}{F'M'}$; ce qui entraîne $FM=F'M'$ et $F'M=F'M$.

LXXII. Étant donnés deux points de la conique et une directrice trouver le lieu du centre ?

Solution. Soient x et y les coordonnées du centre ; on a $E=-2Cx$; $D=2Ay$; on substitue ces valeurs dans les équations (6) et (7), l'on élimine ensuite C, et l'on parvient à une équation du sixième degré ; $4y^2x^4$ est le seul terme de ce degré.

LXXIII. Étant donnés deux points, la directrice et une tangente, déterminer la conique.

Solution. Conservez la même notation et $dy+ex+f=0$ l'équation de la tangente ; on a donc l'équation $V=0$ (*V.* t. II, p. 108) ; et ensuite les deux équations (6) et (7) ; il y a ainsi trois équations, l'une du premier degré et deux du second degré entre les trois rapports $\frac{C}{A}$, $\frac{D}{A}$, $\frac{E}{A}$; ce qui conduit à une équation du quatrième degré, qui s'abaisse au second lorsque les deux points sont sur une droite perpendiculaire à la directrice ou lorsque la tangente fait avec cette directrice un angle droit ou nul.

LXXIV. Étant donnés un point, deux tangentes et la directrice, ou bien trois tangentes avec la directrice, déterminer la conique.

Solution. Les premières données mènent à une équation du quatrième degré et les secondes à une équation du huitième degré, dans le cas général ; mais, les degrés s'abaissent, lorsque les tangentes font avec la directrice des angles droits ou nuls.

Théorie générale des foyers et des directrices.

LXXV. Problème. Soient 1° m points fixes (foyers); 2° n droites fixes (directrices), situés dans le même plan; 3° une *relation donnée* entre les distances d'un point *variable* du même plan, aux points et droites fixes; trouver le lieu géométrique du point variable.

Solution. Axes *rectangulaires;* x_p, y_p coordonnées du point fixe de quantième p; $d_q y + e_q x + t_q = 0$ l'équation de la droite fixe de quantième q; p ayant toutes les valeurs entières de 1 à m inclus; et q les valeurs entières de 1 à n inclus; et soient x, y, les coordonnées du point *variable* M.

Désignant par $\delta_1, \delta_2 \ldots \delta_m$ les diverses distances aux foyers; par $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_m$ les distances aux directrices et par $\varphi\,(\delta_1\,,\,\delta_m\,;\,\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n) = 0$ la relation donnée.

Alors $[(x - x_p)^2 + (y - y_p)^2]^{\frac{1}{2}}$ est la distance de M au point $(x_p\,,\,y_p)$; et $\dfrac{d_q y + e_q x + f_q}{\sqrt{d_q^{\,2} + e_q^{\,2}}}$ est la distance du point M à la droite de quantième q; mettant ces valeurs dans la relation donnée entre les distances et faisant disparaître les radicaux, on a le lieu cherché du point variable.

Corollaire. S'il n'y a point de foyers et que la relation donnée soit une fonction entière de degré s; alors le lieu cherché, ayant égard au double signe de radical est un système de lignes de l'ordre s; au nombre de 2^n au plus.

Applications. Soient n directrices et point de foyers; et soit :

1° $a_1\,\delta_1 + a_2\,\delta_2 \ldots\ldots a_n\,\delta_n = b$ la relation donnée; $a_1, a_2 \ldots\ldots a_n$, b sont $n+1$ constantes, le lieu cherché est un système de 2^n droites; si b est nul, le système se réduit à 2^{n-1} droites.

2° $a_1\delta_1^2 + a_2\delta_2^2 \times \ldots\ldots a_n\delta_n^2 = b$ le lieu cherché est une conique.

3° $a_1\delta_1\delta_2 + a_2\delta_1\delta_3 + \ldots\ldots a_n\delta_{n-1}\delta_n = b$, la relation; le lieu cherché est un système de coniques, dont le nombre dépend du nombre des radicaux. Si $n = 4$ et si la relation est $a\delta_1\delta_3 + b\delta_2\delta_4 = c$; le lieu est en général un système de quatre coniques; si $c = 0$, il n'y a plus que deux coniques; ou une seule conique en conservant toujours le même signe; de plus la conique passe par les quatre points donnés par les intersections respectives des droites $\delta_1 = 0$, $\delta_2 = 0$; $\delta_1 = 0$, $\delta_4 = 0$; $\delta_3 = 0$, $\delta_2 = 0$; $\delta_3 = 0$, $\delta_4 = 0$; ou δ_1, représente la droite $d_1y + e_1x + f_1 = 0$ et ainsi des autres; donc toute conique circonscrite à un quadrilatère dont les côtés successifs sont représentés par $d_1y + e_1x + f_1 = 0 \ldots\ldots d_4y + e_4x + f_4 = 0 \ldots\ldots$ a pour équation :

$$a(d_1y+e_1x+f_1)(d_3y+e_3x+f_3)+b(d_2y+e_2x+f_2)(d_4y+e_4x+f_4)=0,$$

et un cinquième point de la conique détermine le rapport $\frac{b}{a}$ (voir t. III, p. 575).

Si la conique à circonscrire est une parabole, on a, pour déterminer $\frac{b}{a}$, la relation

$$a^2[d_1e_3 - e_1d_3]^2 + 2ab\,[[d_3e_4 - e_3d_4][d_2e_1 - e_2d_1] + [d_2e_3 - e_2d_3][d_1e_4 - e_1d_4]] + b^2[d_2e_4 - e_2d_4]^2 = 0;$$

de là découle le théorème suivant.

LXXVI. Théorème. *Un quadrilatère étant inscrit dans une conique, le produit des distances d'un point quelconque de la conique à deux côtés opposés, divisé par le produit des distances aux deux autres côtés donne un quotient constant, et lorsqu'une telle relation existe, le lieu du point est une conique.*

LXXVII. Lorsque la conique devient un cercle, on a la double relation :

$$a(d_1d_3 - e_1e_3) - b(e_2e_4 - d_2d_4) = 0;$$
$$a(d_1e_3 + e_1d_3) + b(d_2e_4 + e_2d_4) = 0;$$

d'où

$$d_1d_2d_3e_4 - d_1d_2d_4e_3 + d_1d_3d_4e_2 - d_2d_3d_4e_1 - e_1e_2e_3d_4 +$$
$$+ e_1e_2e_4d_3 - e_1e_3e_4d_2 + e_2e_3e_4d_1 = 0;$$

relation entre les coefficients lorsque le quadrilatère est inscriptible, et que les axes sont rectangulaires et pour des axes quelconques, il faut ajouter au premier membre

$$2\cos\gamma\,[d_1d_3 - e_1e_3]\,[d_3d_4 - e_3e_4];$$

γ est l'angle des axes.

LXXVIII. Nous avons supposé les axes rectangulaires; s'ils forment entre eux un angle γ la distance du point variable à une directrice sera de la forme :

$$\frac{(dy + ex + f)\sin\gamma}{\sqrt{d^2 + e^2 - 2de\cos\gamma}};$$

on voit donc que la proposition précédente subsiste pour des axes quelconques; adoptant pour axes deux côtés consécutifs du quadrilatère, l'équation de la conique circonscrite sera de la forme :

$$ax(dy + ex + f) + by(d_1y + e_1x + f_1) = 0,$$

l'expression $(ad + be_1)^2 - 4abd_1e$ indique l'espèce de la conique; p étant le coefficient angulaire de la tangente, on a

$$p = -\frac{y(ad + be_1) + 2aex}{2bd_1y + x(ad + be_1)};$$

à l'origine p prend la forme $\frac{0}{0}$, dont on trouve la valeur en considérant qu'alors $\frac{y}{x} = -\frac{af}{bf_1}$; pour les trois autres sommets du quadrilatère l'expression ne présente aucune difficulté.

LXXIX. Les anciens se sont beaucoup occupés de la construction des coniques à l'aide de *directrices* et sans *foyers*. Pappus en parle en son livre VII sous le nom de *locum ad tres* et *quatuor lineas*, et fait à ce sujet une sortie contre Apollonius (Voir *Nouvelles Annales,* t. III, p. 481). Descartes a repris le même problème dans sa géométrie (*OEuvres,* t. V, p. 323, édit. Cousin), et Newton a tiré un grand parti du théorème énoncé (LXXVI); ainsi que nous le verrons en rapportant les solutions géométriques des problèmes sur les coniques, qu'on doit à l'illustre philosophe anglais.

LXXX. Supposons maintenant qu'il y a n foyers et sans directrices avec la relation algébrique donnée $\varphi(\varepsilon_1, \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n) = 0$; le degré de l'équation dépend de la manière dont les expressions *radicales* ε_1, ε_2... sont combinées entre elles, combinaisons qui se réduisent à moitié lorsque la quantité toute connue est nulle.

Applications. 1° Soit la relation

$$a_1\varepsilon_1^2 + a_2\varepsilon_2^2 + \ldots + a_n\varepsilon_n^2 + b = 0;$$

le lieu est un cercle ayant pour équation :

$$(y^2 + x^2)\,\Sigma a_p - 2\,[y\Sigma a_p y_p + x\Sigma a_p x_p] + \\ + \Sigma a_p\,[y^2_p + x^2_p] + b = 0;$$

Σ désignant une somme relative aux valeurs de p depuis 1 à n inclus (LXXV). Les coordonnées du centre sont :

$$\frac{\Sigma a_p y_p}{\Sigma a_p},\ \frac{\Sigma a_p x_p}{\Sigma a_p};$$

ainsi le centre est le centre de gravité des n foyers, considérés comme des molécules telles que celle qui a pour coordonnées x_p, y_p, a pour masse a_p; et il est facile de prouver que pour ce point la fonction $a_1\varepsilon_1^2 + a_2\varepsilon_2^2 + \ldots a_n\varepsilon_n^2$ est un minimum. Si les coefficients deviennent tous égaux entre eux, le centre du cercle est le centre de moyenne distance des foyers. Ce lieu géométrique est déjà dans Pappus.

2° Relation : $a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 \ldots\ldots + a_n\varepsilon_n + b = 0$.

Faisant disparaître les radicaux, l'équation est généralement du degré 2^n; soit $n = 2$, il vient :

$$(a_1^2\varepsilon_1^2 - a_2^2\varepsilon_2^2)^2 - 2b[a_1^2\varepsilon_1^2 + a_2^2\varepsilon_2^2] + b^4 = 0,$$

équation du quatrième degré, qui se réduit au second lorsque $a_1 = a_2$; et on rentre dans la discussion ordinaire des trois coniques définies par les propriétés focales, et par lesquelles ces courbes devraient *raisonnablement* et *utilement* faire partie de l'enseignement géométrique rudimentaire, et par conséquent n'en feront pas partie de longtemps.

LXXXI. Soit $\varphi(\varepsilon_1, \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n) = 0$ la relation focale. Prenant la dérivée par rapport à x, on a :

$$\frac{d\varphi}{dx} = \Sigma_1^n \frac{d\varphi}{d\varepsilon_p}\left[\frac{x - x_p}{\varepsilon_p} + \frac{y - y_p}{\varepsilon_p}\,\frac{dy}{dx}\right] = 0.$$

Faisons :

$$\frac{x - x_p}{\varepsilon_p} = \cos\alpha_p\,; \quad \frac{y - y_p}{\varepsilon_p} = \sin\alpha_p\,;$$

il vient :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\Sigma_1^n \dfrac{d\varphi}{d\varepsilon_p}\cos\alpha_p}{\Sigma_1^n \dfrac{d\varphi}{d\varepsilon_p}\sin\alpha_p} = \text{tang}\,\beta.$$

Considérons $\dfrac{d\varphi}{d\varepsilon_p}$ comme une force appliquée au point (x_p, y_p) et dirigée vers l'origine, on aura un système de n forces convergeant vers l'origine; soit R la résultante et α l'angle qu'elle forme avec l'axe des x; donc :

$$\text{R}\cos\alpha = \Sigma_1^n \frac{d\varphi}{d\varepsilon_p}\cos\alpha_p\,; \quad \text{R}\sin\alpha = \Sigma_1^n \frac{d\varphi}{d\varepsilon_p}\sin\alpha_p\,;$$

d'où tang $\alpha = -$ tang β ; ainsi la résultante R est perpendiculaire à la tangente à la courbe, passant par le point x_p, y_p, ou autrement, la résultante R est normale à la courbe. C'est la méthode de Roberval pour mener une tangente à une courbe donnée par une relation focale. « Cette méthode présente, quant au principe métaphysique, une analogie remarquable avec celle des fluxions, que Newton créa longtemps après (*Hist. de la Géométrie*, p. 59). » Comme on vient de voir, c'est en tout point celle des fluxions, moins la notation. Voici comment Roberval énonce sa règle : « Par les propriétés spécifiques de la ligne courbe (qui vous seront données), examinez les divers mouvements qu'a le point qui la décrit à l'endroit où vous voulez mener la touchante : de tous ces mouvements composés en un seul, tirez la ligne de direction du mouvement composé, vous aurez la touchante de la ligne courbe. » Newton dit : « Methodum quærebam determinandi quantitates ex velocitatibus motuum vel incrementorum quibus generantur (*De quad. curv. Introd.*). »

SUR LA DIVISION ABRÉGÉE,

PAR M. P. F. VERHULST,

membre de l'Académie des sciences de Belgique, professeur d'analyse à l'École militaire.

—

Dans votre numéro d'août 1846, page 508, vous donnez pour véritable logarithme hyperbolique de 1099, 7,0021595; c'est 7,00215 59544 qu'il faut, comme le dit M. Gudermann, et comme il est aisé de s'en assurer, en marquant que 1099 $= 7 \times 157$.

Je profite de cette occasion pour vous annoncer que je suis sur le point de publier une *Leçon d'arithmétique*, dans laquelle je donne la théorie analytique des méthodes de division abrégée de Fourier et de M. Guy (*). Quant au mérite comparatif de ces méthodes, je crois que celle de Fourier est la meilleure, 1° parce qu'elle n'exige aucune préparation ; 2° parce qu'elle donne en général le véritable chiffre, ou du moins qu'elle finit toujours par le donner; 3° parce que toute division commencée dans la vue d'une certaine approximation, peut être continuée indéfiniment de manière à donner une approximation plus grande. Cependant, lorsqu'on veut obtenir un grand nombre de chiffres au quotient, il me semble qu'on doit donner la préférence à la méthode de M. Guy, la plus commode de toutes sous le rapport du procédé.

Voici en peu de mots en quoi consiste mon analyse de la division ordonnée : pour trouver le premier chiffre du quotient, je m'appuie sur le lemme suivant, dont je donne la démonstration : *Dans une division quelconque, le premier chiffre du quotient est égal ou inférieur d'une unité au chiffre qu'on obtient en divisant le nombre formé par les* i *ou les* i+1 *premières figures du dividende, par celui qui forment les* i *premières figures du diviseur*, i *étant au moins égal à* 2. Faisant remarquer, ensuite, que la division ordonnée est le procédé inverse de la multiplication abrégée d'Oughtred, je déduis de là une équation qui me fournit le second chiffre du quotient, puis les suivants, *mutatis mutandis*.

Lorsque le reste de la division ordonnée est égal ou inférieur à la somme des chiffres du quotient, on sait que le dernier chiffre obtenu est celui de la division ordinaire. Mais si la condition précitée n'est pas remplie, ce chiffre est *incertain*. L'analyse m'a fait voir que, dans ce cas, le quotient est approché à moins d'une unité près *en plus ou en moins*,

---

(*) C'est une lacune remplie ; un service rendu à la science. Tm.

sans qu'on sache dans quel sens l'erreur se trouve, pourvu toutefois que la *somme des chiffres du quotient soit inférieure d'une unité au moins au dernier diviseur désigné*. Cette observation dispense de continuer l'opération, comme le prescrit Fourier, si l'on n'a pas besoin du véritable chiffre.

M. Guy apprendra sans doute avec plaisir que sa méthode est bien plus exacte qu'il ne la croit lui-même, car l'erreur qu'elle comporte n'est que d'*une seule unité* en plus ou en moins. En effet, en désignant par

D et d le dividende et le diviseur,

q et r le quotient et le reste fournis par la division ordinaire;

q' et r' le quotient et le reste dus à la méthode abrégée,

a la partie du dividende que M. Guy remplace par des zéros,

b ce qu'il appelle l'accroissement,

Je trouve entre ces quantités la relation :

$$q = q' + \left(\frac{a}{d} + \frac{r'}{d}\right) - \left(\frac{b}{d} + \frac{r}{d}\right);$$

et comme a, b, r et r' sont moindres que d, il paraît, au premier abord, que $q = q'$ à moins de *deux* unités en plus ou en moins. Mais il faut observer que a est connu, et que r' l'est quand l'opération est terminée; par conséquent, si $\frac{a + r'}{d}$, surpasse une unité, on l'ajoutera au quotient. Par là, il viendra :

$$q = q' - \left(\frac{b + r - c}{d}\right),$$

c dénotant un nombre plus petit que d. De plus, q et q' étant des nombres entiers, il faut que $\frac{b + r - c}{d}$ soit nul ou égal à une unité. Donc, le quotient q' est égal à celui que donne la division ordinaire, ou il le surpasse d'une unité.

SOLUTION DE LA QUESTION 131 (p. 556).

PAR M. CHARLES SOULÉ,
élève de l'Institution Barbet.

(Fig. 57) O étant le centre d'une ellipse, OA, OB, deux demi-diamètres conjugués donnés de grandeur et de direction, construisez le parallélogramme OACB.

Si du centre O, vous menez à volonté OA′ qui rencontre AC en A′; par le point A′ une parallèle à la diagonale CO qui rencontre OA en C′, puis par ce dernier point une parallèle à la deuxième diagonale AB, le point B′ où elle rencontre CB est sur la direction du diamètre conjugué à OA′.

Breton (de Champ).

Soit $OA=b$, $OB=a$; b et α, les coordonnées du point A′ pris à volonté sur AC. L'équation de OC étant $y=\frac{b}{a}x$, celle de A′C′ menée par le point A′ parallèlement à OC sera

$$y-b=\frac{b}{a}(x-\alpha).$$

En faisant $x=0$ dans cette équation, on a l'abcisse du point C′, $y=\frac{b(a-\alpha)}{a}$, l'équation de AB étant $y-b=-\frac{b}{a}x$, celle de la parallèle C′B′ sera $y-\frac{b(a-\alpha)}{a}=-\frac{b}{a}x$. En faisant $x=a$, nous aurons l'ordonnée du point B′ : $y=-\frac{b\alpha}{a}$. Le coefficient angulaire de la ligne OB′ est donc $m=-\frac{b\alpha}{a^2}$.

D'ailleurs le coefficient angulaire de OA' est $m'=\frac{b}{\alpha}$. On a donc $mm'=-\frac{b\alpha}{a^2}\cdot\frac{b}{\alpha}=-\frac{b^2}{a^2}$. Ce qui nous prouve que OB' est la direction du diamètre conjugué de OA'.

SOLUTION DU PROBLÈME 133 (p. 556).

PAR M. H. DORMOY.

Problème. On nomme points conjugués d'une ellipse les extrémités de deux diamètres conjugués : 1° la somme des carrés des normales par rapport au même axe de deux points conjugués est constante.

2° La somme des carrés des quatre rayons vecteurs est constante.

3° On a : $(a-r)^2+(a-r')^2=c^2$, r, r' rayons vecteurs conjugués ; a demi-grand axe ; c excentricité.

(G. Ritt.)

Solution. x', y' étant les coordonnées d'un point P', il est facile de voir que celles de son conjugué P'' sont :

$$x''=\frac{a}{b}y';\quad y''=-\frac{b}{a}x'. \tag{1}$$

Cela posé, je vais examiner successivement chacune des trois parties du problème.

1° (Fig. 56). La somme des carrés des normales par rapport au même axe de deux points conjugués est constante.

Considérons par exemple l'axe des x.

Si dans l'équation de la normale au point P',

$$y - y' = \frac{a^2 y'}{b^2 x'}(x - x'),$$

je fais $y = 0$, pour déterminer le point N' où cette droite rencontre l'axe des x, j'ai :

$$x = \mathrm{ON'} = \frac{a^2 - b^2}{a^2} x',$$

et en nommant n' la portion P'N' de la normale :

$$n'^2 = y'^2 + x'^2\left(1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2}\right)^2,$$

$$n'^2 = \frac{a^4 y'^2 + b^4 x'^2}{a^4}.$$

De même on a au point P'' :

$$n''^2 = \frac{a^4 y''^2 + b^4 x''^2}{a^4}.$$

Donc

$$n'^2 + n''^2 = \frac{a^4(y'^2 + y''^2) + b^4(x'^2 + x''^2)}{a^4}.$$

Mais

$$y'^2 + y''^2 = y'^2 + \frac{b^2}{a^2} x'^2 = b^2, \quad x'^2 + x''^2 = a^2,$$

donc enfin,

$$n'^2 + n''^2 = \frac{a^4 b^2 + a^2 b^4}{a^4} = \frac{a^2 b^2 + b^4}{a^2} = \frac{b^2}{a^2}.(a^2 + b^2),$$

quantité constante.

2° La somme des carrés des quatre rayons vecteurs est constante.

Soient r_1, r_2 les rayons vecteurs du point P', et r_3, r_4 ceux des points P''.

Nous avons, comme on peut s'en convaincre à l'inspection de la figure :

$$r_1^2+r_2^2=2y'^2+(x'-c)^2+(x'+c)^2=2y'^2+2x'^2+2c^2,$$
$$r_3^2+r_4^2=2y''^2+(x''-c)^2+(x''+c)^2=2y''^2+2x''^2+2c^2,$$

donc, en ajoutant,

$$r_1^2+r_2^2+r_3^2+r_4^2=2(y'^2+y''^2+x'^2+x''^2)+4c^2;$$

mais $y'^2+y''^2+x'^2+x''^2=a^2+b^2$ comme on vient de le voir, donc

$$r_1^2+r_2^2+r_3^2+r_4^2=2a^2+2b^2+4c^2,$$

quantité constante.

