PAUL SERRET

Démonstration d'un théorème sur les foyers de l'ellipse

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 4 (1845), p. 648-651

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1845_1_4__648_1>

DÉMONSTRATION

d'un théorème sur les foyers de l'ellipse.

(Nouv. Ann., t. IV, p. 109.)

PAR M. PAUL SERRET,
elève de mathématiques.

—

D'un point M, de la circonference d'une ellipse, on mène deux cordes MFP, MF'P', passant par les deux foyers; démontrer que la somme $\frac{MF}{FP} + \frac{MF'}{F'P'}$ est constante (*fig.* 62).

Je remarque que les projections sur un plan quelconque de deux longueurs comptées sur une même droite sont entre elles dans le même rapport que les longueurs correspondantes; et, dans le cas actuel, les longueurs dont on considère les rapports sont deux à deux situées sur une même droite.

Cela posé, imaginons, comme dans la figure, l'ellipse donnée placée sur un cylindre que nous coupons par un plan perpendiculaire à son axe, de manière à déterminer pour section le cercle o.

Soient m, f, p, f', p' et o les projections sur le plan du cercle des points M, F, P, F', P', O.

D'après le principe précédemment énoncé, on aura :

$$\frac{\mathrm{MF}}{\mathrm{FP}} = \frac{mf}{fp}; \quad \frac{\mathrm{MF'}}{\mathrm{F'P'}} = \frac{mf'}{f'p'}.$$

Par suite,

$$\frac{\mathrm{MF}}{\mathrm{FP}} + \frac{\mathrm{MF'}}{\mathrm{F'P'}} = \frac{mf}{fp} + \frac{mf'}{f'p'}.$$

Donc, si la somme $\frac{\mathrm{MF}}{\mathrm{FP}} + \frac{\mathrm{MF'}}{\mathrm{F'P'}}$ est constante et égale à H, la somme $\frac{mf}{fp} + \frac{mf'}{f'p'}$ sera de même constante et égale à H; et *réciproquement*.

D'après cela, remarquant que, à cause de $\mathrm{OF} = \mathrm{OF'}$, on a aussi $of = of'$, nous apercevrons tout de suite que la proposition énoncée relativement à l'ellipse sera démontrée si nous parvenons à démontrer la proposition suivante relative au cercle qui existe nécessairement si le théorème proposé est vrai.

Théorème. D'un point M de la circonférence d'un cercle AMB on mène deux cordes MFP, MF'P' passant par deux points F, F' situés à égales distances du centre sur le même diamètre fixe AB; démontrer que la somme $\frac{\mathrm{MF}}{\mathrm{FP}} + \frac{\mathrm{MF'}}{\mathrm{F'P'}}$ est constante (*fig.* 63).

Soit $d = o\mathrm{F} = o\mathrm{F'}$. Joignons oM et soit ω l'angle MoF.

Les deux triangles MoF, MoF', l'un acutangle, l'autre obtusangle en o, donnent, en désignant par r le rayon du cercle :

$$(1)\qquad MF = \sqrt{r^2 + d^2 - 2dr\cos\omega}\,;$$

$$(2)\qquad MF' = \sqrt{r^2 + d^2 + 2dr\cos\omega}.$$

Maintenant si nous remarquons que

$$MF.\,FP = MF'.\,F'P' = AF.\,FB = (r+d)(r-d) = r^2 - d^2,$$

nous aurons :

$$(3)\qquad FP = \frac{r^2 - d^2}{MF} = \frac{r^2 - d^2}{\sqrt{r^2 + d^2 - 2dr\cos\omega}}\,;$$

$$(4)\qquad F'P' = \frac{r^2 - d^2}{MF'} = \frac{r^2 - d^2}{\sqrt{r^2 + d^2 + 2dr\cos\omega}}.$$

Donc en divisant membre à membre les relations (1) et (3), (2) et (4), il viendra :

$$(A)\qquad \frac{MF}{FP} = \frac{r^2 + d^2 - 2dr\cos\omega}{r^2 - d^2},$$

$$(B)\qquad \frac{MF'}{F'P'} = \frac{r^2 + d^2 + 2dr\cos\omega}{r^2 - d^2}.$$

Chacun des rapports (A) et (B) est dépendant de la variable ω, mais leur somme est indépendante, et par suite constante.

En effet, l'on a :

$$(C)\qquad \frac{MF}{FP} + \frac{MF'}{F'P'} = \frac{2(r^2 + d^2)}{r^2 - d^2},$$

quantité constante.

La proposition relative à l'ellipse est donc démontrée.

Maintenant il convient, pour résoudre complétement la question proposée, de déterminer en fonction des axes de l'ellipse, la valeur de la somme constante de ces rapports.

Pour l'ellipse, aussi bien que pour le cercle, la valeur de la somme constante est $\frac{2(r^2 + d^2)}{r^2 + d^2}$; nous pouvons donc résoudre la question que nous venons de nous proposer d'une première manière, en cherchant les valeurs de r et d en fonction de a et b.

Or, on sait d'abord que $r = b$; car le petit axe de toute ellipse placée sur un cylindre est égale au diamètre de ce cylindre.

Quant à la valeur de d, si A désigne l'angle du plan de l'ellipse avec le plan du cercle, l'on a : $d = c \cos A$; d'ailleurs $\cos A = \frac{b}{a}$.

Donc

$$r = b\ ; \quad d = \frac{bc}{a}.$$

Donc

$$2\frac{(r^2 + d^2)}{r^2 - d^2} = 2\frac{b^2(a^2 + c^2)}{b^2(a^2 - b^2)} = 2 \cdot \frac{a^2 + c^2}{a^2 - c^2}.$$

La somme constante dont il s'agit est donc $2 . \frac{a^2 + c^2}{a^2 - c^2}$.

Mais nous pouvions arriver au même résultat d'une autre manière plus simple.

Pour cela, donnons au point M une position particulière pour laquelle les rapports dont il s'agit de déterminer la somme soient exprimés aussi simplement que possible. Supposons, par exemple, que le point M soit l'une des extrémités du grand axe de l'ellipse, l'extrémité de a, par exemple, on aura :

$$\frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FB}} = \frac{a + c}{a - c}; \quad \frac{\mathrm{AF'}}{\mathrm{F'B}} = \frac{a - c}{a + c}.$$

Donc

$$\frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FB}} + \frac{\mathrm{AF'}}{\mathrm{F'B}} = \frac{a+c}{a-c} + \frac{a-c}{a+c} = \frac{(a+c)^2 + (a-c)^2}{a^2-c^2} = 2\frac{(a^2+c^2)}{a^2-c^2},$$

ce qui nous conduit au résultat déjà obtenu.