Théorème de M. Gauss sur les lignes géodésiques, généralisé et géométriquement démontré par M. Jacobi

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 4 (1845), p. 660-665
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1845_1_4__660_1>

THÉORÈME DE M. GAUSS

sur les lignes géodésiques, généralisé et géométriquement démontré par M. Jacobi (*Journal astronomique* de Schumacher. 1843, p. 115).

—

Observation. Dans tout ce qui suit, nous supposons que la sphère a l'unité pour rayon.

I. *Lemme*. Soit BACDE (*fig*. 65) un polygone sphérique quelconque, ayant les angles rentrants C, D plus grands que deux droites, et pour fixer les idées, nous supposons que le polygone est un pentagone; soit S l'aire du polygone, on a $S = B + C + D + E + A - 3.180$; désignant par m et n les angles formés respectivement par le prolongement de BC, avec CD, et le prolongement de CD avec DE; il vient $S = B + m + n + A + E - 180$; on aura même résultat, quel que soit le nombre des angles rentrants.

Observation. Si le polygone est concave vers son enveloppe, on aurait $S = A + B + E + 180° - m - n$.

Corollaire I. Lorsque BCDE représente une courbe sphérique présentant toujours sa concavité vers les arcs des grands cercles BA, AE, les angles m et n sont des angles de contingence, et si on désigne par T la somme (quantité finie) de tous les angles de contingence, S désignant l'aire sphérique comprise dans les triangles BAE formé par deux arcs des grands cercles et la ligne sphérique, on aura $S = B + A + E + T - 180°$.

Corollaire 2. Si les arcs des grands cercles sont tangents en B et E, à la ligne sphérique les angles B et E sont nuls, et l'on a $S = A + T - 180$; si la courbe présente sa concavité, on aurait $S = A + 180° - T$.

II. *Lemme*. (*Fig*. 66.) Soit MN une ligne sphérique tournant sa convexité vers la même région; pour tous les points, M, I, I', N menant normalement dans le même sens des quadrants; les extrémités de ces quadrants forment une seconde ligne sphérique mn, *polaire* à la première. Chaque angle de contingence formé par les quadrants infiniment voisins Ii, I'i', est représenté, à un infiniment petit du second ordre près, par l'aire de l'élément II'ii'; donc la somme de tous les angles de contingence T est égale à l'aire sphérique comprise dans le quadrilatère MNnm, formé par la ligne MN, sa polaire mn, et les quadrants extrêmes Mm, Nn.

Corollaire 1. Prolongeant le quadrant nN jusqu'à ce qu'il rencontre en A le quadrant Mm, l'aire du quadrilatère se décompose en deux triangles NAM et Anm; or, d'après le corollaire 2 du lemme précédent, l'aire de AMN est égale à $T + A - 180$; donc $T = T + A - 180 +$ aire Amn; donc aire $Amn = 180 - A =$ angle mAN.

III. *Théorème.* Étant donnée dans l'espace une courbe quelconque $\mu\nu$, si, par le centre d'une sphère, on mène des rayons parallèles aux rayons de courbure de la courbe, on forme un cône coupant la sphère suivant la ligne mn (*fig.* 66); si par le centre on mène des droites parallèles aux tangentes à la ligne $\mu\nu$, on formera un second cône rencontrant la sphère suivant la ligne MN, polaire par rapport à mn; ensuite, si par le centre on mène deux plans respectivement parallèles aux plans osculateurs en μ et en ν, on aura les deux seconds grands cercles MAm, ANn; alors l'aire du triangle Anm est égale à l'angle A, c'est-à-dire au supplément de l'angle des deux plans osculateurs.

Démonstration. C'est le corollaire du lemme II.

Exemple. Si la ligne dans l'espace est une trajectoire loxodromique tracée sur un cône droit, tous les rayons de courbure sont parallèles à un même plan; par conséquent, la ligne mn devient un grand cercle, et l'aire du triangle Amn étant égale à l'angle A, il s'ensuit que les angles m et n sont supplémentaires, ce qu'on voit aussi à priori.

IV. *Théorème.* (*Fig.* 67.) Étant donné dans l'espace un triangle ABC, formé par trois courbes quelconques, mais assujetties à la condition qu'à chaque sommet les directions des deux rayons de courbures des courbes qui s'y coupent se confondent. Si par le centre d'une sphère, on mène des parallèles à tous les rayons osculateurs des trois courbes, on formera un triangle sur la sphère, dont l'aire est égale à la différence entre la somme des trois angles du triangle ABC et deux angles droits.