3° On a $(a-r_1)^2+(a-r_3)^2=c^2$. (r_1, r_3 rayons vecteurs conjugués).

Pour cela, je vais faire voir d'abord que

$$(a-r_1)^2+(a-r_3)^2=(a-r_2)^2+(a-r_4)^2.$$

En effet, $r_2=2a-r_1$, $r_4=2a-r_3$, donc il suffit de faire voir pour démontrer l'égalité précédente, que l'on a :

$$(a-r_1)^2+(a-r_3)^2=(r_1-a)^2+(r_3-a)^2,$$

égalité évidente, donc...........

Je dis maintenant que

$$(a-r_1)^2+(a-r_2)^2+(a-r_3)^2+(a-r_4)^2=2c^2.$$

En effet,

$$(a-r_1)^2+(a-r_2)^2+(a-r_3)^2+(a-r_4)^2=4a^2-2a(r_1+r_2+r_3+r_4)+$$
$$+r_1^2+r_2^2+r_3^2+r_4;$$

mais
$$r_1+r_2+r_3+r_4=4a,$$
$$r_1^2+r_2^2+r_3^2+r_4^2=2a^2+2b^2+4c^2,$$

donc

$$(a-r_1)^2+(a-r_2)^2+(a-r_3)^2+(a-r_4)^2=$$
$$=4a^2-8a^2+2a^2+2b^2+4c^2=2c^2;$$

mais $(a-r_1)^2+(a-r_3)^2=(a-r_2)^2+(a-r_4)^2$, donc........

SUR LE QUADRILATÈRE INSCRIPTIBLE

dont toutes les parties sont rationnelles d'après la méthode indienne.

—

1. Soient a, b, c, d, e cinq nombres entiers satisfaisant aux équations $a^2+b^2=c^2$; $c^2+d^2=e^2$; tels sont 3, 4, 5, 12, 13, et une infinité d'autres; construisons un quadrilatère ABCD, tel que I étant le point d'intersection des diagonales *rectangulaires* AC, BD, l'on ait $AI=ac$; $CI=bd$; $BI=ad$; $DI=bc$; alors $AB=ae$; $BC=cd$; $CD=be$; $AD=c^2$, ce qui est évident par le théorème de Pythagore; donc, en vertu des équations données, les côtés sont rationnels. De plus, le quadrilatère est inscriptible, puisque l'on a $AI.CI=BI.DI$, et le diamètre du cercle circonscrit est $=\frac{1}{2}ce$; et l'aire $=\frac{1}{2}(ac+bd)(bc+ad)$.

Observation. Cette solution est donnée par Ganésa, commentateur du *Lilavati* de Bhascara, au paragraphe 191, page 81 de la traduction de Colebrooke, et voir aussi Chasles, *Aperçu historique*, page 440; ce géomètre fait observer qu'avec un quadrilatère inscriptible, on peut en former deux autres, en intervertissant les côtés, dont les parties sont encore rationnelles, mais dont les diagonales ne sont plus rectangulaires; ces trois quadrilatères n'ont que trois diagonales différentes, et chacun a pour aire le produit de ces trois diagonales divisé par le double du diamètre du cercle circonscrit.

Cette proposition, énoncée par Albert Girard, a été démontrée par Grebe en 1831 (voir *Man. de Géom.*, p. 435, 2[e] éd.).

Tm.

THÉORÈME D'APOLLONIUS,

(Extrait d'une lettre.)

PAR M. JULES VIEILLE,
professeur.

Il existe diverses démonstrations des deux théorèmes d'Apollonius sur les diamètres conjugués de l'ellipse et de l'hyperbole. Je ne sache pas qu'on ait donné les suivantes, qui me paraissent mériter d'être connues des élèves à cause de leur simplicité.

Ces démonstrations reposent sur ce lemme connu :

LEMME. *Deux diamètres d'une ellipse sont conjugués si leurs projections sur le grand axe coïncident avec les projections de deux diamètres perpendiculaires entre eux (ou conjugués) du cercle décrit sur le grand axe comme diamètre. La réciproque est vraie.*

En effet, soient (*fig.* 54) om, on deux rayons perpendiculaires entre eux du cercle décrit sur le grand axe d'une ellipse; OP et OQ leurs projections sur cet axe; OC et OD les deux diamètres de cette ellipse, qui ont les mêmes projections; a et b les demi-axes de l'ellipse. On a :

$$\text{tang COP} = \frac{\text{CP}}{\text{OP}};$$

comme

$$\text{CP} = \frac{b}{a}\, m\text{P}, \quad \text{tang COP} = \frac{b}{a} \cdot \frac{m\text{P}}{\text{OP}};$$

de même

$$\text{tang DOQ} = \frac{b}{a} \cdot \frac{n\text{Q}}{\text{OQ}};$$

donc

$$\text{tang COP. tang DOQ} = \frac{b^2}{a^2}\,\frac{mP}{OP}\cdot\frac{nQ}{OQ}.$$

Mais les triangles mOP et nOQ étant égaux, on a :

$$mP = OQ \quad \text{et} \quad nQ = OP\,;$$

donc l'égalité précédente se réduit à :

$$\text{tang COP.tang DOQ} = \frac{b^2}{a^2}, \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

La réciproque se démontre aussi aisément.

Corollaire 1. On a :

$$\overline{OC}^2 + \overline{OD}^2 = \overline{OP}^2 + \frac{b^2}{a^2}\,\overline{mP}^2 + \overline{OQ}^2 + \frac{b^2}{a^2}\,\overline{nQ}^2\,;$$

ou bien, en remplaçant OQ et nQ respectivement par mP et OP :

$$\overline{OC}^2 + \overline{OD}^2 = \frac{a^2 + b^2}{a^2}\left(\overline{OP}^2 + \overline{mP}^2\right) = a^2 + b^2.$$

Corollaire 2. Soit, pour abréger l'écriture,

$$COD = \gamma\,;\ COP = \alpha\,;\ DOQ = \beta,$$

on a :

$$\sin\gamma = \sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha\,;$$

or,

$$\sin\alpha = \frac{b}{a}\,\frac{mP}{CC},\quad \cos\alpha = \frac{OP}{OC},\quad \sin\beta = \frac{b}{a}\,\frac{OP}{OD},\quad \cos\beta = \frac{mP}{OD}.$$

Donc, en substituant ces valeurs, il vient :

$$OC.\ OD.\ \sin\gamma = \frac{b}{a}\left(mP^2 + \overline{OP}^2\right) = ab.$$

Voilà les deux théorèmes qu'il s'agissait d'établir dans le cas de l'ellipse.

Pour l'hyperbole, la démonstration est toute semblable ; seulement il faut remplacer le cercle décrit sur le grand axe par *une hyperbole équilatère ayant même axe transverse que l'hyperbole proposée.*

Le lemme sur lequel nous nous sommes appuyé tout à l'heure, s'énonce alors ainsi :

Deux diamètres d'une hyperbole sont conjugués si leurs projections sur l'axe transverse coïncident avec les projections de deux diamètres conjugués d'une hyperbole équilatère ayant même axe transverse que la proposée.

En conservant les mêmes lettres que dans la première figure, on voit que le demi-diamètre om de l'hyperbole équilatère (*fig.* 55) est encore égal à son conjugué on, mais non perpendiculaire ; ces deux droites font avec l'axe transverse des angles complémentaires. Il en résulte que les triangles mOP, nOQ sont encore égaux ; mais ce n'est plus la somme $\overline{OP}^2 + \overline{mP}^2$, qui égale a^2, mais bien la différence $\overline{OP}^2 - \overline{mP}^2$, d'ailleurs on a toujours :

$$CP = \frac{b}{a}\, mP \text{ et } DQ = \frac{b}{a}\, nQ.$$

Sans insister davantage, il est clair que les raisonnements précédents sont applicables, et ils conduiront aux deux égalités :

$$\overline{OC}^2 - \overline{OD}^2 = a^2 - b^2,$$
$$OC.\ OD \sin\gamma = ab.$$

Note. Segner a composé en allemand un traité des coniques où toutes les propriétés de l'ellipse sont déduites de celles du cercle dont l'ellipse est la projection orthogonale, cercle dont on fait emploi dans ce qui précède, en le faisant tourner autour du grand axe pour le ramener dans le plan de l'ellipse. Par la même voie, on peut démontrer ces théorèmes généraux.

1° Tous les polygones réguliers, d'un même nombre de côtés inscrits dans l'ellipse, sont équivalents ;

2° La somme des carrés des demi-diamètres qui vont aux sommets est constante.

On nomme ici polygone régulier celui dont les côtés retranchent des segments équivalents ; les théorèmes d'Apollonius répondent au polygone régulier de quatre côtés.

Tm.

SUR UNE PROPRIÉTÉ DES NOMBRES,

PAR M. MIDY,
professeur à la Grande-Sauve, près Bordeaux.

M. Cauchy a rendu compte à l'Académie des sciences de deux propositions nouvelles sur les propriétés des nombres, communiquées par M. d'Adhémar et Breton (de Champ). Nous allons les indiquer et les démontrer, en donnant plus d'extension à la première proposition.

Proposition de M. d'Adhémar (*).

Si l'on conçoit la suite des nombres impairs :

(4).	1,	3, 5,	7, 9, 11,	13, 15. 17, 19,	etc.
	1,	8,	27,	64,	

Décomposée comme ci-dessus, en suites partielles dont le nombre des termes aille toujours en croissant suivant la progression naturelle 1, 2, 3, 4, etc., la somme des termes de chaque suite sera le cube du nombre entier marquant le rang correspondant.

(*) Cette propriété a été énoncée, il y a une vingtaine d'années, dans la *Bibliothèque universelle de Genève*, où je l'ai copiée. J'ai oublié de marquer le volume. Tm.

Nous allons faire voir que cette propriété est comprise dans une proposition plus générale :

Savoir, que toutes les puissances semblables, ou du même degré de tous les nombres entiers sont toujours des sommes partielles de termes consécutifs de la suite (A), se succédant à des intervalles variables, en général, mais suivant une loi facile à déterminer, et dont le nombre de termes est, pour toutes ces puissances semblables, la même puissance du nombre entier considéré.

Pour cela nous nous appuierons sur les deux identités suivantes :

$$n^p\left(\frac{n+1}{2}+\frac{n-1}{2}\right)=n^{p+1},$$

$$n^p\left(\frac{n+1}{2}-\frac{n-1}{2}\right)=n^p.$$

En les multipliant entre elles nous aurons :

$$\left(\frac{n^p(n+1)}{2}\right)^2-\left(\frac{n^p(n-1)}{2}\right)^2=n^{2p+1}, \qquad \text{(B)}$$

on a encore :

$$n^{p-1}\left(\frac{n^2+1}{2}+\frac{n^2-1}{2}\right)=n^{p+1},$$

$$n^{p-1}\left(\frac{n^2+1}{2}-\frac{n^2-1}{2}\right)=n^{p-1},$$

par suite :

$$\left(\frac{n^{p-1}(n^2+1)}{2}\right)^2-\left(\frac{n^{p-1}(n^2-1)}{2}\right)^2=n^{2p}. \qquad \text{(C)}$$

Or on sait que la somme d'un nombre quelconque de termes de la suite (A), à partir du 1er, est le carré du nombre qui marque le rang du terme. Les identités (B) et (C) démontrent donc le principe général que nous avons énoncé.

2. Nous allons chercher dans quelques cas particuliers le

nombre des termes de chaque suite et le rang qu'elle occupe dans la série (A).

Si, dans l'identité (B), l'on fait $p=1$, elle devient :

$$\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2-\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2=n^3.$$

Or on a :

$$\frac{n(n+1)}{2}-\frac{n(n-1)}{2}=n.$$

Donc le nombre de termes de chaque suite est marqué par le nombre même dont la somme des termes de cette suite est le cube, ou par le rang qu'elle occupe. De plus si dans les nombres précédents $\frac{n(n+1)}{2}$, $\frac{n(n-1)}{2}$, on change n en $n+1$, ils deviennent $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$, $\frac{(n+1)n}{2}$. On voit par là que le premier terme de chaque suite succède immédiatement au dernier de celle qui précède. Ainsi se trouve démontrée la propriété particulière que nous avons d'abord indiquée.

En général on a :

$$\frac{n^p(n+1)}{2}-\frac{n^p(n-1)}{2}=n^p.$$

On voit par là que, quel que soit p, le nombre de termes de chaque suite est constamment la même puissance du nombre qui marque le rang de cette suite.

3. Faisons dans la même formule $p=2$, nous aurons :

$$\left(\frac{n^2(n+1)}{2}\right)^2-\left(\frac{n^2(n-1)}{2}\right)^2=n^5.$$

Si dans le nombre $\frac{n^2(n-1)}{2}$, on change n en $n+1$, il deviendra $\frac{(n+1)^2 n}{2}$. Or ce nombre est plus reculé dans la suite naturelle que $\frac{n^2(n+1)}{2}$ et leur différence $\frac{n(n+1)}{2}$ sera l'intervalle, ou le nombre de termes qui existera entre la suite dans le rang en n et celle qui la suit immédiatement. D'ailleurs la différence des nombres

$$\frac{n^2(n+1)}{2},\ \frac{n^2(n-1)}{2}$$

étant $n^{ème}$, le nombre de termes de chaque suite sera le carré du nombre correspondant.

On peut remarquer que la différence trouvée $\frac{n(n+1)}{2}$ est le $n^{ème}$ terme suite des nombres triangulaires :

$$1,\ 3,\ 6,\ 10,\ 15,\ \text{etc.}$$

dont chacun, comme on sait, est la somme des termes de la suite naturelle des nombres jusqu'à celui, inclusivement compris, qui indique le rang du terme considéré. D'après cela la série (A), partagée comme il suit, donnera les sommes successives demandées.

Rang	1, 2	3, 4, 5, 6	7, 8, 9
(A)	1, 3	5, 7, 9, 11	13, 15, 17
	2	4	3 termes,
Sommes. . . .		$32=2^5$	

Rang	1, 2	10. . . . 18	19. . . . 24	25. . . . 40	
(A)	1, 3	19. . . . 35		49. . . . 79	etc.
	2	9	6	16 termes,	
Sommes. . . .		$243=3^5$		$1024=4^5$.	

4. Dans l'identité (C) la différence des nombres

$$\frac{n^{p-1}(n^2+1)}{2},\ \frac{n^{p-1}(n^2-1)}{2} \text{ est } n^{p-1}.$$

Le nombre de termes de chaque suite sera donc encore une puissance de n. Dans le cas le plus simple, celui où $p=2$, cette identité devient :

$$\left(\frac{n(n^2+1)}{2}\right)^2-\left(\frac{n(n^2-1)}{2}\right)^2=n^4,$$

et chaque suite est composée de n termes. D'ailleurs, si dans $\frac{n(n^5-1)}{2}$ on change n en $n+1$, cette expression devient $\frac{n(n+1)(n+2)}{2}$, et sa différence avec $\frac{n(n^2+1)}{2}$ est $\frac{n(3n+1)}{2}$. Ce dernier nombre est donc l'intervalle qui doit exister entre le dernier terme de la n^2 suite et le premier de celle qui la suit. Si dans la formule $\frac{n(3n+1)}{2}$ on fait n successivement égal à 2, 3, 4, etc., et qu'on prenne les différences premières et deuxièmes, avec les résultats l'on pourra former le tableau suivant :

On voit que les différences secondes sont constantes. D'ailleurs la formule $\frac{n(n^2-1)}{2}$, pour $n=2$, devient 3. Donc la première suite commence au quatrième terme.

n	Valeurs.	1re différence.	2e différence.
2	7		
		8	
2	15		3
		11	
4	26		3
		14	
5	40		3
		17	
6	57		

Au moyen de la table précédente on pourra donc étendre, autant qu'on le voudra, par un calcul très-simple, le tableau suivant :

Rang,	1, 2, 3	4, 5	6. . . . 12	13, 14, 15
(A)	1, 3, 5	7, 9		25, 27, 29
	3	2	7	3 termes,
Sommes,	. . . .	$16=2^4$		$81=3^4$

Rang,	16. . . . 30	31, 32, 33, 34	
(A)		61, 63, 65, 67	etc.
	15	4 termes,	
Sommes,		$256=4^4$	

Nous bornerons là les applications numériques des identités (B) et (C) et nous passerons à la seconde propriété que M. Breton (de Champ) a fait connaître (*). Sa proposition est celle-ci : toute puissance entière d'un nombre entier est la différence des carrés de deux nombres entiers ; aussi et par conséquent elle est la somme d'un nombre déterminé de termes de la suite des nombres impairs.

Démonstration. On a d'abord l'identité :

$$(n+1)^2-n^2=2n+1.$$

Donc tout nombre impair est la différence de deux carrés ; ce qui devait être, puisqu'il fait nécessairement partie de la suite (A) et qu'il est conséquemment la différence entre la somme des termes de cette suite jusqu'au nombre lui-même et la somme des termes qui le précèdent.

Soit en second lieu $N = n \times n'$ et $n > n'$.

On aura l'identité

$$\left(\frac{n+n'}{2}\right)^2 - \left(\frac{n-n'}{2}\right)^2 = nn'.$$

C'est-à-dire que le produit nn' peut toujours être considéré comme la différence des carrés de deux nombres dont l'un est la demi-somme des deux facteurs, et l'autre leur demi-différence. Donc, suivant que les deux nombres

$$\frac{n+n'}{2} \quad \text{et} \quad \frac{n-n'}{2}$$

seront entiers, ou fractionnaires, le produit nn' jouira de la propriété énoncée, ou en sera dépourvu.

Le premier cas aura lieu quand les facteurs inégaux n et n' seront tous les deux pairs, ou tous les deux impairs. Le second, quand l'un étant simplement pair, l'autre sera impair. De là et du principe précédant résulte évidemment la proposition énoncée.

(*) Elle est de Rallier des Ourmes. (V. *Nouv. Ann.* p. 602). Tm.

Il faut néanmoins excepter, on le voit, la première puissance des nombres qui sont le produit de 2 par un nombre impair quelconque, puisque ne faisant point partie de la suite (A), ils ne sont pas d'ailleurs susceptibles, d'après la démonstration qui vient d'être donnée de la décomposition indiquée.

Appliquons la théorie qui précède à un exemple, et soit le nombre $105 = 3.5.7$.

on a : $105 = 3.35 = 5.21 = 7.15$,

donc : $105 = 19^2 - 16^2 = 13^2 - 8^2 = 11^2 - 4^2$,

ou : $105 = 33+35+37 = 17+19+21+23+25 = 9+11+$
$+13+15+17+19+21$.

Nous bornerons là ces applications.

Note. 1° Soit une progression arithmétique ayant pour premier terme $2y+1$, et 2 pour raison ; le nombre des termes étant $x-y$, les formules connues donnent $2x-1$ pour dernier terme, et x^2-y^2 pour somme.

2° L'équation $x^2-y^2=a$, où a est un nombre donné, a une infinité de solutions rationnelles ; à toutes les solutions où $x-y$ est un nombre entier, correspond donc une progression arithmétique dont la raison est 2, et dont la somme est a, et cette progression devient celle des nombres impairs lorsque x et y sont entiers, et par conséquent a. On sait d'ailleurs toujours trouver les solutions entières.

3° On trouve dans *Arithmetica integra* de Stiffel (p. 8), cette intéressante observation :

Dans toute progression géométrique, dont le premier terme est entier, et dont la raison est *deux élevé à une puissance de deux*, la somme de trois termes consécutifs est divisible par 7. Il est facile de trouver des propriétés analogues pour d'autres nombres. Tm.

BIBLIOGRAPHIE.

ACADÉMIES DÉPARTEMENTALES. (*)

—

Lille.

Mémoires de la Société royale des Sciences, de l'Agriculture et des Arts.

I. Recherches sur l'analyse des fonctions exponentielles et logarithmiques, par M. Vincent, professeur au Collége royal de Saint-Louis, p. 1-19, 1832, 2e partie, années 1831 et 1832.

Le savant auteur soumet les fonctions exponentielles à la même discussion, à laquelle Poisson et d'autres géomètres ont soumis les fonctions trigonométriques, et que doivent subir toutes les fonctions de nature *multiforme* ; or les fonctions exponentielles, comme on sait, s'expriment *symboliquement* par des fonctions *trigonométriques*. Il y a donc une liaison nécessaire entre les modes de discussion ; c'est ce que M. Vincent a montré d'abord dans un mémoire de 1825, inséré dans les Annales de Gergonne (t. XV, p. 1) ; et dans un second mémoire, non publié, de 1825 ; et enfin en 1831 dans le mémoire actuel. On s'est abstenu, à dessein, de l'emploi des séries. Nous pensons que la clarté gagne à faire usage de séries ; les équations symboliques, ou plus exactement les

(*) Nous donnerons l'analyse ou la simple annonce des mémoires, soit mathématiques, soit de physique, contenus dans les recueils qu'on voudra bien nous adresser.

identités symboliques, ne peuvent avoir un sens intelligible, qu'en les rapportant à des séries. Ainsi $e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sqrt{-1}\sin x$, signifie que si on remplace dans la série de e^x, le variable x par $x\sqrt{-1}$, on obtient un résultat identique à celui qu'on a, en ajoutant la série de $\cos x$ à la série de $\sin x$, celle-ci étant multipliée par $\sqrt{-1}$; et de même dans les autres identités; en général, la première qualité d'une question est d'être intelligible; autrement la réponse, si on la fait, sera un non-sens. Si on demande ce que signifie $(-1)^{\sqrt{2}}$; la réponse sera évidemment un non-sens, à moins d'en venir au sens symbolique. Il serait instructif d'avoir une discussion complète de la surface exponentielle, $z = x^y$; à $x=0$, correspond $y=0$, donc l'axe des y fait partie de la surface; toutefois si x étant toujours nul, on fait $y=0$; on a $z=1$; donc l'origine n'appartient pas à la surface. Comment concilier ces deux résultats ?

II. Barré. Mémoire sur les tangentes, 20-32.

Il s'occupe du problème de mener un cercle tangent à trois autres, et parvient à une solution donnée par Viète.

III. Barré. Sur la trisection de l'angle 25-32.

Par l'intersection d'une hyperbole, et d'un cercle; moyen pratique. M. Wantzel a rigoureusement établi que la solution est impossible, en ne prenant que les deux instruments admis par les anciens, règle et compas, c'est ce qu'on ignorait encore en 1831.

IV. Delezenne. Note sur les formules d'interpellation donnant les forces élastiques de la vapeur d'eau correspondantes à des températures données, 37-45.

L'auteur ramène les quatre formules connues, de Dulong, Tredgold, Coriolis, Roche, à cette forme simple $h = \left(\frac{a+t}{b}\right)^n$; h étant la pression exprimée en millimètres, et la température comptée depuis 0°. a, b, c, sont des constantes à déterminer et différentes pour les diverses formules. Des tables numériques établissent le parallélisme des quatre formules.

V. Barrois (Th.). Calcul de la puissance des régulateurs à force centrifuge, p. 41-69.

On sait que le problème revient à calculer le mouvement d'un corps pesant, assujetti à se trouver à chaque instant sur une sphère donnée, et dans un plan vertical tournant autour d'un axe. Le mémoire est terminé par des tables numériques.

VI. Note sur une formule générale de modulation, par M. Vincent; membre correspondant, 70-77.

On indique ici une méthode pratique extrêmement simple, pour passer d'un mode dans un autre, au moyen de quatre accords; le premier est l'accord parfait de sortie, et le dernier l'accord parfait de rentrée, et le troisième l'accord de septième dominante; ainsi, ces trois accords, ou leurs divers renversements, sont les données du problème, le second accord a deux notes en commun avec le troisième; il s'agit d'une troisième note, qui prépare la *transition*, note que l'auteur désigne sous le nom de note *préparatoire*, et il démontre rigoureusement l'existence de cette note, quels que soient les modes de *sortie* et d'*entrée*. Un tableau donné permet d'exécuter ces modulations *à vue*. Il est possible de ramener la question à un problème d'analyse indéterminée.

I. Additions au mémoire sur la résolution des équations numériques, par M. Vincent, 5-15, 1839; 3e partie, année 1838. Ces additions ont été admises dans le traité d'algèbre, généralement connu, de M. Bourdon.

II. Derode (Vr.). Génération des courbes, dites sections coniques ramenées à une question de géométrie élémentaire, 25-48.

On fait rentrer les sections coniques dans la géométrie élémentaire, par leurs propriétés focales; ainsi qu'on l'a fait dans le *Manuel de géométrie.*

III. Delezenne. Sur le son que produit un aimant par les décompositions et recompositions successives du magnétisme, 49-65.

Au moyen d'un appareil électro-magnétique, l'auteur cherche à expliquer l'observation de l'Américain Page, sur le son rendu par un aimant, soumis à l'action électrique.

I. Note sur les cycloïdes par M. Vincent, p. 5-15, 1842; 1re partie, année 1841.

Discussion des diverses branches de la cycloïde, par l'examen des *signes* de l'équation différentielle, et construction des cycloïdes allongées et raccourcies au moyen d'une *sinussoïde.*

II. Mutel. Note sur les dimensions et les distances des corps de notre système planétaire, exprimées en nouvelles mesures.

A été insérée dans la cosmographie du même auteur.

NIMES.

Mémoires de l'Académie royale du Gard.

1. Mémoire sur la courbe de l'amphithéâtre de Nîmes, par M. J. M. de Saint-Thomas-Saint-Laurent, capitaine au corps royal d'État-major (*), 16-56, 1844; années 1842-43-44.

La courbe intérieure du célèbre amphithéâtre est une ellipse; on a cru longtemps que la courbe extérieure, parallèle à l'intérieur était aussi une ellipse, mais des mesures exactes ont démontré ce qu'on pouvait conclure de considérations géométriques, que la courbe extérieure est une to-

(*) Excellent géomètre, malheureusement presque aveugle. Tm.

roïde, courbe qui est l'enveloppe d'un cercle de rayon constant, et dont le centre décrit une ellipse.

L'auteur donne ici une théorie complète de ce genre de courbes, la directrice du mouvement étant quelconque. M. Catalan a étudié la même courbe dans les nouvelles Annales, tome III, p. 553, 1844.

SOLUTION

D'un problème sur le cylindre droit.

PAR M. BRETON (DE CHAMP).
ingénieur des ponts et chaussées.

—

PROBLÈME. Étant donné la surface indéfinie d'un cylindre droit, trouver le rayon de la section circulaire.

Solution. Prenez à volonté sur la surface cylindrique deux points A, B. De chacun de ces points comme centre avec un rayon r, pris arbitairement, décrivez un arc *Cylindro-sphérique* ; ces deux arcs se couperont en un point m, *qui sera visiblement dans le plan perpendiculaire sur le milieu de la droite* A B. Déterminez de la même manière, avec d'autres rayons r_2, r_3, r_4, r_5 quatre autres points m_2, m_3, m_4, m_5 qui satisfassent à la même condition ; rapportez-les sur un plan au moyen de leurs distances mutuelles ; vous aurez ainsi cinq points, par lesquels vous savez faire passer une conique, laquelle n'est autre chose qu'une ellipse, ayant pour *petit axe le diamètre du cylindre.*

Note. Comment faut-il s'y prendre pour le cône de révolution ?

MÉMOIRE

sur la théorie des résidus dans les proportions géométriques.

(*Voir* p. 175.)

PAR M. E. PROUHET,
Professeur au collége royal d'Auch.

---

17. Nous devons à M. Poinsot une méthode directe pour trouver les racines primitives, progrès immense sous le point de vue théorique. Mais on jugera souvent plus commode dans la pratique d'avoir recours à des essais.

Pour diminuer le nombre des essais, on ne devra prendre pour générateur de période, aucun carré ou résidu de carré. Car si a est un résidu de carré en sorte que $b^2 = \dot{p} + a$, on aura $a^{\frac{n-1}{2}} = \dot{p} + b^{p-1} = \dot{p} + 1$, et par conséquent la période de a aura au plus $\frac{n-1}{2}$ termes.

Un nombre faisant partie d'une période incomplète, ne pourra pas non plus être racine primitive.

Enfin, si g est une racine primitive, on devra avoir

$$g^{\frac{p-1}{2}} = \dot{p} - 1.$$

Le théorème suivant indique, sans beaucoup de calcul, les nombres qui satisfont ou ne satisfont pas à cette condition, et pourra, par conséquent, servir à diminuer de beaucoup le nombre des essais.

18. Théorème. *Si on divise par p les termes de la progression*

$$(A) \qquad a,\ 2a,\ 3a,\ \ldots\ldots\ \frac{p-1}{2}\,a,$$

si on désigne par :

$$(1) \qquad a',\ a'',\ a''',\ \ldots\ldots\ a^{(\gamma)};$$

les restes moindres que $\frac{p-1}{2}$ *et par :*

$$(2) \qquad b',\ b'',\ b''',\ \ldots\ldots\ b^{(\mu)};$$

les restes plus grands que $\frac{p-1}{2}$; $a^{\frac{p-1}{2}}$ *sera* $\dot{p}+1$ *ou* $\dot{p}-1$, *suivant que* μ *sera pair ou impair ; c'est-à-dire qu'on aura toujours*

$$a^{\frac{p-1}{2}} = \dot{p} + (-1)^{\mu}. \qquad (*)$$

Si on prolongeait la progression (A) jusqu'au terme $(p-1)a$, on sait que tous les résidus qu'elle fournirait, seraient différents entre eux, et que ceux de la seconde moitié seraient les compléments à p des résidus de la première. Il suit de là qu'aucun des nombres

$$p-b',\ p-b''.\ p-b''',\ \ldots\ldots\ p-b^{(\mu)},$$

ne peut faire partie de la suite (1). Par conséquent tous les $\frac{p-1}{2}$ nombres suivants

$$a',\ a'',\ a''',\ \ldots\ a^{(\gamma)},\quad p-b',\ p-b'',\ p-b''',\ \ldots\ p-b^{(\mu)},$$

tous différents entre eux, tous moindres que $\frac{p-1}{2}$, doivent comprendre dans un ordre différent de l'ordre naturel, les $\frac{p-1}{2}$ entiers, inférieurs à $\frac{p-1}{2}$.

On aura donc :

$$a'a''a'''\ldots a^{(\gamma)}(p-b')(p-b'')\ldots(p-b^{(\mu)}) =$$
$$= \dot{p} + a'a''a'''\ldots b'b''b'''\ldots(-1)^{\mu} = 1.2.3.\ldots\frac{p-1}{2};$$

(*) M. Gauss a fait de ce théorème la base de sa démonstration de la loi de réciprocité entre les nombres premiers.

et par suite :

$$a'a''a'''\ldots b'b''b'''\ldots = \dot{p} + 1.2.3\ldots\frac{p-1}{2}(-1)^{\mu};$$

d'un autre côté on a évidemment :

$$1.2.3.\ldots\frac{p-1}{2}\,a^{\frac{p-1}{2}} = \dot{p} + a'a''a'''\ldots\ldots b'b''\ldots\ldots b^{(\mu)};$$

donc :

$$1.2.3\ldots\ldots\frac{p-1}{2}\,a^{\frac{p-1}{2}} = \dot{p} + 1.2.3.\ldots\frac{p-1}{2}(-1)^{\mu}$$

d'où :

$$1.2.3.\ldots\frac{p-1}{2}\left\{a^{\frac{p-1}{2}} - (-1)^{\mu}\right\} = \dot{p};$$

p ne peut pas diviser le produit $1.2.3.\ldots\frac{p-1}{2}$. Donc

$$a^{\frac{p-1}{2}} - (-1)^{\mu} = \dot{p};$$

ce qu'il fallait démontrer.

19. Problème. *a étant un diviseur de $p-1$, trouver le résidu de $a^{\frac{p-1}{2}}$ par rapport à p.*

Désignons par b le quotient de $p-1$ par a, en sorte que

$$ab = p-1.$$

Nous allons distinguer plusieurs cas.

1[er] *Cas.* $a = \dot{2}$, $b = \dot{2}$. Les résidus de la progression (A) forment $\frac{a}{2}$ progressions arithmétiques, contenant chacune b termes, comme il suit :

$$(1)\quad a, 2a, 3a, \ldots\ldots \frac{b}{2}a, \left(\frac{b}{2}+1\right)a, \ldots\ldots ab.$$

$$(2)\quad a-1, 2a-1, 3a-1, \ldots \frac{b}{2}a-1, \left(\frac{b}{2}+1\right)a-1, \ldots ab-1.$$

(3) . . . .

$$(n) \quad a-n+1,\ 2a-n+1,\ 3a-n+1, \ldots \frac{b}{2}a-n+1,$$
$$\left(\frac{b}{2}+1\right)a-n+1, \ldots\ldots ab-n+1$$

. . . .

$$\left(\frac{a}{2}\right). \quad a-\frac{a}{2}+1,\ 2a-\frac{a}{2}+1,\ 3a-\frac{a}{2}+1,\ -\frac{b}{2}a-\frac{a}{2}+1,$$
$$\left(\frac{b}{2}+1\right)a-\frac{a}{2}+1, \ldots ab-\frac{a}{2}+1.$$

Dans la n^e ligne, tous les termes sont moindres que $\frac{ab}{2}$, jusqu'au terme $\frac{b}{2}a-n+1$ inclusivement; mais le suivant $\frac{ab}{2}+a-(n-1)$ est évidemment supérieur à $\frac{ab}{2}$, puisque n est plus petit que $\frac{a}{2}$. Tous les résidus suivants sont à plus forte raison $> \frac{ab}{2}$. Ainsi chaque ligne renferme $\frac{b}{2}$ résidus plus grands que $\frac{ab}{2}$ ou $\frac{p-1}{2}$, donc

$$\mu = \frac{a}{2}\cdot\frac{b}{2}.$$

2^e *Cas.* $a=\dot{2}$, $b=\dot{2}+1$. En procédant comme dans le premier cas, on décomposerait la suite des résidus en $\frac{a}{2}$ progressions dont chacune renfermera $\frac{b+1}{2}$ résidus $> \frac{p-1}{2}$. Donc, ici,

$$\mu = \frac{a}{2}\cdot\frac{b+1}{2}.$$

3^e *Cas.* $a=\dot{2}+1$, $b=\dot{2}$. Les résidus de la progression (A) forment $\frac{a-1}{2}$ progressions de b termes, et une de $\frac{b}{2}$ termes comme il suit :

$$(1)\quad a,\ 2a,\ 3a,\ldots\frac{b}{2}a,\ \ldots\left(\frac{b}{2}+1\right)a,\ \ldots\ldots\ ab.$$

$$(2)\quad a-1, 2a-1, 3a-1,\ldots\frac{b}{2}a-1,\ldots\left(\frac{b}{2}+1\right)a-1,\ldots ab-1.$$

. . . .

$$(n)\quad a-n+1,\ 2a-n+1,\ 3a-n+1,\ldots\frac{b}{2}a-n+1,\ldots$$

$$\left(\frac{b}{2}+1\right)a-n+1,\ \ldots\ab-n+1.$$

. . . .

$$\left(\frac{a-1}{2}\right),\ a-\frac{a-1}{2}+1,\ 2a-\frac{a-1}{2}+1,\ 3a-\frac{a-1}{2}+1,\ldots$$

$$\frac{b}{2}a-\frac{a-1}{2}+1,\ldots\left(\frac{b}{2}+1\right)a-\frac{a-1}{2}+1,\ldots ab-\frac{n+1}{2}+1.$$

$$\frac{a+1}{2},\ a-\frac{a+1}{2}+1,\ 2a-\frac{a+1}{2}+1,\ \ldots\ \frac{b}{2}a-\frac{a+1}{2}+1.$$

La dernière ligne ne renferme aucun résidu plus grand que $\frac{ab}{2}$. Dans chacune des autres il y en a $\frac{b}{2}$. Donc

$$\mu=\frac{b}{2}\cdot\frac{a-1}{2}.$$

20. Problème. *a étant un diviseur de $p+1$, trouver le résidu de $a^{\frac{p-1}{2}}$ par rapport à p.*

Par des raisonnements qui diffèrent très-peu de ceux que nous venons de faire on trouvera :

$$\mu=\frac{a}{2}\cdot\frac{b}{2}\quad \text{si}\quad a=\dot{2},\qquad b=\frac{p+1}{a}=\dot{2}$$

$$\mu=\frac{a}{2}\cdot\frac{b-1}{2}\quad \text{si}\quad a=\dot{2},\qquad b=\dot{2}+1$$

$$\mu=\frac{a-1}{2}\cdot\frac{b}{2}\quad \text{si}\quad a=\dot{2}+1,\ b=\dot{2}.$$

21. Les formules précédentes conduisent très-simplement aux relations des nombres 2 et 3 avec tous les autres nombres premiers.

Si dans la première formule du n° 19 on fait $a=2$, on a :

$$\mu=\frac{b}{2}=\frac{\frac{p-1}{2}}{2}=\frac{p-1}{4},$$

et par suite,

$$2^{\frac{p-1}{2}}=\dot{p}+(-1)^{\frac{p-1}{4}}.$$

Donc $2^{\frac{p-1}{4}}$ sera $\dot{p}+1$ ou $\dot{p}-1$, suivant que $\frac{p-1}{4}$ sera pair ou impair ; ou suivant que $p-1$ sera $\dot{8}+1$ ou $\dot{8}-3$.

Si dans la deuxième formule on fait $a=2$, on a :

$$\mu=\frac{b+1}{2}=\frac{\frac{p-1}{2}+1}{2}=\frac{p+1}{4},$$

et par suite,

$$2^{\frac{p-1}{2}}=\dot{p}+(-1)^{\frac{p+1}{4}},$$

et $2^{\frac{p-1}{2}}$ sera $\dot{p}+1$ ou $\dot{p}-1$, suivant que $\frac{p+1}{4}$ sera pair ou impair : c'est-à-dire suivant que p sera $\dot{8}-1$ ou $\dot{8}+3$.

Ainsi en résumé :

$$2^{\frac{p-1}{2}}=\dot{p}+1 \qquad \text{lorsque } p=\dot{8}\pm 1$$

$$2^{\frac{p-1}{2}}=\dot{p}-1 \qquad \text{lorsque } p=\dot{8}\pm 3.$$

Ces relations permettent de trouver directement une racine primitive dans tout système dont la base $p=2q+1$, q étant un nombre premier. Le nombre des termes d'une période dans ce système ne peut-être que 1, 2, q, ou $2q$, et on aura :

$$2^q = \dot{p} \pm 1,$$

suivant que p sera $\dot{8}-1$ ou $\dot{8}-3$. Or, dans le premier cas, d'après le théorème du nº 9, $\frac{p-1}{2}$ ou q aura une période de $2q$ termes et sera racine primitive. Dans le second cas le nombre des termes de la période de 2 sera nécessairement pair, et ne pourra être que $2q$. 2 sera donc alors racine primitive.

22. Cherchons maintenant les relations du nombre 3 avec les autres nombres premiers.

p étant un nombre premier plus grand que 3, l'un des deux quotients,

$$\frac{p-1}{3}, \qquad \frac{p+1}{3},$$

est entier.

Dans le premier cas la troisième formule du nº 19 donnera :

$$\mu = \frac{\dot{b}}{2} = \frac{p-1}{6}.$$

Dans le deuxième, la troisième formule du nº 20 donnera :

$$\mu = \frac{b}{2} = \frac{p+1}{6}.$$

Ainsi

$$3^{\frac{p-1}{2}} = \dot{p} + (-1)^{\frac{p+1}{6}}.$$

M. Cauchy, dans ses exercices de mathématiques, a donné le moyen de trouver une équation satisfaite exclusivement par toutes les racines primitives d'un système. Un exemple fera comprendre la marche suivie par l'illustre géomètre.

Supposons qu'il s'agisse de trouver les racines primitives du système dont la base est 37. Cela revient évidemment à chercher les nombres qui satisfont à l'équation

$$(1)\qquad x^{36}-1=\dot{37},$$

sans satisfaire à aucune équation analogue dans laquelle l'exposant de x serait moindre. Or cette équation se ramène aux deux suivantes :

$$(2)\qquad x^{18}-1=\dot{37},$$

$$(3)\qquad x^{18}+1=\dot{37}.$$

Les solutions de (2) doivent être rejetées, puisque tout nombre qui satisfait à cette équation a au plus 18 termes à sa période. Quant à l'équation (3) son premier membre est divisible par x^6+1, et elle se ramène aux deux suivantes :

$$(4)\qquad x^{6}+1=\dot{37},$$

$$(5)\qquad x^{12}-x^{6}+1=\dot{37}.$$

Tout nombre qui satisfait à l'équation (4) doit être rejeté, car il ne peut avoir à sa période plus de 6 termes. Donc, en définitive les 12 racines primitives du système ne sont autres que les 12 solutions entières et moindres que p de l'équation

$$x^{12}-x^{6}+1=\dot{37}\ (*).$$

Mais cette méthode est de peu d'utilité dans la recherche qui nous occupe. Car l'équation finale à laquelle on arrive est

(*) Le même raisonnement fait voir que dans tout système dont la base est $\dot{3}7+1$, les racines primitives de p par rapport à 37 s'obtiennent en résolvant l'équation

$$x^{12}-x^{6}+1=\dot{p}.$$

souvent très-compliquée et ne peut d'ailleurs être résolue que par tâtonnement. C'est ainsi que pour trouver les racines primitives du système dont la base est 23, on aurait à résoudre l'équation

$$x^{10}-x^9+x^8-x^7+x^6-x^5+x^4-x^3+x^2-x+1=\dot{23},$$

ce qui est bien moins simple que de rechercher un nombre qui ne satisfasse à aucune des trois équations

$$x-1=\dot{23}, \quad x^2-1=\dot{23}, \quad x^{11}-1=\dot{23}.$$

§ III.

Des systèmes de périodes dont la base est une puissance d'un nombre premier.

24. Nous allons maintenant supposer que la base du système est p^h, p étant un nombre premier plus grand que 2. Le nombre des périodes du système ou l'indicateur de P sera $p^{h-1}(p-1)$, et toute période complète, s'il en existe, devra présenter $p^{h-1}(p-1)$ termes.

25. Théorème. *Si la période de a comprend n termes dans le système p^h, la période de ce nombre en comprendra n ou $\dot{p}$ dans le système p^{h+1}.*

Soit m le nombre des termes de la période de a dans le système p^{h+1}, on aura :

$$a^m=\dot{p}^{h+1}+1,$$

et par conséquent aussi,

$$a^m=\dot{p}^h+1.$$

Donc m ne peut être que n ou $\dot{n}$. Posons donc $m=nx$. On a par hypothèse :

$$a^n=Ap^h+1;$$

d'où l'on tire :

$$a^{nx}=\dot{p}^{h+1}+Axp^h+1.$$

Or la plus petite valeur à donner à x pour que le second nombre soit $\dot{p}^{h+1}$ est 1 si A est $\dot{p}$, et p dans le cas contraire. Donc $x=1$ ou p. Donc $m=n$ ou pn, c. q. f. d.