Démonstration. Soit ab, ba, ca, les lignes sphériques correspondant aux lignes AB, BC, CA dans l'espace; $a\beta$ est l'arc du grand cercle, trace sphérique du plan mené par le centre parallèlement au plan osculateur en A, à la courbe AC, et $a\gamma$, l'arc du grand cercle correspondant au plan osculateur en A, à la courbe AB; de sorte que $a\gamma$, $b\gamma$ sont les grands cercles relatifs aux plans osculateurs extrêmes de la ligne AB, et ainsi des autres; et soient e, f, g les intersections des grands cercles dans l'intérieur du triangle abc, on a l'identité géométrique suivante entre les aires :

$$ab\gamma + bc\alpha + ca\beta - abc = ag\gamma + be\alpha + cf\beta - efg.$$

En vertu du corollaire du lemme II, on a $ab\gamma =$ angle γ, et $ag\gamma$ étant un triangle sphérique ordinaire, on a :

$$ag\gamma = a + g + \gamma - 180$$
$$efg = e + g + f - 180.$$

Substituant dans cette identité, aux aires leurs valeurs angulaires, il vient, toutes réductions faites :

$$\begin{aligned} abc &= 2.180 - \text{ang.}\, \alpha b\gamma - \text{ang}\ \beta c\alpha - \text{ang.}\ \gamma\alpha\beta \\ &= (180^\circ - \text{ang.}\, \alpha b\gamma) + (180^\circ - \beta c\alpha) + (180^\circ - \gamma a\beta) - 180^\circ \quad (1). \end{aligned}$$

ou $180^\circ - \alpha b\gamma$ est l'angle formé par les deux plans osculateurs en A aux courbes AB et AC, et comme les rayons de courbure ont même direction, il s'ensuit que cet angle est aussi celui des tangentes en ce point aux deux courbes, ou a l'angle des deux courbes; donc l'équation (1) renferme l'énoncé du théorème.

Corollaire. Lorsque les trois courbes données dans l'espace sont les lignes les plus courtes sur une surface, elles remplissent la condition d'avoir aux points d'intersection des rayons de courbure coïncidents. On obtient alors le célèbre théorème démontré la première fois par M. Gauss, dans ses *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, etc., théorème qu'on peut énoncer ainsi : Si sur une surface quelconque on forme un triangle avec trois lignes de plus courte distance (lignes géodésiques), et qu'on mène par le centre d'une sphère des parallèles à toutes les normales à la surface, correspondant aux points du triangle, on formera sur la sphère un contour fermé dont l'aire est à celle de la sphère comme la différence de la somme des trois angles du triangle géodésique à deux angles droits, est à huit angles droits, différence qui est en excès si la surface est concave vers une région, et en défaut, si ce cas n'a pas lieu. L'illustre directeur de l'Observatoire de Gœttingue a démontré ce théorème à l'aide du calcul intégral, et M. Jacobi en a généralisé l'énoncé en l'appliquant à des courbes quelconques et par la voie géométrique ; il a même donné la plus grande extension possible, en prenant des courbes quelconques, assujetties à aucune condition, par le théorème suivant :

IV. *Théorème* 3. Soit dans l'espace un triangle ABC formé par les trois courbes BC, CA, AB ; du centre d'une sphère, le rayon $= 1$, on mène des parallèles aux rayons de courbure des trois courbes ; on obtient sur la sphère trois autres courbes bc', ca', ab', (c et c' ne se confondent plus) ; aux deux extrémites de chacune de ces courbes on mène des grands cercles $b\beta$, $c'\gamma$, $c\gamma$, $a'\alpha$, $a\alpha$, $b'\beta$, dont les plans sont parallèles aux plans osculateurs menés en B et C, C et A, A et B aux courbes BC, CA, AB ; par exemple : $b\beta$ est parallèle au plan osculateur B au côté BC et C ; alors l'aire de l'ennéagone sphérique $ab'\beta bc'\gamma ca'\alpha a$, dont trois côtés bc', ca', ab' sont, généralement parlant, des courbes à double courbure, et dont les six autres côtés, $a\alpha$, $a'\alpha$, $b\beta$, $b'\beta$, $c\gamma$, $c'\gamma$, sont des arcs de grand cercle, est égale à l'excès sur deux angles droits de la somme des angles que les plans osculateurs forment ensemble aux sommets du triangle AB', ou égal à angle $a\alpha a'$ + angle $b\beta b'$ + angle $c\gamma c'$ — 180°.

Démonstration. C'est une conséquence du théorème Ier.

Corollaire. Si les trois courbes énoncées sont planes (sans être dans un même plan), alors les courbes bc', ca', ab' deviennent aussi des grands cercles, et les trois arcs βb, bc', $c\gamma$ appartiennent au même grand cercle, et il en est ainsi des arcs γc, ca', $a'\alpha$; αa, ab', $b'\beta$, et l'ennéagone se réduisant au triangle sphérique ordinaire $\alpha\beta\gamma$, on parvient à l'expression connue de l'aire du triangle sphérique.

V. *Théorème* 4. Une courbe continue quelconque, mais fermée, étant donnée dans l'espace, si par le centre d'une sphère on mène des rayons parallèles aux rayons de courbure, les extrémités de ces parallèles forment toujours une courbe, qui partage la surface de la sphère en deux parties équivalentes.

Démonstration. Ce beau théorème est aussi une conséquence immédiate du théorème Ier.

Observation. Le mémoire de M. Jacobi est daté de Kœnigsberg, 16 octobre 1842.