Corollaire. Si n est le nombre des termes de la période de a dans le système p et dans le système p^2, p^3, p^4, etc., jusqu'à p^{r+1} exclusivement, le nombre des termes de la période de a dans le système $p^{r+\alpha}$ sera np^α (*).

D'après l'hypothèse on a :

$$(1) \qquad a^n = \mathrm{A}p^r + 1,$$

A étant premier avec p. La période de a ne pouvant être de n termes dans le système p^{r+1}, sera nécessairement de np termes ; posons donc :

$$(2) \qquad a^{np} = \mathrm{A}'p^{r+1} + 1.$$

Je dis que A′ est aussi premier avec p. En effet, élevons les deux membres de (1) à la puissance p, nous aurons :

$$a^{np} = 1 + p\mathrm{A}p^r + \frac{p(p-1)}{1\,.\,2}\mathrm{A}^2p^{2r} + \ldots$$

$$= 1 + p^{r+1}\mathrm{A}(1+\dot{p});$$

donc

$$\mathrm{A}' = \mathrm{A}(\dot{p}+1).$$

A′ est donc premier avec p. Il résulte de là que le nombre des termes de la période de a dans le système p^{r+2} ne peut être np ; ce nombre sera donc np^2, conformément à l'énoncé.

On prouverait de même que la période de a est de np^3 termes par rapport à p^{r+3}, de np^4 par rapport à p^{r+4}, et ainsi de suite. Donc, etc.

26. Théorème. *Il existe des racines primitives dans tout*

(*) V. t. II, p. 84, un article de M. Thibaut.

système, dont la base est une puissance d'un nombre premier impair.

Soit a une racine primitive de p; si la période de a par rapport à p^2 n'est pas de $p-1$ termes, la période de a par rapport à p^h sera, d'après le corollaire précédent, de $p^{h-1}(p-1)$ termes. Donc a sera racine primitive de p^h, quel que soit h.

Si la période de a dans le système p^2 est de $p-1$ termes, comme dans le système p, en sorte que l'on ait :

$$a^{p-1} = \mathrm{A}p^2 + 1.$$

Posons : $$a' = p + a,$$

nous aurons :

$$a'^{\,p-1} = \dot{p}^2 + (p-1)pa^{p-2} + a^{p-1}$$
$$= \dot{p}^2 + (p-1)pa^{p-2} + 1.$$

On voit par là que a'^{p-1} n'est pas $\dot{p}+1$. Donc la période de a' n'a pas le même nombre de termes dans les systèmes p et p^2. Donc la période de a' par rapport à p^h sera de $p^{h-1}(p-1)$ termes, et a' sera racine primitive de p^h.

(*La fin prochainement*).

NOTICE

Sur la Rhythmomachie, ou combat des nombres.

—

Il est très-heureux qu'il y ait des noms très-célèbres portés par des hommes vus à travers une telle épaisseur de siècles, que leur existence même est douteuse. Ces illustres inconnus servent admirablement notre ignorance, surtout en fait d'origines. Ainsi, quand les anciens ne savaient à qui attribuer un travail ayant exigé l'emploi d'une grande force physique, ils nommaient Hercule. S'agissait-il de musique, de poésie, on désignait Amphion, Orphée, etc; de sciences physiques, chimiques, astronomiques, on désignait Atlas, Hermès, Mercure, etc. — Tous ces noms passablement vieillis sont tombés en désuétude. Un seul s'est conservé et est encore souvent prononcé; c'est Pythagore. Aucun de ses écrits, si toutefois il a écrit, ne nous est parvenu; on ne sait dans quel pays, dans quel siècle il a vécu. Et ayant recommandé le silence à ses adeptes, on leur fait dire ce qu'on veut; ce qui est fort commode. Ainsi, comme on ne connaît d'aucune manière l'auteur de l'espèce de jeu de dames connu sous nom de Rhythmomachie, il est tout naturel d'en faire remonter l'invention à Pythagore. C'est ce qu'on lit dans un ouvrage très-rare dont nous avons extrait cette notice : Le titre in extenso est « Nobilissimus et antiquissimus ludus Pythagoreus (qui Rhythmomachia nominatur) in utilitatem et relaxationem studiosorum comparatus ad veram et facilem proprietatem et rationem numerorum assequendam, nunc tandem per Claudium Buxerium Delphinatem illustratus. Lutetiæ apud Gulielmum Cavellat, sub pingui gallina, ex adverso collegii Cameracensis; abacus et calculi væneunt in Palatio, apud Joannem Gentil. 1556, in-12 de cinquante-deux feuillets. » On n'a numéroté que le recto. Au milieu de la page du titre, on voit une grosse poule entourée d'un cercle, autour duquel on lit : in pingui gallina. Claude Boissière, né dans le diocèse de Grenoble, et auteur de quelques autres ouvrages (*), professait les mathématiques à Paris. Il a dédié cet ouvrage à Antoine Escalin des Aimars, baron de La Garde, célèbre général des galères sous François Ier et Charles IX; une année auparavant, en 1555,

(*) Art d'arithmétique et art poétique, deux traités imprimés à Paris, chez Aumet-Brière en 1551.

l'auteur avait publié le même ouvrage en français. On lit dans la dédicace : « Sed cum anno superiore hunc philosophum ludum, cui nomen est Rhythmomachia, ad mentem tuam levandam gallico sermone edidissem, te non graviter et malesté laturum judicavi, si idem denuò latinitate donatus in omnium conspectu, celsitatis tuæ claritate illustratus appareat ». Cette édition française est encore plus rare. Nous allons donner une description succincte de ce jeu qui, à ce qu'il paraît, se jouait encore à la fin du seizième siècle, puisqu'un marchand établi au Palais vendait le damier et les pièces.

Abaque ou damier.

Le damier est un rectangle, divisé en cases, huit en hauteur et seize en largeur ; ou bien encore 16 sur 16.

Pièces ou jetons.

Il y a en tout 48 pièces ; 16 de formes rondes ; 16 triangulaires et 16 carrées, et deux pièces comme les tours aux échecs ; mais au lieu d'être cylindriques, ce sont deux pyramides.

Nombres inscrits sur les pièces.

Ceci exige que nous rappelions les noms qu'on donnait autrefois à certains rapports géométriques.

Rapports *multiples* $a : an$

Rapports *superparticuliers* $a : \frac{a(1+n)}{n}$.

Rapports *superpartients* $a : \frac{a(2n+1)}{n+1}$.

a et n sont des nombres entiers ; et, selon que n est pair ou impair, les rapports sont dits pairs ou impairs.

A ce jeu le premier terme a du rapport est dit le *postulant* (petitor) et le second terme, le *postulé* (postulatus) ; c'est du moins les noms que Boissière leur donne. Tous les nombres inscrits sur les jetons ronds donnent des rapports *multiples* pairs ou impairs; les jetons triangulaires représentent des rapports *superparticuliers* et les jetons carrés sont réglés par des rapports *superpartients*.— Les jetons à rapports *pairs* sont de même couleur, que je suppose, blanche, et les rapports *impairs* d'une autre couleur, que je suppose noire. Ainsi il y a 24 pièces blanches et 24 pièces noires. Cela posé, on comprendra tous les nombres inscrits dans ce tableau, nous désignons les *postulants* par P et les *postulés* par *p*.

Jetons.					
Ronds.	P. blancs.	2.	4.	6.	8.
	p. id.	4.	16.	36.	64.
	P. noirs.	3.	5.	7.	9.
	p. id.	9.	25.	49.	81.
Triangles.	P. b.	6.	20.	42.	72.
	p. b.	9.	25.	49.	81.
	P. n.	12.	30.	56.	90.
	p. n.	16.	36.	64.	100.
Carrés.	P. b.	15.	45.	91.	153.
	p. b.	25.	81.	169.	281.
	P. n.	28.	66.	120.	190.
	p. n.	49.	121.	225.	361.

La ligne *P b* des triangles se forme, en ajoutant terme à terme les lignes *P b* et *p b* des ronds et la ligne *P n* en ajoutant terme à terme les lignes *P n*, *p n* des ronds.

De même, la ligne *P b* des carrés se forme, en ajoutant terme à terme les lignes *P b*, *p b* des triangles.

$$9 = 6 + \frac{1}{2} \cdot 6;\quad 25 = 20 + \frac{1}{4} \cdot 20, \text{ etc.} \ldots$$

$$25 = 15 + \frac{2}{3} \cdot 15;\quad 81 = 45 + \frac{4}{5} \cdot 45, \ldots \text{etc.}$$

Les deux pyramides.

1. Pyramide blanche à assises paires.—Elle est formée de six assises disposées l'une au-dessus de l'autre, et chacune étant un parallélipipède rectangle à base carrée ; sur les deux faces verticales adjacentes de la première assise qui sert de base, on lit respectivement les nombres 6 et 36, sur la deuxième les nombres 5 et 25 ; sur la troisième, 4 et 16 ; sur la quatrième on lit 3 et 9 ; sur la cinquième 2 et 4, et sur la dernière 1 et 1 ; les assises vont en diminuant de grandeur, suivant les rapports de ces carrés ; de sorte que le tout forme une pièce pyramidale ; sur la face horizontale de l'assise terminale, on écrit le nombre $91=1+4+9+16+25+36$. Le jeton 91 des *Pb* des carrés est supprimé, la pyramide en tenant lieu.

2. Pyramide noire à assises impaires. — Elle est formée de 5 assises ; celle du bas porte 8,64 ; ensuite 7,49, 6,36, 5,25, 4,16. De sorte que cette pyramide est tronquée ; sur la base terminale on écrit $190=16+25+36+49+64$, et on supprime le jeton portant même nombre dans les *P n* des carrés. Ainsi, les deux pyramides comprises, il n'y a en tout que 48 pièces.

Disposition initiale du jeu.

Les blancs jouent contre les noirs ; le damier contient 16 lignes, chacune de 8 cases ; 8 de ces lignes forment le champ des blancs et les 8 autres le champ des noirs. Il suffit d'indiquer la position initiale des blancs ; car les noirs se placent symétriquement par rapport à la ligne médiane.

4^me^ ligne.			8	6 rond	4	2		
3^me^ ligne.	81 triangle	72	64	36	16	4	6 triangle	9
2^me^ ligne.	153	Pyramide 91	49	42	20	25 triangle	45	15
1^re^ ligne.	289	169					81 carré	25 carré

Marche des pièces.

Toutes les pièces ont la même marche, celle de la tour aux échecs; en avant et en arrière sur la même colonne, de gauche à droite et *vice versâ* sur la même ligne, la marche oblique n'existe pour aucune pièce.

Règles du jeu des jetons.

Première règle. Si entre la pièce de valeur A et la pièce adverse de valeur n A, existe n case vide; et si c'est le tour à la pièce A de jouer, elle s'empare de la pièce n A; mais reste à sa place et ne prend pas la place de n A comme aux échecs. Ainsi, si les deux pièces sont de même valeur, il ne doit y avoir qu'une case d'intervalle.

Deuxième règle. Si deux pièces A et B de même couleur ont entre elles une pièce C de couleur opposée et telle qu'on ait $C=A+B$, elles s'emparent de la pièce C.

Troisième règle. Si une pièce est entourée dans les quatre cases voisines de quatre pièces adverses, elle est prise.

Règle du jeu des pyramides.

La pyramide équivaut à autant de jetons qu'elle a d'assises, et ces assises sont soumises aux règles précédentes des jetons; exemple: Le 5, rond noir devant jouer se trouve sur la même ligne que la pyramide blanche, et il y a 5 cases vides d'intervalle; or 5×5 font 25 qui est inscrit sur l'assise 5; la pyramide a le droit de se racheter et l'adversaire prend un 25 parmi les jetons. Mais si ce 25 était déjà pris, selon les anciens, les noirs n'ont droit à rien; mais selon Boissière, les noirs peuvent prendre une pièce quelconque à volonté: si c'est la base de la pyramide qui est attaquée elle perd le droit de rachat et est enlevée; on voit aussi combien la pyramide a d'avantage pour enlever des jetons au moyen de ses assises.

Conventions du jeu relatives au gain.

Les conventions sont de deux genres : 1° communes; 2° distinguées.

Conventions communes. Le gagnant doit avoir le plus grand nombre de pièces, ou bien le plus grand nombre de points en prenant la valeur numérique des pièces pour autant de points ou bien le plus grand nombre de chiffres ; on peut encore combiner ces conventions ensemble.

Conventions distinguées. Elles sont de trois sortes :

1° *La grande victoire.* Quand on parvient à faire entrer dans le champ de l'adversaire trois nombres formant une proportion, ou géométrique, ou arithmétique, ou harmonique.

2° *La victoire majeure.* Si l'on parvient à faire passer dans le champ de l'adversaire quatre nombres tels que trois forment une de ces proportions et trois une autre de ces proportions. Exemple : 2, 3, 4, 8, où l'on trouve 2, 3, 4 proportion arithmétique, 2, 4, 8 proportion géométrique, ou bien 3, 4, 5, 15; ici 3, 4, 5 forment une proportion arithmétique ; 3, 5, 15, une proportion harmonique.

3°. *La victoire suprême.* Lorsque les quatre nombres présentent en même temps les trois proportions. *Exemple :* 2, 3, 4,6, on y trouve 2, 4, 6 ; 2, 3 : : 4, 6 ; 2, 3, 6 proportion harmonique.—Il est facile de trouver quatre nombres qui jouissent de cette propriété. Boissière donne ensuite (feuillet 41, verso) la description d'un autre jeu Rhythmomachique, dit des *Chaldéens*, et qu'il a trouvé dans un opuscule anglais, traduit, à ce qu'on dit, du chaldéen, et qui lui a été communiqué par un Anglais, nommé Thomas Topcliphe, dont il fait un éloge fort singulier en ces termes : « Vix excellentiore et eruditione et honestate, quam vix quisquam de anglo homine sibi posset persuadere : neque hoc dictum velim, quò quis existimet me anglici nominis majestatem velle imminuere (nam Anglos aliis hominibus inferiores esse non judico), sed quòd absoluta hominis perfectio maximæ mihi sit admirationi. » On voit que les sots préjugés nationaux, même entre savants ne datent pas d'aujourd'hui.

Dans ce jeu chaldéen les pièces sont les mêmes que dans le jeu Pythagoricien, mais la marche est différente. Les *ronds* ne peuvent avancer qu'obliquement et d'une case seulement; les triangles marchent droit et trois cases, à partir de celles qu'ils occupent; les carrés de quatre cases, aussi à partir de celles qu'ils occupent et toujours droit. Pour se sauver d'une attaque, une pièce peut sauter comme le cavalier aux échecs, et une pyramide marche comme la reine aux échecs. Les pièces se prennent par addition, soustraction, multiplication, division. Cet énoncé peut suffire.

Boissière cite, parmi les anciens qui se sont occupés de Rhythmomachie, le pape Gerbert, du onzième siècle; Hermanuus Contractus (le rachitique), auteur du treizième siècle, Nicolas Orestinus, et parmi les contemporains Orontius Finæus, et surtout le célèbre et malheureux Jacques Fabre d'Etaples qui a joint à son édition (première, 1496, deuxième, 1514) de l'arithmétique de Jordanus Nemorarius, auteur du douzième siècle, un appendice de quatre pages in-folio, sous forme de dialogue sur la Rithmomachie. Il a dédié cet opuscule à Bernardo Vencario, doctori medico numerorum amatori. On sait qu'autre fois les médecins ne négligeaient pas les mathématiques; ce même docteur dit en parlant de ce jeu : « Ludum numerorum non illiberalem, quem deceat studiosos adolescentes cognocere, ne nimium tetrice videantur adventasse disciplina, et quo interdum studii defessi primi earum tyrones solentur animum et cum utili ocio, tum honesto, vires custodiant incolumes. Tale præfecto consilium medicum decuit ». Tout en rendant justice aux bonnes intentions qui ont dicté ce conseil, nous croyons que les exercices gymnastiques sont plus propres à conserver les forces aux jeunes gens que les jeux rhythmomachiques les plus raffinés. Nous reviendrons sur cette édition curieuse de Jordan dont la seconde est sortie des presses de Henri Étienne l'ancien. L'ouvrage de Boissière est terminé par le dialogue cité ci-dessus de Fabre, qui a lieu entre Alcmeon, disciple de Pythagore, et deux jeunes gens, Bathille et Brontin ; contient une description très-succincte du jeu, et serait inintelligible sans le travail de Boissière. Un auteur italien s'en est aussi occupé dans un opuscule qui a pour titre : « Il nobilissimo et antiquissimo Giuoco Pythagoreo, nominato Rythmomachia, civè battaglia de consonantie de numerii ritrovato per utilità et solazzo delli studiosi et al presente per Francesco Barozzi gentilhuomo venetiano in lingua vulgare in modo di Paraphrasi composto. In Venetia, 1572, p. in-4. »

Barozzi a été traduit en allemand par Gustave Selenus qui l'a joint avec des gloses tirées de Boissière, à son ouvrage sur le jeu des échecs. Das Schach Oder Kœnigs-Spiel von Gustavo Seleno ; Leip., 1617, in-folio. Nous trouvons ces renseignements dans l'histoire des mathématiques de Kæstner, liv. I, art. Jordanus ; histoire qui mériterait de trouver un traducteur.

Nous devons à M. Chasles la communication de l'ouvrage de Boissiére, sujet de cette notice; il fait partie de la précieuse collection mathématique dont notre excellent géomètre fait un si fécond emploi, un si libéral usage.

Dans une lettre à M. Letronne sur un abacus athénien insérée dans la *Revue archéologique* du 15 septembre dernier, M. le professeur Vincent, après avoir expliqué avec son érudition ordinaire et avec une grande lucidité, l'usage arithmétique de cette *table à compter,* conjecture qu'elle a pu servir simultanément comme *table à jouer*, comme table rhythmomachique. Il est probable même que ces tables ont donné naissance à nos jeux de cartes qui, à certains égards, ne sont que des *combats* de nombres. Les arithméticiens des deux derniers siècles, tels que Legendre, Barême, contiennent encore des règles pour calculer avec des jetons (πεσσοι); de là aussi l'origine connue de *chambre de l'échiquier* pour chambre des comptes; encore de nos jours, les rosaires et les chapelets sont des abaques linéaires.

Tm.

SIMPLIFICATION DANS LA SOUSTRACTION

de deux fractions numériques; d'après M. Bardel, ancien bénédictin. (*Comptes rendus de l'Acad.*, 2me série, 1835, p. 44).

On a : $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a(d-c)-c(b-a)}{bd}$; lorsque a et b, c et d diffèrent peu, le numérateur du second membre est plus facile à effectuer que le numérateur ordinaire $ad-bc$.

QUESTIONS.

134. La surface d'un cylindre oblique à base circulaire, est égale à celle d'un rectangle dont un côté serait le diamètre de ce cercle, et l'autre côté la circonférence d'une ellipse, ayant pour axes principaux la hauteur et l'arête du cylindre.

Brinkley.

135. Quelle relation doit exister entre le côté d'un triangle isocèle et la base, pour que la bissectrice de l'angle à la base ait un rapport donné avec le côté du triangle? (VIETE).

136. Construire le quadrilatère dont on connait : 1° une diagonale ; 2° les angles qui ont leurs sommets aux extrémités de cette diagonale ; 3° les projections des deux autres sommets sur cette diagonale. Discuter le cas particulier où les angles donnés sont droits. (PIOBERT).

137. L'enveloppe des bases de tous les triangles rectilignes qui ont un angle commun, et même périmètre est un cercle.

Même propriété pour le triangle sphérique.

138. Une parabole ayant le foyer fixe et touchant une conique donnée, de même foyer ; si l'on mène par le foyer une droite faisant un angle constant avec l'axe variable de la parabole, le lieu du point d'intersection de cette droite et de la parabole variable est une conchoïde du cercle (Limaçon de Pascal). (CHASLES).

139. Connaissant le dividende, le diviseur et le résidu d'une division, comment trouve-t-on les chiffres du quotient de droite à gauche?

ANNONCE.

CONSTRUCTION

des normales à la parabole par un point pris sur la parabole.

PAR M. GEORGES RITT.

(*Fig.* 58.) Par le point M abaissez MP perpendiculaire sur l'axe, et prolongez jusqu'en M′ symétrique de M.

Prenez $PN = \frac{1}{2}$ OA $= p$, demi-paramètre de la parabole. MN est une des normales. Joignez AM′, et, par le point I, milieu de OA, menez IH parallèle à AM′.

Si AP $> 4p$, c'est-à-dire si le point est au delà de la développée EDF, IH coupera la courbe en deux points N′, N″; MN′, MN″ sont les deux autres normales.

Si M se confond avec le point E, IH sera tangente à la courbe, et il n'y aura que deux normales.

Si M est en deçà du point E, IH ne rencontrera pas la courbe, et il n'y aura qu'une normale.

2. (*fig.* 59) Si le point M est sur la développée EDF, abaissez l'ordonnée MP et prenez $DI = \frac{1}{3}$ DP; MIN est normale en N.

Élevez l'ordonnée NQ, et prenez QR $=$ 2NQ; puis menez RN′ parallèle à l'axe, MN′ est normale en N′.

Je crois qu'il est possible de tirer parti de ces constructions et de les appliquer aux cas où le point M se trouve au delà ou en deçà de EDF.

Les correspondants similaires peuvent conduire à la solution du problème. (V. t. II, p. 186.)

THÉORÈMES

sur les angles des polygones plans convexes et des polygones sphériques convexes.

PAR M. C. JOHN,
Élève en mathématiques, à Marseille.

THÉORÈME I. Dans tout polygone plan convexe, ayant plus de quatre côtés, le nombre des angles droits ajouté au nombre des angles aigus est toujours moindre que quatre.

Démonstration Soient o, d, a le nombre des angles obtus, droits et aigus d'un polygone convexe de n côtés; on a donc $o+d+a=n$; chaque angle obtus est moindre que deux droits; donc $(2o+d+a)$ surpasse le nombre de droits contenus dans la somme des angles du polygone; de là l'inégalité $2o+d+a>2n-4$. Éliminant o au moyen de l'équation, il vient $2n-d-a>2n-4$; donc $d+a<4$, c. q. f. d.

Corollaire. Le nombre des angles obtus surpasse $n-4$.

THÉORÈME II. Même énoncé pour le polygone sphérique convexe.

Démonstration. Conservons la même notation; un triangle sphérique contient $2(1+e)$ angles dièdres où e représente l'excès sphérique moindre que l'unité. Donc un polygone de n côtés contient $2n-4+2e$ angles droits, où e est la somme des $n-2$ excès sphériques répondant aux $n-2$ triangles qui composent le polygone. Raisonnant comme ci-dessus, on obtient l'inégalité $2n-(a+d)>2n-4+2e$. Il est évident que $2e$ doit être moindre que 4. Donc $a+d<4-2e$, et, *à fortiori*, $a+d<4$.

Corollaire 1. Dans un angle solide convexe, le nombre des angles dièdres droits ajoutés au nombre des angles dièdres aigus est moindre que 4.

Corollaire 2. Soit S le nombre des sommets d'un polyèdre convexe; le nombre total des angles dièdres droits et aigus est moindre que 4S.

Corollaire 3. F et A étant le nombre des faces et des arêtes, on a la relation d'Euler $S + F = A + 2$. Donc le nombre total des angles dièdres droits et aigus est moindre que $4A - 4F + S$.

Note. Les deux théorèmes se déduisent directement de cette considération. Dans un polygone plan convexe, la somme des suppléments des angles est égale à quatre droits, et dans un polygone sphérique, à moins de quatre droits.

Tm.

MÉMOIRE

sur la théorie des résidus dans les proportions géométriques (fin).

(*Voir* p. 175.)

PAR M. E. PROUHET,
Professeur au collége royal d'Auch.

---

27. THÉORÈME. *Dans tout système dont la base* P *est une puissance d'un nombre premier impair, si* n *est un diviseur de* i(P), *il y aura* i(n) *périodes de* n *termes.*

Soit a une racine primitive du système P; posons $i(P) = mn$; si on prend dans la période de a un terme dont le rang soit mn', n' étant premier avec n, la période engendrée par ce terme sera de $\frac{i(P)}{m}$, ou n termes, d'après la règle du n° 10. Or, comme on peut prendre pour n' tous les nombres inférieurs et premiers à n, on voit qu'il y aura dans la période de a $i(n)$ nombres engendrant des périodes de n termes, c. q. f. d.

Remarque. Cette démonstration fait croire que le théorème a lieu dans tout système qui possède une période complète.

28. Théorème. *Lorsque la base* P *est une puissance d'un nombre premier impair, la* mème *colonne du système contient tous les termes d'une période dont le nombre des termes est* $\frac{i(P)}{d}$, d *étant le plus grand commun diviseur de* m *et* i(P).

Soit a une racine primitive, et supposons

$$a^m = \dot{P} + \alpha.$$

La période de α relativement à P sera de $\frac{i(P)}{d}$ termes (10).

Or de l'égalité précédente on tire :

$$(a^2)^m = \dot{P} + \alpha^2$$
$$(a^3)^m = \dot{P} + \alpha^3$$
$$(a^4)^m = \dot{P} + \alpha^4.$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

Mais a, a^2, a^3 donnent pour résidus tous les nombres inférieurs et premiers à P. Donc ces nombres élevés à la $m^{ème}$ puissance donnent tous les termes de la période de α; donc la $m^{ème}$ colonne renfermera tous les résidus de cette période, c. q. f. d.

29. Théorème. *Toutes choses étant posées comme au théorème précédent, le même résidu se répétera* d *fois dans la* mème *colonne.*

Soit

$$b_1,\ b_2,\ b_3, \ldots\ b_d$$

une période de d termes, on aura $b_1^d = \dot{P} + 1$, et par conséquent $b_1^m = \dot{P} + 1$, puisque m est $\dot{d}$. Il suit de là que $a^m b_1^m$ donne le même résidu que a^m. La même chose pouvant se dire de b_2, de b_3, etc., il en résulte que le nombre

$$ab_1, ab_2 \dots . ab_d,$$

ou leurs résidus par rapport à P, élevés à la $m^{ème}$ puissance, sont tous $\dot{P} + \alpha$. Donc le même résidu se répète au moins d fois, et comme il y a dans la $m^{ème}$ colonne $\frac{i(P)}{d}$ résidus différents, on ne doit pas trouver plus de d fois le même, autrement la $m^{ème}$ colonne renfermerait un nombre de termes supérieur à $i(P)$. Donc, etc.

30. Si l'on a bien suivi les raisonnements qui précèdent, on a dû voir qu'ils ne s'appliquent pas au cas où la base est une puissance de 2. Voyons ce qui doit se passer dans un pareil système.

Si $P = 2^m$, $i(P) = 2^{m-1}$; une période complète devrait avoir 2^{m-1} termes, mais il est facile de voir qu'aucune période ne peut avoir plus de 2^{m-2} termes. En effet, on a identiquement :

$$a^{2^{m-2}} - 1 = (a-1)(a+1)(a^2+1)(a^{2^2}+1)(a^{2^3}+1)\dots$$
$$\dots(a^{2^{m-3}}+1).$$

Le second membre renferme $m-1$ facteurs pairs, et est par conséquent divisible par 2^{m-1}; mais l'un des deux facteurs $a-1$, $a+1$ est divisible par 4; on aura donc toujours, a étant un nombre impair quelconque :

$$a^{2^{m-2}} - 1 = \dot{2^m}.$$

Ainsi il n'existe pas de racine primitive absolue dans le système 2^m.

31. Dans le système qui nous occupe, il est possible de

déterminer directement les racines primitives de 2^n par rapport à 2^m, n étant au plus égal à $m-2$.

Nous supposerons d'abord $n > 1$; a désignant l'une des racines cherchées, qui est nécessairement impaire, on a identiquement :

$$a^{2^n} - 1 = (a-1)(a+1)(a^2+1)(a^{2^2}+1)\dots(a^{2^{n-1}}-1).$$

Les facteurs a^2+1, $a^{2^2}+1$.... sont tous divisibles par 2 sans l'être par 4. La plus haute puissance de 2 qui divise leur produit est donc 2^{n-1}. Donc

$$a^{2^n} - 1 = (a-1)(a+1)\,\dot{2}^{n-1};$$

le second membre doit être divisible par 2^m sans l'être par 2^{m+1}. On doit donc avoir :

$$(a-1)(a+1) = \dot{2}^{m-n+1}.$$

L'un des deux facteurs $a-1$, $a+1$, est divisible par 2 sans l'être par 4, l'autre devra donc être égal à 2^{m-n} multiplié par un nombre impair. Par conséquent, il y aura deux manières de satisfaire à l'égalité précédente, soit en posant

$$a - 1 = 2^{m-n}(2b+1),$$

ou bien :

$$a + 1 = 2^{m-n}(2b+1),$$

et alors a devra être de l'une des deux formes suivantes :

I. $\qquad a = 2^{m-n}(2b+1)+1,$

II. $\qquad a = 2^{m-n}(2b+1)-1.$

32. Voyons maintenant combien il y aura d'entiers inférieurs à 2^m et remplissant ces conditions.

Prenons d'abord les nombres de première espèce. On ne peut pas supposer $2b+1 = 2^n+1$, puisqu'on en tirerait $a > 2^m$; mais on peut faire $2b+1 = 2^n - 1$, ou $b = 2^{n-1} - 1$, puisqu'on en tire $a = 2^m - 2^{m-n} + 1 < 2^m$. On pourra donc prendre pour b les valeurs suivantes

$$0,\ 1,\ 2,\ 3\ \ldots\ldots\ 2^{n-1} - 1,$$

au nombre de 2^{n-1}. Donc a est susceptible de 2^{n-1} valeurs de première forme.

On verrait de même que les solutions de seconde forme sont aussi au nombre de 2^{n-1}, d'où l'on peut conclure ce théorème :

Dans le système 2^m, n *étant compris entre* 2 *et* 2^{m-2}, *il y a* 2^n périodes de 2^n *termes.*

33. Jusqu'à présent nous avons supposé $n > 1$. Si $n = 1$, on a à satisfaire à l'égalité

$$a^2 - 1 = 2^m,$$

laquelle est satisfaite par l'entier 1, générateur d'une période d'un terme et par les nombres

$$2^{m-1} - 1,\ 2^{m-1} + 1,\ 2^m - 1,$$

associés doubles par rapport à 2^m, et générateurs de périodes de 2 termes. Il y aura donc 3 périodes de 2 termes.

Indiquons maintenant une vérification des calculs précédents. Comme nous venons de le voir, il y aura :

1	période de	1 terme
$2+1$	—	2
2^2	—	2^2
. . . . .	. . . . .	. . . . .
2^{m-2}	—	2^{m-2}.

Le nombre total des périodes sera donc :

$$1 + (1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{m-2}) = 1 + (2^{m-1} - 1) = 2^{m-1}$$

ainsi qu'on devait s'y attendre.

§ IV.

Des systèmes de périodes dont la base est un nombre composé. — Des résidus dans les progressions géométriques quelconques.

34. Supposons que les lettres A, B, C... L représentent chacune ou un nombre premier ou une puissance d'un nombre premier impair différent, et posons :

$$P = ABC \ldots L ;$$

Soit N un entier premier avec P et générateur d'une période de α termes dans le système A, de β dans le système B, etc., et cherchons quel doit être le nombre des termes de la période dans le système P.

Il s'agit de trouver la plus petite valeur entière propre à satisfaire à l'équation

$$N^x - 1 = \dot{P}.$$

Or on y satisfera évidemment en prenant x à la fois $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$, $\dot{\gamma}$, ... $\dot{\lambda}$. Donc la plus petite valeur que l'on pourra donner à x sera le plus multiple commun de α, β, γ, ... λ, ce que nous exprimons ainsi :

$$x = m(\alpha, \beta, \gamma, \ldots \lambda).$$

35. Cherchons maintenant quel est le plus grand nombre de termes dont une période puisse se composer.

Les nombres

$$\alpha, \quad \beta, \quad \gamma, \ldots \lambda$$

doivent être respectivement des sous-multiples de

$$i(A), \; i(B), \; i(C), \ldots i(L).$$

Donc on aura :

$$m(\alpha, \beta, \gamma, \ldots \lambda) \leqq m[i(A), i(B), i(C), \ldots i(L)];$$

mais $i(\mathrm{A})$, $i(\mathrm{B})$, ... $i(\mathrm{L})$ sont des nombres pairs, par conséquent non premiers entre eux. Leur plus petit multiple commun est donc inférieur à leur produit ou à $i(\mathrm{P})$. Donc on aura :

$$m(\alpha, \beta, \gamma, \ldots \lambda) < i(\mathrm{P}).$$

Ainsi *il n'y a pas de racines primitives dans tout système dont la base est le produit de plusieurs nombres premiers impairs.*

36. Posons

$$k = m\,[\,i(\mathrm{A}), i(\mathrm{B}), i(\mathrm{C}), \ldots i(\mathrm{L})\,],$$

et désignons par L un sous-multiple de K, je dis qu'il y aura dans le système P une période de L termes.

Pour le démontrer, supposons que les nombres

$$\alpha, \beta, \gamma, \ldots \lambda$$

soient respectivement des sous-multiples de

$$i(\mathrm{A}), i(\mathrm{B}), i(\mathrm{C}), \ldots i(\mathrm{L});$$

et d'ailleurs choisis de telle sorte que

$$k = m(\alpha, \beta, \gamma, \ldots \lambda).$$

On trouvera nécessairement un système de nombres

$$a, b, c, \ldots l,$$

générateurs de périodes de

$$\alpha, \beta, \gamma, \ldots \lambda$$

termes, dans les systèmes

$$\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \ldots \mathrm{L}.$$

D'un autre côté, on peut toujours trouver un nombre N moindre que P, et *un seul* satisfaisant aux conditions suivantes :

$$\mathrm{N} = \dot{\mathrm{A}} + a = \dot{\mathrm{B}} + b = \dot{\mathrm{C}} + c \ldots = \dot{\mathrm{L}} + l.$$

Or N, d'après le n° 34, engendre dans le système P une période dont le nombre des termes est $m(\alpha, \beta, \gamma, \ldots \lambda)$ ou k. Donc notre proposition se trouve démontrée.

37. Cherchons maintenant combien il y aura de périodes de k termes.

Il y a $i(\alpha)$ nombres qui, dans le système A, engendrent, comme a, une période de α termes ; $i(\beta)$ nombres qui, dans le système B, engendrent, comme b, une période de β termes, etc. Donc on pourra trouver $i(\alpha)\, i(\beta)\, i(\gamma) \ldots i(\lambda)$ systèmes analogues à

$$a, \quad b, \quad c, \ldots l,$$

et par conséquent pour chaque manière de satisfaire à la relation

$$k = m\,(\alpha, \beta, \gamma, \ldots \lambda)\,;$$

le nombre de périodes de k termes sera

$$i(\alpha)\, i(\beta)\, i(\gamma) \ldots i(\lambda).$$

Donc le nombre total des périodes de k termes sera donné par la formule

$$\Sigma\, i(\alpha)\, i(\beta)\, i(\gamma) \ldots i(\lambda),$$

en prenant successivement pour $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \lambda$ tous les nombres propres à satisfaire aux relations ci-dessus énoncées.

38. Ce que nous venons de dire s'applique, à peu de modifications près, aux systèmes dont la base est

$$2^m\mathrm{A},\ \mathrm{B},\ \mathrm{C},\ \mathrm{D} \ldots \mathrm{L},$$

m étant plus grand que 2. Seulement le maximum du nombre des termes d'une période est

$$k = m\,[2^{m-2},\ i(\mathrm{A}),\ i(\mathrm{B}),\ \ldots i(\mathrm{L})\,],$$

ce qui tient à ce que dans le système 2^m il n'y a pas de périodes de plus de 2^{m-2} termes. Mais si $m = 1$ ou 2, on aura :

$$k = m\,[\,i(\mathrm{A}),\ i(\mathrm{B}),\ i(\mathrm{C}), \ldots i(\mathrm{L})\,].$$

Dans le cas où $m = 1$ et où P n'admet qu'un seul nombre premier impair, on a plus simplement :

$$k = i(\mathrm{A}) = i(2\mathrm{A}) = i(\mathrm{P}),$$

et par conséquent :

Il existe des racines primitives dans tout système dont la base est le double d'un nombre premier, ou le double d'une puissance d'un nombre premier impair (*).

Un pareil système jouirait donc de toutes les propriétés qui tiennent à l'existence des racines primitives.

Dans toutes les autres circonstances on aura évidemment $k < i(\mathrm{P})$, et par conséquent on a ce théorème général :

Il n'existe de racines primitives que dans tout système dont la base est ou une puissance ou le double d'une puissance d'un nombre premier impair.

SUR L'INSCRIPTION

des polygones réguliers de 15 et de 17 côtés.

PAR M. LEBESGUE.

—

Problème. Résoudre l'équation

$$\cos nx - \cos mx = 0, \qquad (a)$$

où n et m sont des entiers positifs dont m est le plus grand.

Solution. On a :

$$\cos nx - \cos mx = 2 \sin \frac{m+n}{2} x \sin \frac{m-n}{2} x ;$$

(*) Il est assez remarquable que le double d'un nombre premier se comporte presque toujours comme un nombre premier. Cette circonstance s'est déjà présentée dans notre article sur les associés doubles.

pour que le deuxième membre soit nul, il faut poser $\frac{m \pm n}{2} x$, égal à un multiple $k\pi$ de la demi-circonférence. De la $x = \frac{2\pi \,.\, k}{m \pm n}$, l'équation (a), qui devient algébrique, et du degré m quand on pose $\cos x = y$, donne donc la division de la circonférence en $m + n$ parties égales, et la division en $m - n$ parties égales.

Soit, pour exemple particulier, l'équation

$$\cos 16x - \cos x = 0. \qquad (b)$$

Ce sera le cas de la division en 17 parties égales et en 15 parties aussi égales.

Les racines de l'équation (b), rangées par ordre de grandeur, seront donc :

$$\cos 0.\ \cos \frac{2\pi}{17},\ \cos \frac{2\pi}{15},\ \cos 2.\frac{2\pi}{17},\ \cos 2.\frac{2\pi}{15},\ \cos 3.\frac{2\pi}{17},$$

$$\cos 3.\frac{2\pi}{15},\ \cos 4.\frac{2\pi}{17},\ \cos 4.\frac{2\pi}{15},\ \cos 5.\frac{2\pi}{17},\ \cos 5.\frac{2\pi}{15},$$

$$\cos 6.\frac{2\pi}{17},\ \cos 6.\frac{2\pi}{15},\ \cos 7.\frac{2\pi}{17},\ \cos 7.\frac{2\pi}{15},\ \cos 8.\frac{2\pi}{17}.$$

Or, la formule

$$2.\cos 2\omega = (2\cos\omega)^2 - 2,$$

d'où

$$2\cos 4\omega = (2\cos 2\omega)^2 - 2 = (2\cos\omega)^4 - 4(2\cos\omega)^2 + 2,$$

donnera, en posant $2\cos x = y$, $2\cos 4x = z$,

$$z = y^4 - 4y^2 + 2, \quad y = z^4 - 4z^2 + 2, \qquad (c)$$

la seconde équation revenant à $2\cos 16x = 2\cos x$.

(Au lieu de ce système (c), on aurait pu obtenir un système de quatre équations, traité par M. Amiot, dans son mémoire sur les polygones réguliers (*Annales*, t. III, p. 272, (A).)

Pour résoudre le système (c), qui conduit à une équation du seizième degré, on fera :

$$y=\frac{p+q}{2},\quad z=\frac{p-q}{2},$$

et les équations (c), combinées par addition et soustraction, donneront :

$$\left.\begin{aligned} 8p &= p^4+6p^2q^2+q^4-16(p^2+q^2)+32 \\ -2q &= pq(p^2+q^2)-8pq\,; \end{aligned}\right\}\ (d)$$

la seconde équation donne d'abord $q=0$, ce qui réduit la première à

$$p^4-16p^2-8p+32=(p-4)\ (p+2)\ (p^2+2p-4)\,;$$

de là, à cause de $p=4\cos x$, le cosinus cherché prendra les quatre valeurs :

$$1,\ -\frac{1}{2},\quad \frac{1}{4}(-1\pm\sqrt{5}),$$

ou

$$\cos 0,\quad \cos\frac{2\pi}{3},\quad \cos 3\,.\frac{2\pi}{15},\quad \cos 6\,.\frac{2\pi}{15};$$

autrement,

$$\cos 0,\quad \cos\frac{2\pi}{3},\qquad \cos\frac{2\pi}{5},\quad \cos 2\,.\frac{2\pi}{5}.$$

La seconde équation (d) donne encore :

$$p^2+q^2=8-\frac{2}{p},\ \text{ou bien}\ q^2=-p^2+8-\frac{2}{p},$$

ce qui réduit la première équation (d) à

$$p^6-8p^4+4p^2+8p^2-1=0,$$

qui se décompose ainsi :

$$(p^2-p-1)\,(p^4+p^3-6p^2-p+1)=0. \qquad (e)$$

Le deuxième facteur étant comparé à

$$\left(p^2+\frac{1}{2}p-1\right)^2=p^4+p^3-\frac{7}{4}p^2-p+1,$$

se met de suite sous la forme :

$$\left(p^2+\frac{1}{2}p-1\right)^2-\frac{17}{4}p^2=\left(p^2+\frac{1}{2}(1-\sqrt{17})p-1\right)$$
$$\left(p^2+\frac{1}{2}(1+\sqrt{17})p-1\right);$$

ainsi l'équation (e) devient :

$$(p^2-p-1)\left(p^2+\frac{1}{2}(1-\sqrt{17})p-1\right)\left(p^2+\frac{1}{2}(1+\sqrt{17})p-1\right)=0. \quad (f)$$

Chaque facteur étant de la forme

$$p^2-2Ap-1=0, \text{ d'où } p=A\pm\sqrt{1+A^2},$$

il en résultera :

$$q=\pm\sqrt{7+2A-2A^2\mp2(A+1)\sqrt{1+A^2}}.$$

Pour le facteur, $p^2-p-1=0$. $A=\frac{1}{2}$, et les quatre valeurs du cosinus sont :

$$\frac{1}{4}\left(1\pm\sqrt{5}\pm\sqrt{30\mp6\sqrt{5}}\right).$$

Les signes supérieurs qui affectent $\sqrt{5}$ devant être pris ensemble, de même que les inférieurs, il n'y a que quatre valeurs qui répondent, comme on le voit facilement, à

$$\cos\frac{2\pi}{15},\ \cos 2.\frac{2\pi}{15},\ \cos 4.\frac{2\pi}{15},\ \cos 7.\frac{2\pi}{15}.$$

Pour le second facteur de l'équation (f), on fera :

$$A=\frac{1}{4}(\sqrt{17}-1),$$

et le cosinus prendra les quatre valeurs :

$$\frac{1}{16}\left(-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}\right)\pm$$

$$\pm\frac{1}{8}\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}-2\sqrt{34+2\sqrt{17}}},$$

$$\frac{1}{16}\left(-1+\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}\right)\pm$$

$$\pm\frac{1}{8}\sqrt{17+3\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}+2\sqrt{34+2\sqrt{17}}}.$$

Pour le troisième facteur, $A=\frac{1}{4}(-\sqrt{17}-1)$, et le cosinus prendra les quatre valeurs :

$$\frac{1}{16}\left(-1-\sqrt{17}+\sqrt{34+2\sqrt{17}}\right)\pm$$

$$\pm\frac{1}{8}\sqrt{17-3\sqrt{17}-\sqrt{34+2\sqrt{17}}-2\sqrt{34-2\sqrt{17}}},$$

$$\frac{1}{16}\left(-1-\sqrt{17}-\sqrt{34+2\sqrt{17}}\right)\pm$$

$$\pm\frac{1}{8}\sqrt{17-3\sqrt{17}+\sqrt{34+2\sqrt{17}}+2\sqrt{34-2\sqrt{17}}}.$$

Il suffit de ranger ces huit valeurs par ordre de grandeur pour avoir :

$$\cos\frac{2\pi}{17},\quad \cos 2\cdot\frac{2\pi}{17},\quad \cos 3\,\frac{2\pi}{17},\quad \cos 4\cdot\frac{2\pi}{17},$$

$$\cos 5\cdot\frac{2\pi}{17},\quad \cos 6\cdot\frac{2\pi}{17},\quad \cos 7\cdot\frac{2\pi}{17},\quad \cos 8\,\frac{2\pi}{17}.$$

Je ferai remarquer, en finissant, que les valeurs a, b, c, d des pages 276 et 277 des *Annales*, t. III, renferment une faute de calcul. Le radical $\sqrt{68+14\sqrt{17}+\ldots}$ doit être remplacé par $\sqrt{68+12\sqrt{17}+\ldots}$; alors, en simplifiant, on retrouve les valeurs données plus haut. Ainsi $\cos\frac{2\pi}{17}$ est égal à

$$\frac{1}{16}\left(-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}\right)+$$

$$+\frac{1}{8}\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}-2\sqrt{34+2\sqrt{17}}},$$

résultat donné par M. Gauss à la page 487 des *Recherches arithmétiques*. Dans la traduction de cet ouvrage, il y a nombre de fautes d'impression non relevées dans l'Errata. Ainsi, dans la formule citée, le radical

$$\frac{1}{8}\sqrt{17+3\sqrt{17}+\ldots}$$

porte le signe —, qui appartient à $\cos 4\,.\,\frac{2\pi}{17}$.

Pour avoir l'équation ayant pour racines

$$\cos 0\,\frac{2\pi}{17},\quad \cos\frac{2\pi}{17},\quad \cos 2\,.\,\frac{2\pi}{17}\;\ldots\ldots\;\cos 8\,.\,\frac{2\pi}{17},$$

il aurait fallu prendre :

$$\cos 8x-\cos 9x=0.$$

En général, pour la division $2m+1$ parties égales, on prendra :

$$\cos mx-\cos(m+1)=0. \qquad (k)$$

Si l'on pose $\cos x=y$, on aura une équation du $m+1$ degré qui se réduira au $m^{ème}$, en la divisant par $y-1$.

L'équation (k) a pour racines les valeurs différentes de $\cos.\frac{2\pi\,.\,i}{2m+1}$.

Comme l'on a :

$$\cos(m+1)x=2\cos x\,.\,\cos mx-\cos(m-1)x,$$

il en résultera :

$$(\cos(m+1)x - \cos mx = 2(\cos x - 1)\cos mx + \\ + \cos mx - \cos(m-1)x;$$

de même :

$$\cos mx - \cos(m-1)x = 2(\cos x - 1)\cos(m-1)x + \\ + \cos(m-1)x - \cos(m-2)x,$$

et ainsi de suite jusqu'à

$$\cos 2x - \cos x = 2(\cos x - 1)\cos x + \cos x - 1,$$

de sorte qu'on aura :

$$\cos(m+1)x - \cos mx = (\cos x - 1)[2\cos mx + \\ + 2\cos(m-1)x + 2\cos(m-2)x + \ldots + 2\cos x + 1].$$

L'équation (k) sera donc :

$$1 + 2\cos x + 2\cos 2x + \ldots + 2\cos(m-1)x + 2\cos mx = 0,$$

ce qui est un théorème connu.

En posant $\cos x = y$, on a une équation du m^e degré résoluble par les méthodes de M. Gauss ; la solution de cette équation a été aussi donnée dans un mémoire d'Abel (Journ. de Crelle, t. IV), dont on ne saurait trop recommander l'étude. Malheureusement l'auteur est mort sans avoir complété les applications de son mémoire. Des recherches analogues avaient été entreprises par E. Gallois. Il a laissé à ce sujet un mémoire qui paraît avoir été peu compris, mais dont M. Liouville a promis un commentaire, attendu par tous ceux qui s'occupent de la résolution algébrique (ou par radicaux) des équations, résolution dont Abel s'est beaucoup occupé. Il avait, dit-il, trouvé une règle pour reconnaître si une équation algébrique était ou non résoluble par radicaux. C'est là un sujet de recherches bien beau, mais probablement bien difficile.

BIBLIOGRAPHIE.

Collection de tableaux polytechniques, aide-mémoire ou Résumés scientifiques destinés aux candidats à toutes les écoles du gouvernement et aux éleves de ces écoles, aux aspirants à tous les grades des facultés des sciences, aux professeurs des sciences exactes, aux officiers des corps spéciaux, aux architectes et aux ingénieurs; par une Société d'anciens élèves de École polytechnique, de professeurs, d'ingénieurs, et d'officiers de l'artillerie, du génie et de la marine (*); sous la direction de M. *Auguste Blum*, ingénieur et professeur, ancien officier d'artillerie, ancien élève de l'École polytechnique (**).

C'est par les yeux et les oreilles, disent avec beaucoup de raison les auteurs de l'ouvrage dont on vient de lire le titre, *que s'acquièrent les perceptions externes; c'est par la mémoire qu'elles se conservent.* En adoptant ce principe incontestable, il faut néanmoins faire une distinction entre les rôles des deux sens · l'enseignement oral, celui qui se communique par l'intermédiaire de l'ouïe, est sans contredit le plus puissant et le plus fécond; c'est le seul qui permette de multiplier à l'infini le développement des notions nouvelles qu'il s'agit d'inculquer à l'esprit, d'en varier les formes, et d'en proportionner en quelque sorte l'intensité suivant la force

(*) Chez Carilian-Gœury et V^ve Dalmont, libraires, quai des Augustins, 39 et 41.

(**) Les mêmes tableaux ont aussi été réunis en volumes formant memento, par un tirage à part sous la forme in-8.

et la capacité de l'intelligence qui doit en devenir le récipient. Ajoutons que c'est encore par l'organe de l'ouïe que s'acquièrent principalement les notions du bien et du mal, et qu'en un mot, l'ouïe est essentiellement, comme l'a définie un écrivain philosophe « le sens de l'homme moral. » La vue, au contraire, a particulièrement pour mission de nous mettre en relation avec l'univers matériel; et ainsi c'est principalement par cet organe que nous étudions la plupart des propriétés des corps, surtout celles qui tiennent plus spécialement à la forme. Par suite, c'est aux yeux surtout que s'adressent les mathématiques, intermédiaires en quelque sorte entre la connaissance des objets physiques et la science des choses immatérielles; et c'est aux yeux en conséquence qu'appartient le soin de rappeler constamment à la mémoire, de fixer en traits ineffaçables dans l'esprit des jeunes mathématiciens, les objets qu'une leçon orale n'a su y esquisser que d'une manière fugitive.

C'est donc une idée éminemment philosophique, que celle de réunir en tableaux synoptiques des résumés clairs et concis où d'un seul coup d'œil les élèves puissent apercevoir toutes les ramifications que comporte chaque branche de la science, et reconnaître ainsi dans leur ensemble, tous les faits qu'ils n'avaient étudiés que partiellement, et dont la liaison se trouvait dissimulée et comme obscurcie par la multitude des détails.

Aussi applaudissons-nous sincèrement à l'entreprise de M. Blum et de ses savants collaborateurs, dont les noms sont autant de garanties, quant au fond de la doctrine, ce qui nous dispense de nous occuper sous ce point de vue des tableaux polytechniques. Nous n'avons à considérer ici que la forme : or, aucune suivant nous, ne saurait être mieux appropriée à l'objet que se proposent les auteurs.

Les tableaux que nous annonçons, pouvant facilement, en raison de leurs dimensions, être appliqués sur les murailles des salles d'étude, fournissent un procédé mnémonique, dont l'action incessante doit avoir la plus grande efficacité; et l'auteur de cet article peut dire qu'il a par lui-même éprouvé la puissance, d'ailleurs bien reconnue, de ce moyen de venir en aide à la mémoire.

Ces tableaux doivent former plusieurs séries; nous avons entre les mains la majeure partie de ceux qui composeront la série A : ils comprennent l'arithmétique, la géométrie élémentaire, la trigonométrie, l'algèbre élémentaire, par M. Blum : la théorie générale des équations par M. Ossian Bonnet; la géométrie descriptive par M. Bertaux-Levillain; la statique, par M. Hervé-Mangon; la géométrie analytique à deux dimensions, et la physique par M. Cabart; la chimie, par M. Dézé; l'analyse infinitésimale, par M. Serret; des questions choisies de mathématiques élémentaires, par M. Guillemin; des questions choisies de mathématiques spéciales, par M. Roguet.

Les auteurs se proposent de publier ultérieurement sur le même plan, des résumés synoptiques, de minéralogie, de géologie, d'astronomie, de cosmographie, de géodésie, de mécanique, ainsi que des diverses sciences d'application, architecture, génie, artillerie, fortifications, routes, hydrographie, navigation, etc. Nous ne pouvons mieux faire que de les encourager à persister dans l'exécution de cette utile entreprise; et, forts du désir que nous avons de les y voir réussir de plus en plus, nous nous permettrons de leur adresser un conseil, celui de viser surtout à la concision; le succès est à ce prix. On croit quelquefois s'apercevoir que les auteurs n'ont pas eu le temps d'être brefs. Beaucoup de développements très-bien placés dans le tirage in-8° sont de trop dans les tableaux synoptiques où ils seraient avec avantage remplacés par un caractère typographique plus fort au moins pour la partie essentielle de la rédaction. Nous engagerons aussi M. Blum et ses estimables collaborateurs à donner le plus grand soin à la disposition des formules, la précision et l'exactitude des énoncés ; ils auront sans doute bientôt l'occasion de mettre à profit nos critiques, dans une prochaine édition que nous croyons pouvoir leur promettre.

A. J. H. V.

Nota. Platon recommandait déjà l'usage des tableaux synoptiques pour les mathématiques. Dans un passage du 7me livre de sa république, cité par Théon de Smyrne, on lit : « Post annum XXV, qui ad spem sortiendi magistratos seliguntur, et honores quam cæteri ampliores adepturi sunt, eis mathematicæ disciplinæ, quæ omnibus dum in puerili ætate constituti sunt diffuse exponuntur, quasi in brevi tabula (συνακτέον εἰς σύνοψιν) contrahendæ, ut et illarum inter se affinitas et natura illius quod vere existit inspicienda uno intuitu pateat (ch. 1). — Nous nous servons de la traduction qu'a donnée Boulliaud (Ismaël) d'un ouvrage où Théon a pour but de montrer qu'on ne peut comprendre Platon, sans connaître les mathématiques. En effet s'agit-il seulement de faire de la poésie et de l'enthousiasme sur Platon, alors il est très-vrai qu'on peut se passer de géométrie. Mais s'agit-il d'en pénétrer le sens, c'est différent. Nous recommandons ces réflexions à nos jeunes professeurs de philosophie qui semblent vouloir rester étrangers aux travaux géométriques et physiques du siècle.

Une philosophie qui divorce avec les sciences positives, dégénère en une loquace et prétentieuse ignorance de la plus stérile, de la plus sotte espèce. Dénuée de points d'appui, vide de pensées spontanées, elle est incessamment forcée de se rejeter sur le passé, de chercher à *repenser* ce que les autres ont pensé et ce que ces autres ne penseraient plus, s'ils revenaient parmi nous. N'oublions jamais cette exhortation de l'immortel Kant : *Habe Muth, dich deines eigenen Verstandes zu bedienen*; aie le courage de te servir de ta propre intelligence. Tm.

MÉMOIRE SUR LES TABLES GRAPHIQUES et sur la géométrie anamorphique, appliquées à diverses questions qui se rattachent à l'art de l'ingénieur, par *Léon Lalanne*, ingénieur des ponts et chaussées (extrait des *Annales des ponts et chaussées*). Paris, 1844; in-8° de 72 pag., 3 pl.

Quel est le principe dominant dans la science mathématique? Écoutons là-dessus Bhascara, célèbre algébriste indien, qui vivait au XII[e] siècle, à une époque où en Europe on ne connaissait pas encore l'arithmétique chiffrée. Il ne faut pas croire, dit-il, que ce soient les *signes*, les *symboles*, les *règles* qui constituent la science; mais le seul principe qui y domine, c'est l'esprit de sagacité auquel les objets nommés, inventés par les maîtres, servent d'auxiliaires (Vija-ganita, ch. VII). Pour être si ancienne, pour venir de si loin, cette observation n'en est pas moins d'un grand sens et fort judicieuse. Je me la suis rappelée souvent, en lisant l'écrit de M. Lalanne, où brille éminemment cette sagacité qui consiste à employer des moyens connus pour produire des effets nouveaux, à simplifier tellement ces moyens qu'ils deviennent populaires, à la portée de tous les esprits, et même de ceux qui sont étrangers à la science.

Les méthodes de transformation ou de déformation sont employées depuis longtemps pour étudier les propriétés géométriques et analytiques des fonctions. Nous en avons récemment exposé la théorie (p. 497). Depuis longtemps aussi on se sert des *courbes de niveau* pour représenter sur un plan des surfaces de toutes formes ; M. Lalanne qui a appliqué à ces courbes le principe *métamorphique*, a rendu extrêmement facile leur construction et leur emploi aux divers besoins des services publics, et même leur application à quelques lois naturelles.

Le mémoire est divisé en quatre parties ou chapitres.

Les deux premiers traitent des *tableaux graphiques*, et les deux derniers sont consacrés aux tableaux *anamorphiques* et à l'historique des travaux du même genre. Essayons d'en donner une idée juste.

On sait que les fonctions à deux variables peuvent se représenter *arithmétiquement* par une table *à une entrée*, et *géométriquement* par une courbe plane. On en a un exemplo familier dans la réduction des mesures. Une table à une entrée donne les kilogrammes exprimés en livres ; cette même table peut être figurée par une droite rapportée à deux axes, passant par l'origine et dont le coefficient angulaire est égal au rapport par quotient des deux mesures ; les abscisses étant des kilogrammes, les données sont des livres ou *vice versâ*. On comprend qu'au moyen d'une telle droite, et à l'aide de l'échelle correspondante, on opère de suite toutes les conversions d'une mesure dans l'autre, avec une exactitude dépendant de celle des constructions. Un système de mesures sera représenté par un système de droites ; on aura ainsi un tableau *graphique* figurant le rapport de deux systèmes de mesures. Si on enveloppe le tableau autour d'un cylindre, les droites deviennent des hélices, qui peuvent servir aux mêmes usages que les droites ; on obtient ainsi un tableau *anamorphique* moins simple, il est vrai, que le tableau primitif, mais qui suffit ici pour faire pressentir l'esprit de la méthode.

Venons aux fonctions à trois variables, représentées par $f(x, y, z)=0$; concevons les axes rectangulaires et le plan xy horizontal ; donnons à z une suite de valeurs suffisamment rapprochées z_1, z_2, z_3, etc., menons à ces distances des plans horizontaux, qui couperont la surface suivant des *lignes de niveau*, et dont les projections horizontales sont données pas les équations $f(x, y, z_1)=0$, $f(x, y, z_2)=0$, etc., l'ensemble de tous ces tracés sur le plan horizontal forme le tableau *graphique* de la surface et peut servir à en faire connaître la forme. Désignons les courbes de niveau projetées par A_1, A_2 ; etc., si on veut connaître une section faite dans la surface par un plan parallèle à xz et à une distance y, il suffit de mener dans le plan des xy et à cette distance une droite parallèle à l'axe des x, qui rencontrera les courbes A_1, A_2..., etc., en des points dont on connaît les hauteurs verticales z_1, z_2, etc.; on peut donc construire la courbe par points; il en est de même pour une section parallèle au plan des yz. Il est inutile d'avertir qu'il faut toujours prendre pour courbes de niveau les sections les plus simples.

Au moyen de ces tableaux graphiques, donnant des valeurs numériques à x et y, on pourra trouver les valeurs numériques des z correspondantes ; en effet, portant les valeurs de x et y sur les axes correspondants, et construisant le rectangle, si le sommet opposé à l'origine tombe sur une courbe de niveau, on a de suite le z correspondant ; s'il tombe entre deux courbes de niveau, la valeur de z sera comprise entre celles qui sont indiquées par ces courbes de niveau, et la valeur de z sera donnée avec une exactitude dépendant de la distance des courbes ; et si le point tombe entre plusieurs courbes consécutives, z aura plusieurs valeurs. Prenons pour exemple la fonction $z-xy=0$ qui représente un hyperboloïde à une nappe : ici les courbes de niveau sont des hyperboles équilatères, homothètes ; donnons à z, les valeurs

5, 10, 15, 20, 30, 40, etc., et écrivons ces nombres sur les hyperboles correspondantes. On voit bien comment ce tableau graphique (*fig.* 1) du mémoire peut servir à faire *à vue* les multiplications de deux nombres et remplacer la table à *double entrée*, dite table de Pythagore; prenons pour autre exemple la surface du troisième degré $z^3+yz+x=0$; les lignes de niveau en y x sont des droites dont le système donne un tableau qui sert à trouver les racines z de toute équation du troisième degré de cette forme, lorsqu'on donne les valeurs numériques de y, x; l'enveloppe de ces droites est une parabole cubique ayant pour équation $4y^3+27x^2=0$, et l'aspect du tableau montre à vue que, pour les points où l'on a $4y^3+27x^2>0$, il n'y a qu'une racine réelle; si le point est sur l'enveloppe, alors $4y^3+27x^2=0$, il y a trois racines réelles dont deux égales, et si $4y^3+27x^2<0$, il y a trois racines réelles inégales.

Au moyen de ce tableau, l'auteur résout à vue l'équation $x^3-0{,}8x+0{,}2=0$ et trouve pour racines -1; $0,72$; $0,275$.

L'auteur donne encore d'autres applications relatives à des problèmes de déblais et de remblais, et à des problèmes de géographie physique.

Méthode anamorphique; soit pour exemple l'hyperboloïde à une nappe donné par l'équation $z=xy$, nous avons vu que les courbes de niveau étaient des hyperboles équilatères; nous avons $\log z=\log x+\log y$; faisons $\log x=x'$; $\log y=y'$; il vient $\log z=x'+y'$, dans cette nouvelle surface les courbes de niveau sont des droites; les longueurs portées sur les axes représentent les logarithmes des nombres, et non comme dans les tableaux graphiques les nombres mêmes; c'est d'après ce principe que l'auteur a construit un *abaque* ou compteur universel, instrument très-simple et aujourd'hui très-répandu parmi tous ceux qui s'occupent de constructions et d'opérations industrielles exigeant des calculs prompts et suffisamment exacts. L'auteur a ajouté d'autres lignes qui donnent de suite les carrés et les cubes, et par conséquent aussi les racines carrées et cubiques, les puissances $\frac{2}{3}$ et $\frac{3}{2}$ dont on a si souvent besoin; on y trouve aussi à vue les longueurs des circonférences, les aires des cercles, les aires et les volumes des sphères, le tout en fonction du rayon; ainsi, outre les avantages de pouvoir remplacer la *sliding rule*, règle glissante des Anglais, on y trouve encore toutes les indications qu'on rencontrait jadis sur le *compas de proportion*. L'usage de l'abaque s'acquiert facilement, et, ce qui n'est pas moins important, il s'oublie difficilement; mais il faut un coup d'œil exercé pour fixer la rencontre des lignes verticales et horizontales et lire la cote de la ligne inclinée; il semble que la règle glissante présente ici un avantage.

L'anamorphose des hyperboles en droites s'est opérée dans le cas actuel en remplaçant les coordonnés par leurs logarithmes. Pour d'autres surfaces, on comprend qu'on peut choisir d'autres fonctions, des puissances, des sinus, et c'est là le principe général de la méthode et dont il faut lire les fécondes applications dans le mémoire même.

L'auteur applique aussi l'anamorphose à la représentation graphique de certaines lois naturelles (p. 53). Par exemple, on y trouve un tableau par le moyen duquel, ayant une table numérique qui renferme le chiffre de la population mâle, correspondant à chaque âge, on peut en déduire un nombre d'individus compris entre deux âges déterminés a et a'; c'est la figure n° 3 construite avec les nombres fournis par feu M. Demonferrant. Ainsi le tableau apprend qu'en 1833, il y avait en France environ 8,800,000 hommes de dix-huit à soixante ans ; le calcul exact donne 8,792,569.

Le mémoire est terminé par un résumé général des travaux antérieurs sur le même sujet. On connaît les lignes magnétiques de Halley ; je crois aussi avoir vu des lignes *thermométriques* dans un ouvrage de Musschenbroek ; Buache (Philippe) est le premier qui ait imaginé d'appliquer les lignes de niveau à la représentation des terrains. En 1737, il a présenté une carte du Pas-de-Calais, dressée d'après ce principe (*voir* Mém. de l'Acad., 1752, p. 412) ; ainsi, Buache est incontestablement l'inventeur ; mais le promoteur, celui qui a fait entrer la méthode dans la pratique, c'est Ducarla-Bonifas (Marcelin), né en 1738, à Vabres (Tarn), et mort en 1816, à Villeneuve-du-Tarn. Ainsi, Ducarla n'est pas de Genève, comme on le dit dans diverses notices. L'ouvrage où Ducarla expose sa méthode est intitulée : *Expression des nivellements* ; Paris, 1782, in-8. Il a été édité par Dupain-Triel, le même qui a publié, en 1759, une *Lettre à M. le comte ... dans laquelle on examine l'insuffisance de la méthode actuelle d'enseigner les mathématiques.* Cette lettre serait encore très-opportune de nos jours. Un autre opuscule remarquable, du même auteur, est : *De l'établissement des colléges municipaux pour les sciences, les arts et les métiers, en faveur de la jeunesse* ; Paris, 1771, in-8, et reproduit sous ce titre : *Essai d'une institution nouvelle, ayant pour objet le développement libre des dispositions de la jeunesse adolescente dans les différents genres de talents ;* 1802, in-8. La ville de Paris a réalisé cette idée en 1845, par l'établissement de l'Ecole municipale François I^er^ ; la création récente de gradués (licenciés et docteurs) en sciences mécaniques montre que l'Université aspire à rendre l'instruction utile au grand nombre. Pour compléter l'œuvre, il faudrait aussi un baccalauréat spécial, une espèce de maîtrise ès arts pour les professions industrielles. La littérature et l'histoire nationales, des connaissances générales sur la cosmographie, géographie, les sciences physiques et naturelles, devraient suffire pour l'obtention de ce grade, réservant les langues classiques pour des professions spéciales telles que la médecine, le droit, etc.; car, il ne faut jamais perdre de vue que l'instruction publique a pour but, non de former des littérateurs, des savants, des professeurs, des académiciens, etc., mais de rendre la masse des citoyens capable d'exercer les fonctions qu'ils sont appelés à remplir.

Tm.

LETTRE DE M. LE CAPITAINE GUY,

relative à son Traité d'arithmétique.

—

Je vous serai très-obligé de me permettre d'annoncer aux nombreux lecteurs de vos savantes Annales, que je publierai prochainement une *Méthode* propre à apprendre l'arithmétique raisonnée en fort peu de temps, et en la poussant jusqu'à ses dernières profondeurs : c'est le sujet du dépôt cacheté que j'ai fait à l'Académie des sciences, dans la séance du 16 novembre 1846.

Je saisis cette occasion pour faire deux remarques sur la note, à moi relative, qui se lit dans la livraison d'octobre 1846, à la page 602.

1° Je regarde la question scientifique en litige comme complétement close. Vos lecteurs, qui ont les pièces en main, jugeront, ou plutôt ont déjà jugé, s'il y a eu sagesse à soulever, contre quelqu'un d'inoffensif, une polémique qui ne présentait aucune chance de succès.

2° Le dernier paragraphe de cette même note d'octobre, dont vos lecteurs ont dû apprécier la convenance, est d'une autre nature : il y perce une intention blessante qui me donne le droit de rappeler à son auteur cet adage ancien qu'il paraît avoir oublié :

« Un peu de modestie ne sied pas mal à la science. »

Note. Genus irritabile vatum, a dit un poëte parlant de ses confrères. Remplaçant *vatum* par *auctorum*, la définition, ainsi généralisée, y comprenant même les géomètres, ne perdrait rien de sa justesse. Que d'humeur pour une *division abrégée !* Nou ne croyons pas que le savant professeur de Strasbourg ait manqué de modestie en préférant sa méthode à celle du capitaine ; pas plus que celui-ci, pour être d'opinion opposée, puisse être taxé d'orgueil. Le public ne fait attention qu'à la science ; le reste lui est indifférent ; nous profitons de cette occasion pour réparer une erreur ; par une faute de ponctuation, on peut croire que nous regardons l'exposition de M. Guy comme trop *diffuse* (*voir* p. 470). Cette épithète ne doit s'appliquer qu'à une méthode analytique qui m'appartient et qui ne me satisfait pas ; toutefois l'ouvrage de M. Guy aurait peut-être gagné en clarté s'il était moins long, et à cela on peut répondre avec Regnard : *La critique est aisée et l'art est difficile*. Cette discussion est définitivement close. On n'y reviendra plus.

On accueillera avec intérêt l'arithmétique *poussée jusqu'à ses dernières profondeurs*, ce qui veut dire sans doute, la théorie des nombres, dont l'enseignement existe en Allemagne et forme lacune en France ; pays ou l'on ne marche qu'à la remorque. Tm.

COMPOSITIONS ÉCRITES

des sept séries, dans lesquelles on a partagé les candidats à l'École Polytechnique, à Paris, en 1846.

—

(1)

a^x et log (x) sont des fonctions continues de x.

(2)

Lieu des points d'où menant des tangentes à trois circonférences, les trois cordes de contact se rencontrent en un même point (*voir* p. 521).

(3)

$$\rho = \frac{\cos\theta - \sin\theta}{(\sin\theta + \cos\theta)^3}.$$

(4)

Lieu des points de division en moyenne et extrême raison, des cordes d'une ellipse issues d'un même point.

(5)

Une ellipse et une parabole ont même foyer et même axe. De ce foyer on mène des rayons vecteurs FM, FP aux extrémités d'un diamètre MP d'une ellipse, et coupant la parabole aux points M', P', démontrer que la somme des rapports des rayons vecteurs des deux courbes, est constante.

$$\frac{\mathrm{FM}}{\mathrm{FM}'} + \frac{\mathrm{FP}}{\mathrm{FP}'} = \text{constante}.$$

(6)

A, B, C étant les trois angles d'un triangle rectiligne opposés respectivement aux côtés a, b, c; de l'égalité

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

déduire la formule $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$.

(7)

Lieu des milieux des cordes égales inscrites dans une même ellipse (*voir* t. IV, p. 592).

(8)

Partager par une corde la surface d'un cercle en deux parties qui soient entre elles dans le rapport de m à n.

(9)

$$a \sin x + b \cos x = c.$$

(10)

Recherche des centres de gravité ; appliquer cette théorie à la détermination du centre de gravité d'une pyramide polygonale.

(11)

D'un point fixe D d'un diamètre FDE d'un cercle on mène une sécante quelconque BDA au cercle ; en A et en B on lui mène les tangentes AC, BC, et on joint les points D et C ; démontrer que tang ADE $\times$ tang EDC $=$ constante.

(12)

Une ellipse et une hyperbole ont un axe commun, on mène une suite de sécantes communes et parallèles ; trouver le lieu des milieux des segments compris entre l'ellipse et l'hyperbole.

(13)

Théorie des exposants de nature quelconque.

(14)

Par le point o pris sur le diamètre CoEX d'un cercle dont le centre est en C, on mène deux sécantes oa, ob liées par la relation tang aoEX tang boEX $=$ constante $= m$; puis par le point X pris sur le diamètre CoEX, et déterminé par la condition $Co.CX = \overline{CE}^2$, on mène une perpendiculaire au diamètre jusqu'à la rencontre en A et B des sécantes oa, ob : on demande si l'on ne pourrait pas disposer de la constante de telle sorte que la somme $\frac{\overline{oa}^2}{\overline{oA}^2} + \frac{\overline{ob}^2}{\overline{oB}^2} =$ constante.

Note. Ces problèmes seront résolus en 1847 ainsi que ceux du même genre énoncés dans les volumes précédents et qui sont restés sans solutions. MM. Cabussi, élève de l'institution Barbet, et Serret, élève très-studieux, fort distingué d'Avignon, et d'autres encore nous ont transmis des solutions qui seront insérées prochainement. Nous saisissons cette occasion pour remercier les élèves de leur utile et instructive collaboration. Le feu sacré de la science brûle pur dans les cœurs jeunes. Nos solutions s'adresseront toujours aux élèves ayant quelque intelligence, quelque spontanéité ; car, un moyen certain de rendre les disciples stupides est de les supposer tels, et de vouloir leur épargner tout besoin de méditation.

TABLE ALPHABÉTIQUE

DES AUTEURS (*).

(*) Nous devons ces excellentes tables à l'extrême obligeance de M. le professeur Léon Anne.

TABLE

PAR ORDRE DE MATIÈRES.

I. Arithmétique.

II. Algèbre élémentaire.

III. Algèbre supérieure.

IV. Géométrie élémentaire.

V. Trigonométrie rectiligne et trigonométrie sphérique.

VI. Géométrie analytique à deux dimensions.

VII. Géométrie analytique à trois dimensions.

QUESTIONS D'EXAMEN.

I. Géométrie élémentaire.

Soient dans un même plan deux cercles qui ne se coupent point; o. o' leurs centres, AB et A'B' leurs diamètres, qui tombent tous deux sur la droite qui passe par les deux centres :

1° On demande de prouver qu'il existe sur cette droite deux points C et D tels que le produit de leurs distances au centre de chaque cercle est égal au carré du rayon de ce cercle ; c'est-à-dire tels que

$$oC + oD = \overline{oA}^2 \text{ et } o'C + o'D = \overline{o'A'}^2,$$

SOLUTIONS DES QUESTIONS PROPOSÉES.

I. Algèbre élémentaire.

II. Géométrie élémentaire.

III. Géométrie analytique à deux dimensions.

IX. Théorèmes et problèmes à résoudre.

VIII. Annonces.

QUESTIONS NON RÉSOLUES

dans les cinq premiers volumes.

—

TOME I.

N°	Page
9	146
11	148
2 (bis)	122
3	*ib.*
4	*ib.*
6	*ib.*
25	247
28	*ib.*
31	391
34	395
35	*ib.*
36	*ib.*
45	519
46	*ib.*
47	*ib.*
48	520
51	*ib.*
52	*ib.*
56	521
57	*ib.*

TOME II.

60	48
61	*ib.*
62	96
63	137
65	326
66	*ib.*
67	327
69	*ib.*
70	*ib.*
78	454
79	*ib.*

TOME III.

N°	Page
81	40
83	194
84	256
87	376
88	*ib.*
89	*ib.*

TOME IV.

93	259
95	260
97	*ib.*
99	370
103	560

TOME V.

108	112
109	*ib.*
110	*ib.*
116	167
117	*ib.*
120	202
121	*ib.*
124	376
125	*ib.*
126	448
127	*ib.*
130	512
132	556
135	672
139	*ib.*

Observations. Sur 139 questions, il y en a 63 de résolues, près et moins de la moitié. Nous recommandons aux analystes la question 69, t. II, p. 327.

ERRATA.

—

TOME I. (*Quatrième supplément.*)

Page 420, ligne 8, en descendant, ellipe, *lisez :* ellipse.

TOME II. (*Troisième supplément.*)

Page 319, ligne 1, en descendant, 36 (t. I, p. 395), *lisez :* 58 (t. II, p. 48).

TOME III. (*Deuxième supplément.*)

Page 549, ligne 10, en descendant, (x', y', z'), *lisez :* (x', y').
Page 602, ligne 8, en descendant, parfait, *lisez :* parfaits.

TOME IV. (*Premier supplément.*)

Page 382, ligne 4, en descendant, a_0x_2, *lisez :* a_0x^3.
Page 425, ligne 4, en remontant, FK, *lisez :* EK.
Page 425, ligne 14, en remontant, $x(l+bk)$, *lisez :* $x(l+ak)$.
Page 425, ligne 3, en remontant, F, *lisez :* E.
Page 526, ligne 5, en descendant, LXI, *lisez :* LXVI.
Page 560, ligne 11, en remontant, après polyèdre, *lisez :* semblable au polyèdre.
Page 570, ligne 8, en remontant, $b > q$, *lisez :* $b < q$.
Page 570, ligne 10, en remontant, $b < q$, *lisez :* $b > q$.
Page 570, ligne 12, en remontant, $b^2 < a$, *lisez :* $b^2 < 2a$.
Page 573, ligne 3, en descendant, 596, *lisez :* 569.

TOME V.

Page 32, ligne 7, en remontant, *mettez après la parenthèse :* $=0$.
Page 83, ligne 6, en descendant, ξ, *lisez :* $(\alpha - \xi)$.
Page 122, ligne 6, en remontant, 83, *lisez :* 194.
Page 136, ligne 2, en remontant, insection, *lisez :* intersection.
Page 136, ligne 6, en remontant, Mention, *lisez :* Binder (Jules).
Page 152, ligne 5, en remontant, $\sin m\theta \sin (m-1)\theta$, *lisez :* $\sin m\theta\, (m-1)\varphi$.
Page 153, ligne 4, en descendant, $\frac{1}{2}$, *lisez :* $\frac{1}{3}$.

Page 164, ligne 12, en descendant, $\dfrac{x^n}{x_n - a_n}$, *ajoutez* : $= 1$.

Page 166, ligne 12, en remontant, III, *lisez* : III *bis*.

Page 168, ligne 5, en remontant, Blue, *lisez* : Blum.

Page 195, ligne 10, en remontant, *mc*, *lisez* : *m*C.

Page 195, ligne 10, en remontant, G*c*, *lisez* : GC.

Page 196, ligne 6, en descendant, O, *lisez* : o.

Page 202, ligne 6, en descendant, eu, *lisez* : lieu

Page 223, ligne 7, en remontant, $(2\cos a)^{n-3}$, *lisez* : $(2\cos a)^{n-8}$.

Page 226, ligne 5, en remontant, Berton, *lisez* : Breton.

Page 243, ligne 5, en descendant, *m*, *lisez* : $m + 1$.

Page 262, dernière ligne, Guys, *lisez* : Guy.

Page 269, ligne 14, en remontant, ils diffèrent, *lisez* : elle différente.

Page 275, ligne 13, en remontant, l'un, *lisez* : l'une.

Page 296, ligne 9, en descendant, communiqué, *lisez* : communiquée.

Page 299, ligne 5, en remontant, la, *lisez* : le.

Page 299, ligne 4, en remontant, sa pareille, *lisez* : cette négation.

Page 307, ligne 10, en remontant, et plus, *lisez* : plus un.

Page 339, ligne 7, en remontant, dans, *effacez*.

Page 364, ligne 4, en descendant, des, *lisez* : les.

Page 377, ligne 2, en descendant, G, *lisez* : E.

Page 378, ligne 13, en remontant, théorèmes, *ajoutez* : (liv. I).

Page 462, ligne 8, en remontant, non les cas... d'approximation, *à supprimer*.

Page 466, ligne 8, en descendant, sont par conséquent aussi, *lisez* : contiennent par conséquent plus de chiffres qu'il ne serait nécessaire.

Page 487, ligne 5, en descendant, compétant, *lisez* : compétent.

Page 498, ligne 3, en remontant, homographique, *lisez* : perspective.

Page 522, ligne 6, en remontant, $2(\alpha - a)$, *lisez* : $(\alpha - a')$.

Page 523, ligne 13, en descendant, $(y - B)$, *lisez* : $(y - B)^2$.

Page 553, ligne 16, en descendant, $(a'_1 a'_2 a''_3)$, *lisez* : $a'_1 a''_2 a'''_3)$,

Page 555, ligne 14, en remontant, y'', *lisez* : y'''.

PARIS. — IMPRIMERIE DE FAIN ET THUNOT
Rue Racine, 28, près de l'Odéon.

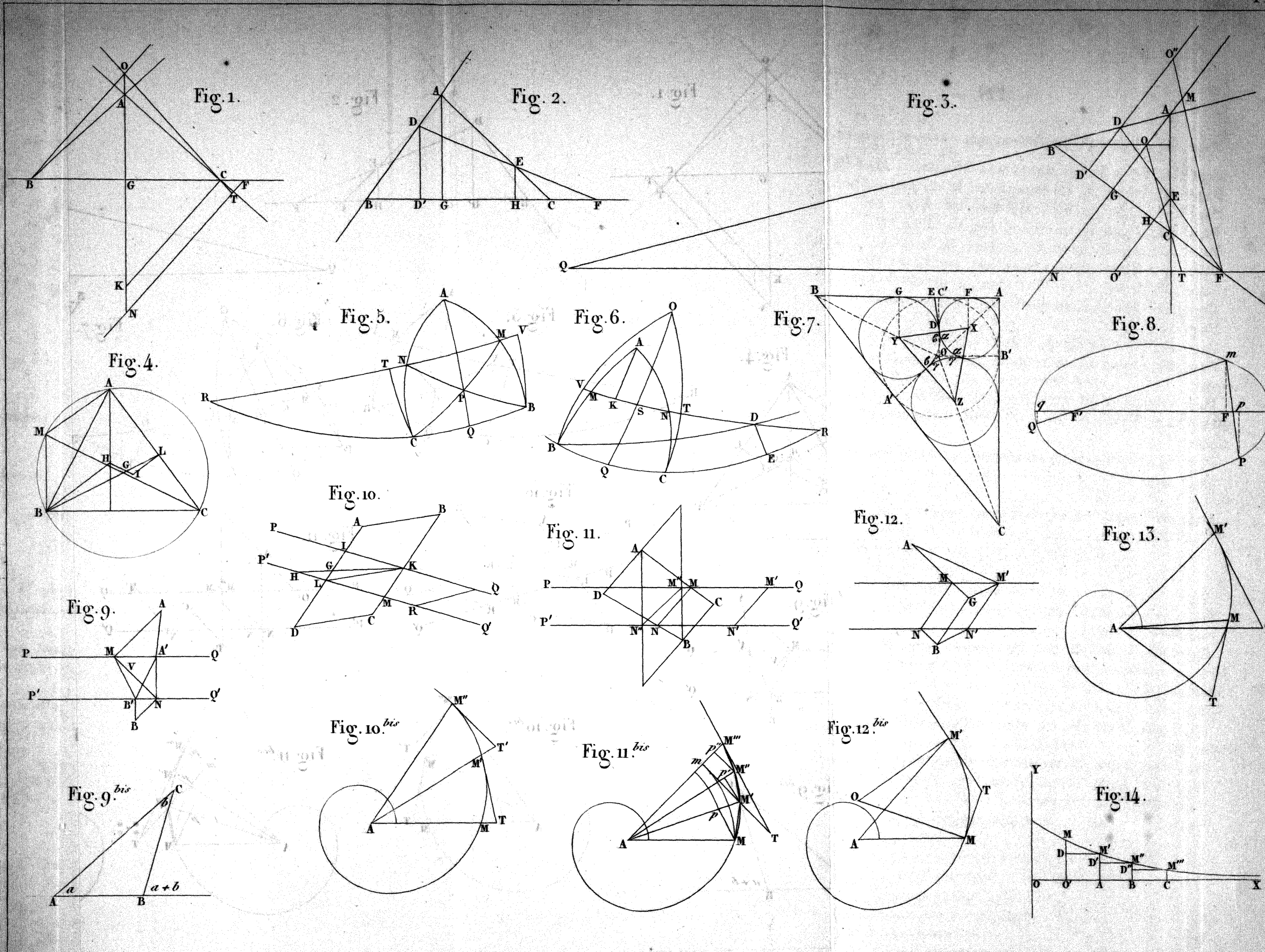


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 9. bis
Fig. 10. bis
Fig. 11. bis
Fig. 12. bis
Fig. 14.

Lemaitre sc.

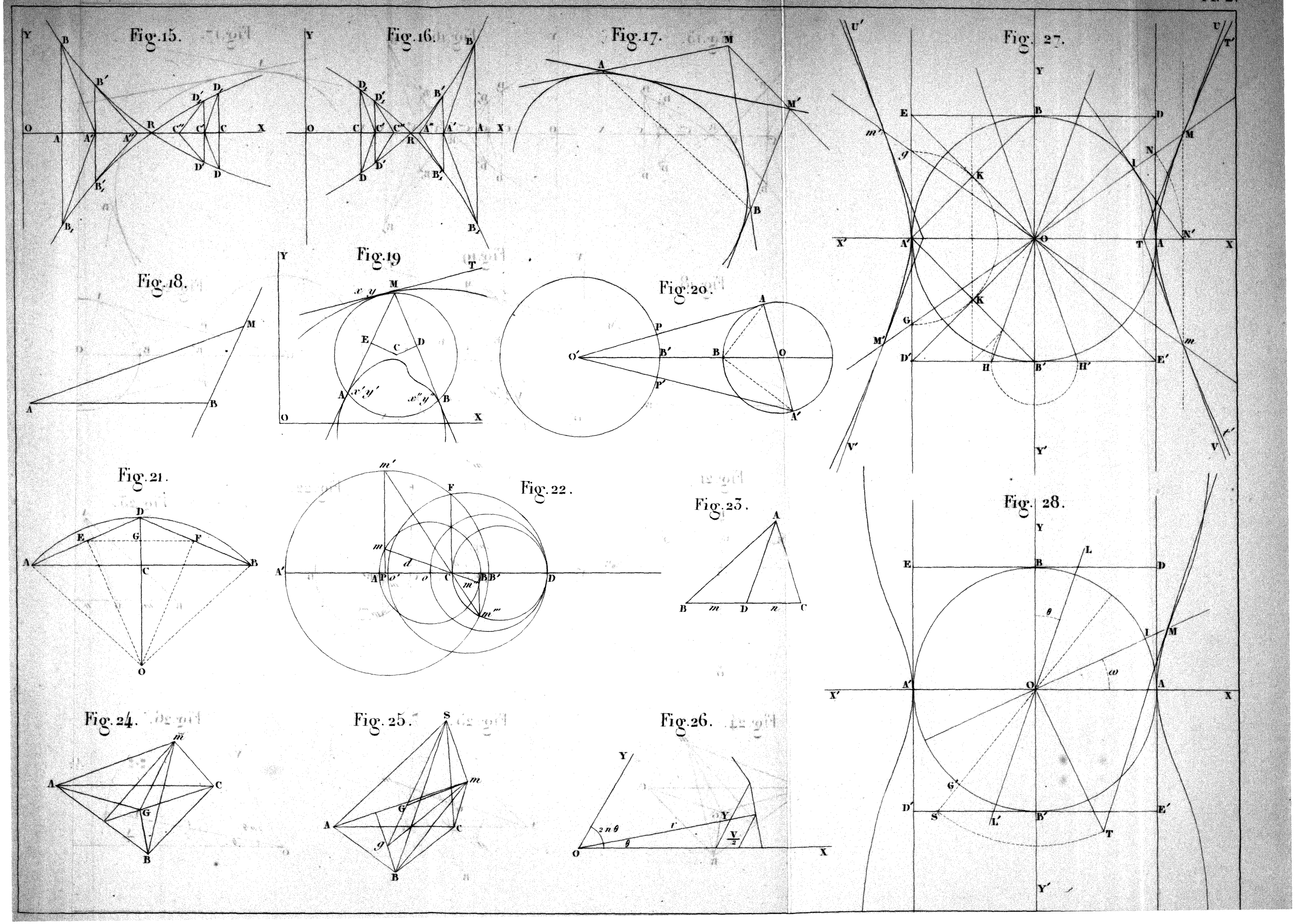


Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 17.
Fig. 18.
Fig. 19
Fig. 20.
Fig. 21.
Fig. 22.
Fig. 23.
Fig. 24.
Fig. 25.
Fig. 26.
Fig. 27.
Fig. 28.

Fig. 1.

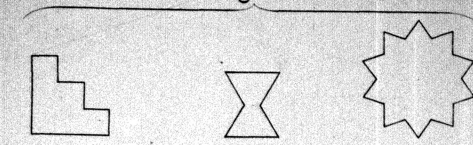


Fig. 2.

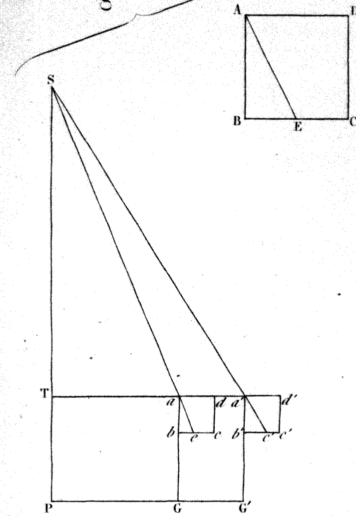
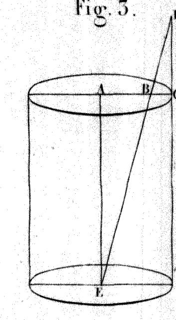
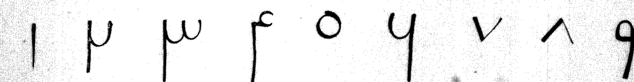


Fig. 3.



Chiffres Hindous.



Lemaitre sc.

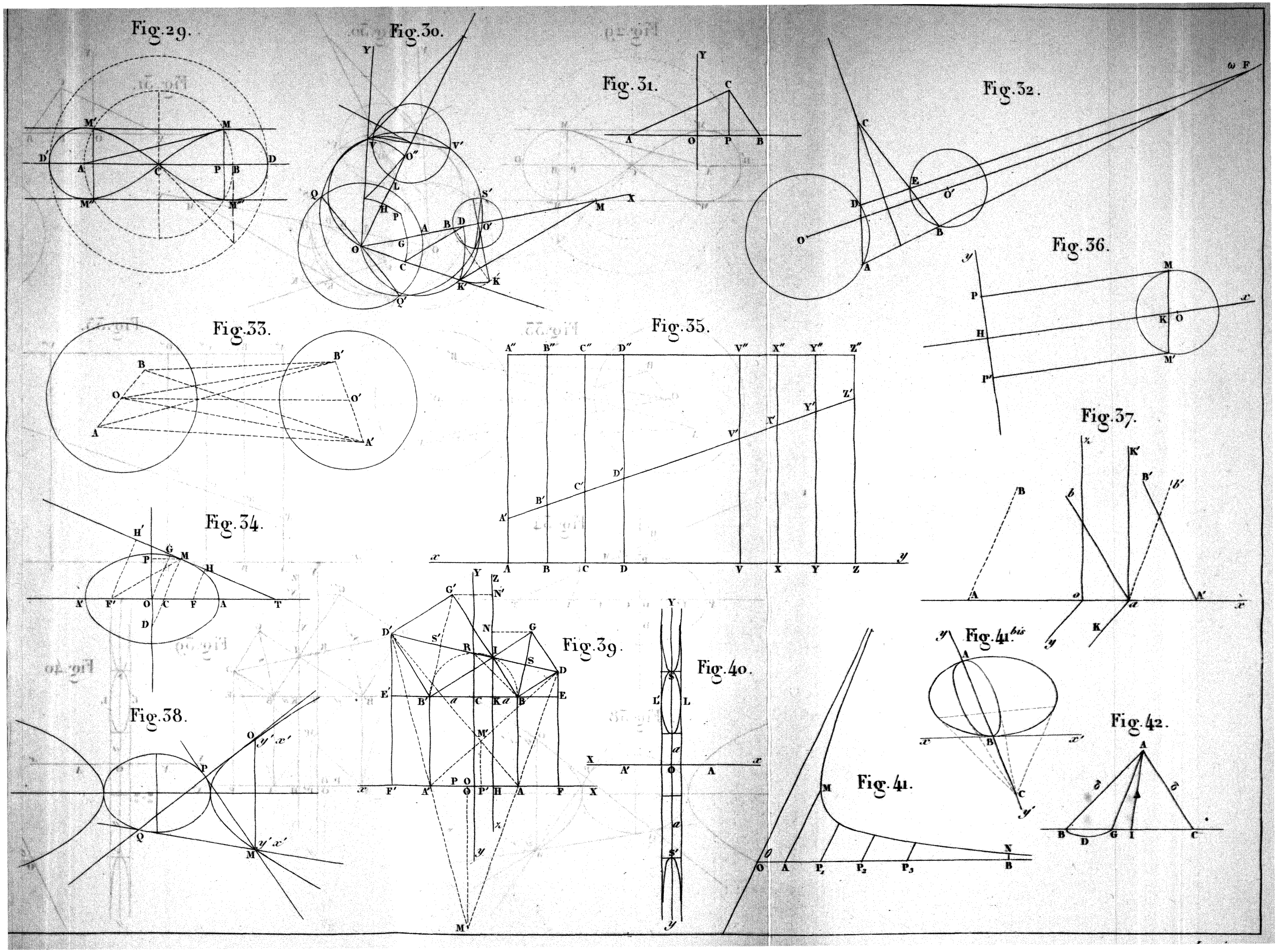


Fig. 29.
Fig. 30.
Fig. 31.
Fig. 32.
Fig. 33.
Fig. 34.
Fig. 35.
Fig. 36.
Fig. 37.
Fig. 38.
Fig. 39.
Fig. 40.
Fig. 41.
Fig. 41 bis.
Fig. 42.

Fig. 43.

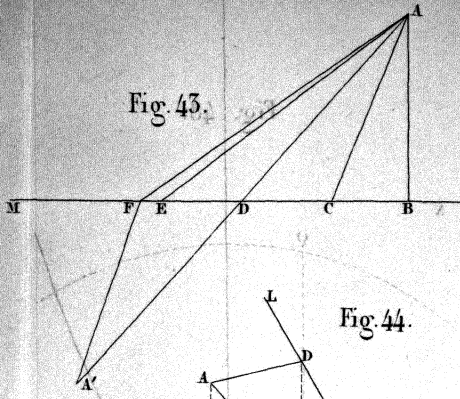


Fig. 44.

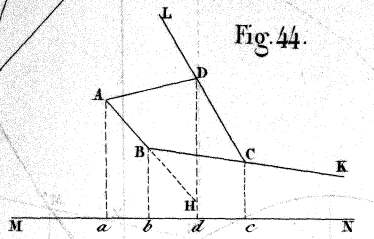


Fig. 45.

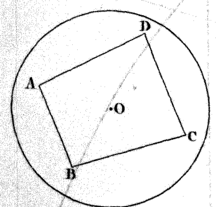


Fig. 46.

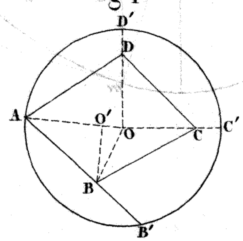


Fig. 47.

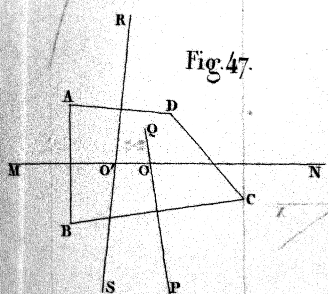


Fig. 48.

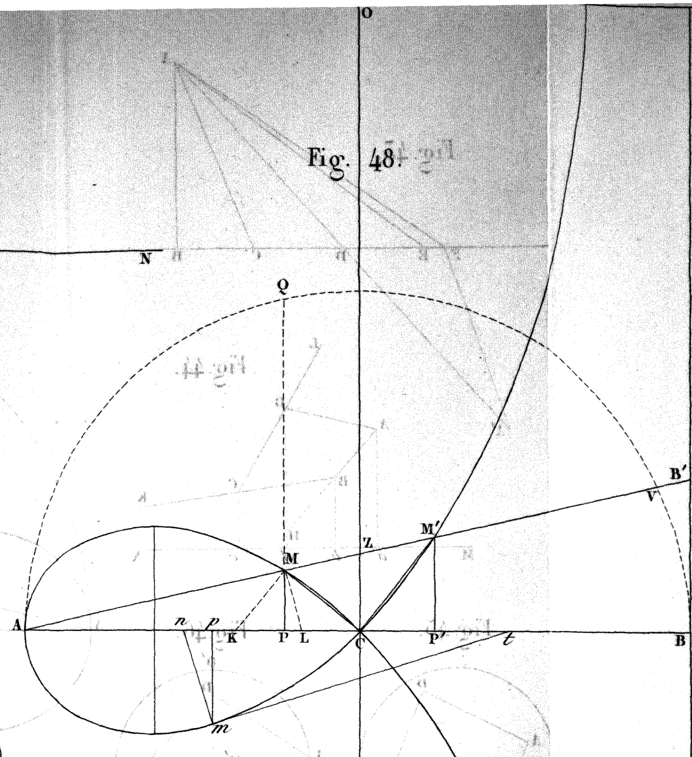


Fig. 49.

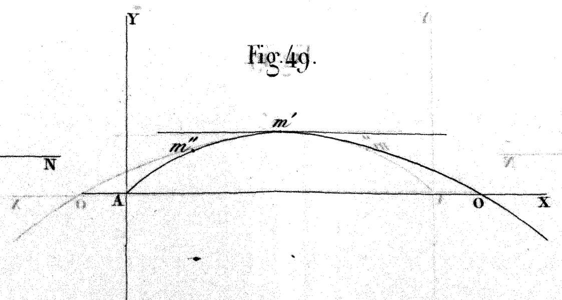


Fig. 50.

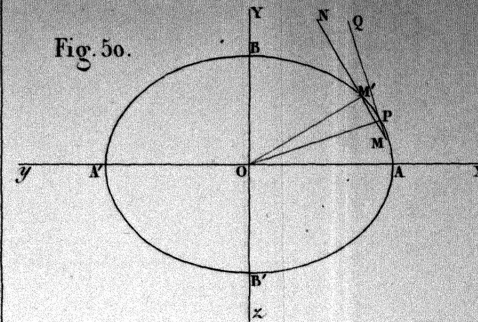


Fig. 51.

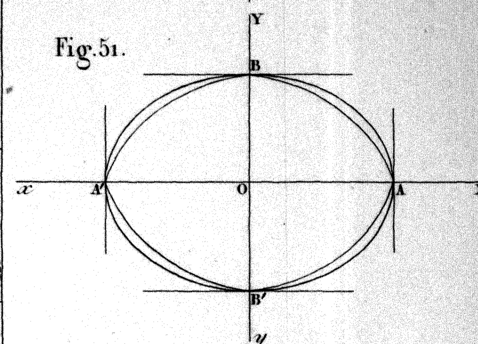


Fig. 52.

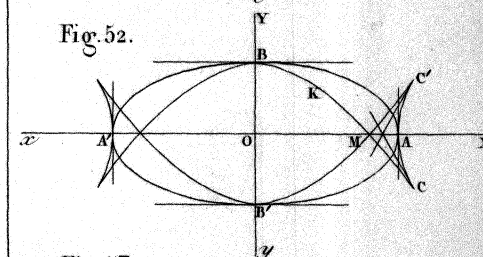
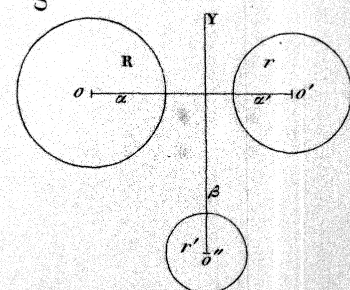


Fig. 53.



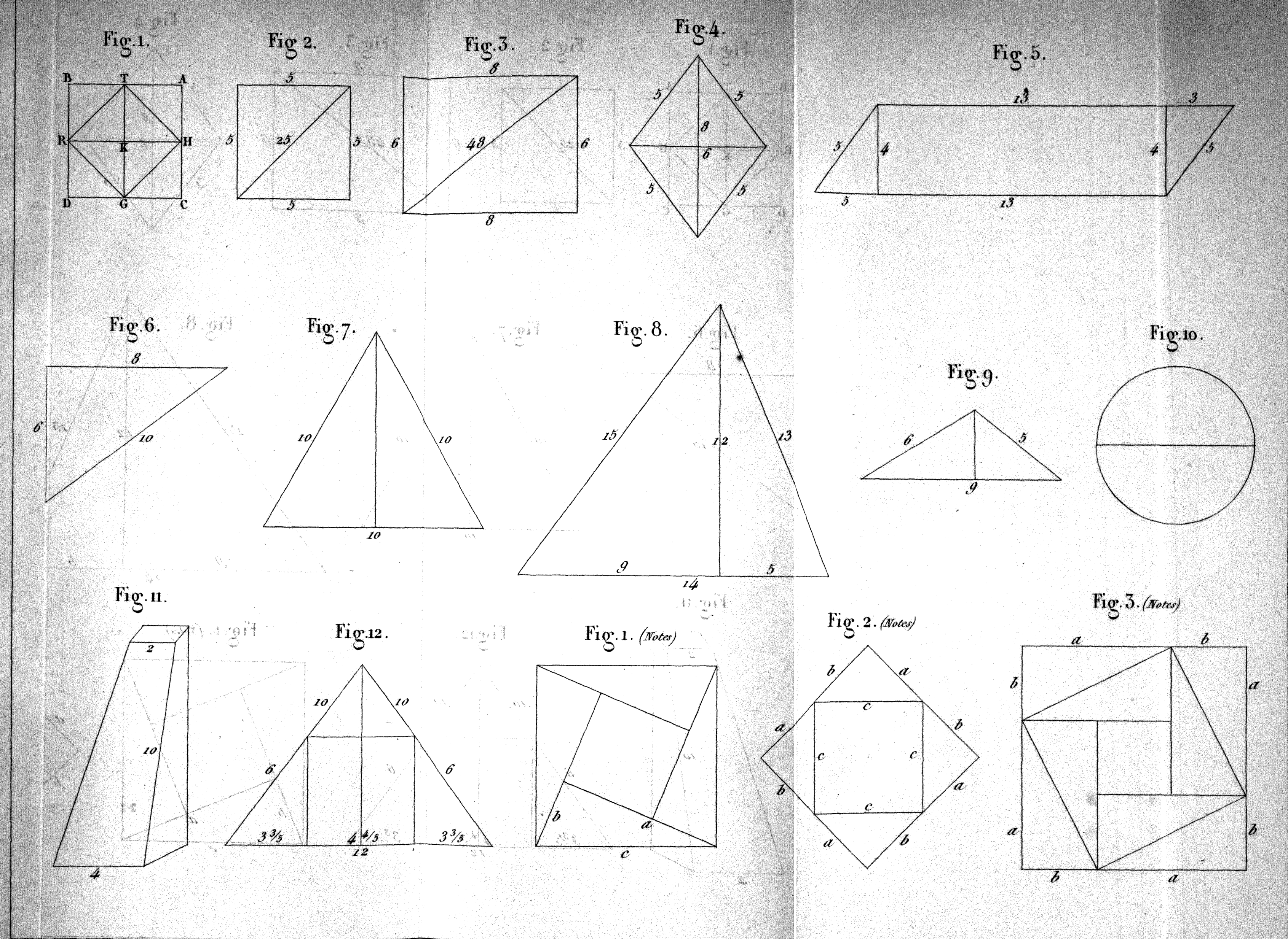


Fig. 1.
B T A
R K H
D G C
Fig 2.
5
25
5
5
5
Fig. 3.
8
6
48
6
8
Fig. 4.
5 5
8
6
5 5
Fig. 5.
13
3
5
4
4
5
5
13
Fig. 6.
8
6
10
Fig. 7.
10
10
10
Fig. 8.
15
12
13
9
14
5
Fig. 9.
6
5
9
Fig. 10.
Fig. 11.
2
10
4
Fig. 12.
10
10
6
6
3 3/5
4 4/5
3 3/5
12
Fig. 1. (Notes)
b
a
c
Fig. 2. (Notes)
b a
c
a b
c c
b a
c
a b
Fig. 3. (Notes)
a b
b a
a b
b a

Lemaitre sc.

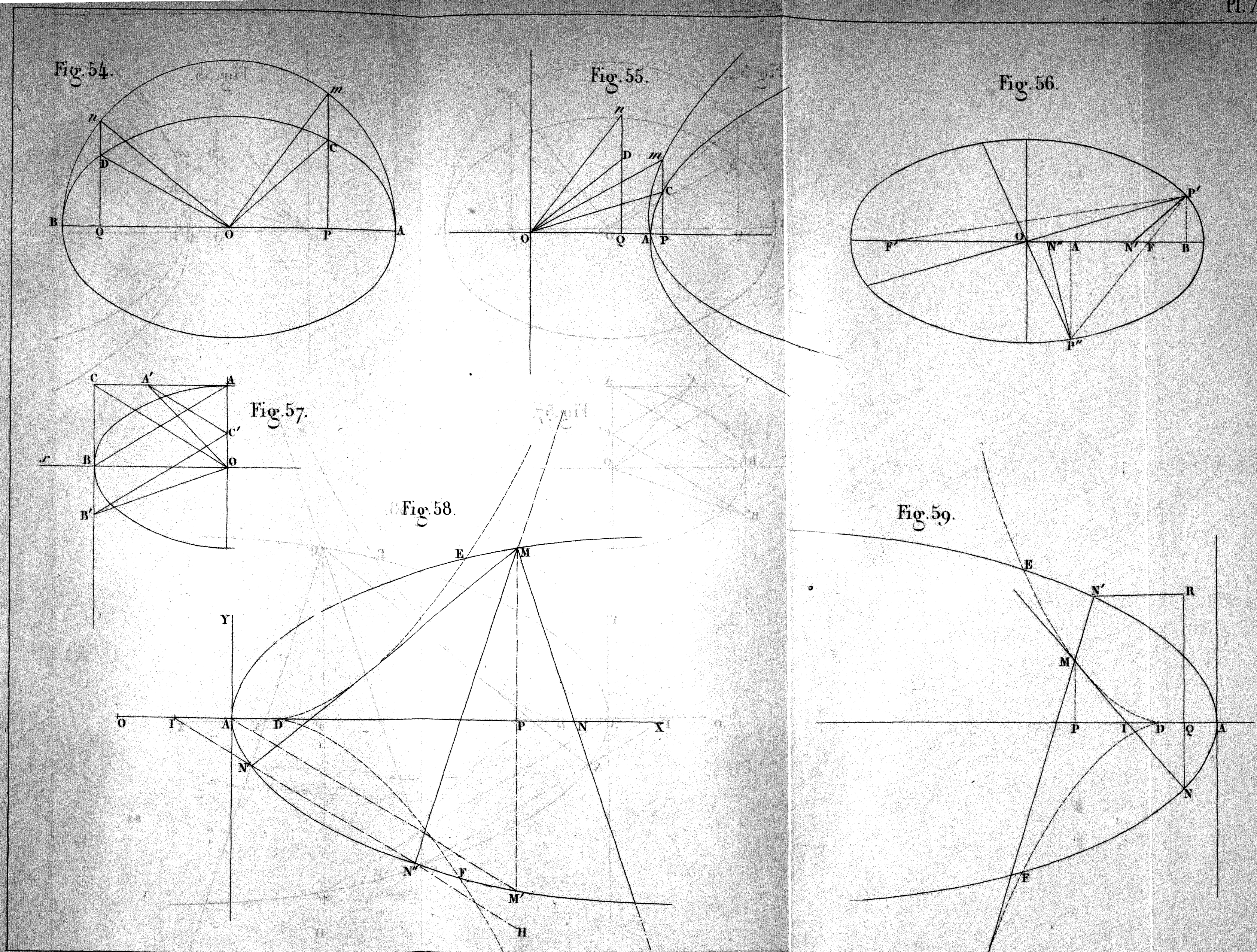


Fig. 54.
m
n
C
D
B
Q
O
P
A
Fig. 55.
n
D
m
C
O
Q
A
P
Fig. 56.
P′
O
F′
N″
A
N′
F
B
P″
Fig. 57.
C
A′
A
C′
x
B
O
B′
Fig. 58.
E
M
Y
O
I
A
D
P
N
X
N′
N″
F
M′
H
Fig. 59.
E
N′
R
M
P
I
D
Q
A
N
F

Lemaitre sc.