DROT

Note sur les chiffres qui peuvent terminer les puissances quelconques des nombres entiers

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 4 (1845), p. 637-644

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1845_1_4__637_0>

NOTE

Sur les chiffres qui peuvent terminer les puissances quelconques des nombres entiers.

PAR M. DROT,

professeur de mathématiques spéciales au collége royal de Poitiers.

I. En formant les puissances des 10 premiers nombres, on reconnaît qu'elles sont terminées successivement par les chiffres suivants :

1re puissance	:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
2e —	:	1	4	9	6	5	6	9	4	1	0
3e —	:	1	8	7	4	5	6	3	2	9	0
4e —	:	1	6	1	6	5	6	1	6	1	0
5e —	:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0

d'où résulte que la 6e puissance serait terminée par les mêmes chiffres que la 2e et dans le même ordre, et ainsi de suite : il est facile d'après ce tableau de déterminer quel sera le dernier chiffre de la puissance même d'un nombre, connaissant le dernier chiffre de ce nombre : si le nombre est élevé à une puissance d'exposant $4n$ il faudra consulter la quatrième ligne ; si l'exposant est $4n+1$, ce sera la première si $4n+2$, ce sera la 2e : si $4n+3$, la 3e.

Il m'a semblé que ces considérations pouvaient être établies d'une manière plus rigoureuse et même se généraliser : je me propose donc, dans cette note, de rechercher : 1° A quelle puissance il faut élever un nombre N pour que le dernier chiffre se reproduise: 2° à quelle puissance il faut élever un nombre N pour que les deux derniers chiffres se reproduisent: 3° à quelle puissance il faut élever un nombre N pour que les trois derniers chiffres se reproduisent; ainsi de suite. Il sera facile de déduire de là quel est le dernier chiffre, ou quels sont les deux derniers chiffres, ou les trois derniers chiffres.... de la puissance quelconque d'un nombre entier; car, si pour une puissance x, par exemple, les deux derniers chiffres de N se reproduisent, on cherchera les deux derniers chiffres des différentes puissances de N, depuis la puissance 1, jusqu'à la puissance x, et à partir de là, les deux derniers chiffres reviendront dans le même ordre, puisqu'en multipliant un nombre par un autre, il est facile de voir que les deux derniers chiffres du produit ne dépendent que des deux derniers chiffres des facteurs.

II. Soit N, un nombre entier quelconque, chercher à quelle puissance x il faut l'élever pour que le dernier chiffre d se reproduise · il faudra pour cela que l'on ait :

$$(1) \qquad \begin{cases} N = 10q + d \\ N^x = 10q' + d \end{cases}$$

d'où ·

$$N\,(N^{x-1} - 1) = 10\,(q' - q) \qquad (2)$$

c'est-à-dire que $N\,(N^{x-1} - 1)$ doit être divisible par 10 · cette condition est évidemment nécessaire d'après ce qui précède, et de plus elle est suffisante; car si elle existe, la 1re des relations (1) existant toujours, on en déduira facilement la 2e. Je distinguerai trois cas · 1° N divisible par 10 : 2° N premier avec 10 : 3° N non divisible par 10 sans être premier avec lui.

III. Dans le premier cas, la relation (2) est satisfaite, quel que soit x. Dans le second cas, pour que cette relation soit satisfaite, il faut et il suffit que $N^{x-1} - 1$ soit divisible par

10 ; or, dans ce cas, N étant impair, $N^{x-1}-1$ est nécessairement divisible par 2 ; donc il faut et il suffit que $N^{x-1}-1$ soit divisible par 5 : cette condition aura toujours lieu, d'après le théorème de Fermat, pour $x=5$, c'est-à-dire que N^4 divisé par 5 donnera le reste 1 · mais nous ne sommes pas certains qu'une puissance inférieure à N^4 ne puisse pas aussi donner le reste 1; toutefois, si une puissance inférieure à N^4 donnait le reste 1, ce ne pourrait être que N^1 ou N^2 (1 et 2 étant les seuls diviseurs de 4) on trouve en effet que N^1 divisé par 5 donnera le reste 1, toutes les fois que le nombre N qui est impair sera terminé par 1, et dans ce cas, la relation (2) sera satisfaite pour $x=2$ et conséquemment toute valeur de x ; car N^1 donnant le reste 1, toute puissance de N jouira de la même propriété. On trouve aussi que N^2 divise par 5 donnera le reste 1, toutes les fois que N^2 qui est impair sera terminé par 1, c'est-à-dire que N sera terminé par 1 ou par 9 ; la première circonstance vient d'être considérée ; la seconde apprend que pour un nombre terminé par 9, la relation (2) est satisfaite pour $x=3$ et par suite pour $x=5$, 7.... Dans les autres cas, c'est-à-dire pour N terminé par 3 ou 7, la relation (2) n'est satisfaite que pour $x=5$ et par suite pour $x=9$, 13....

Soit actuellement le cas de N non divisible par 10 sans être premier avec lui ; considérons : 1° N divisible par 2 sans l'être par 5 : 2° N divisible par 5 sans l'être par 2.

1° N *divisible par* 2 *sans l'être par* 5. Pour que la relation (2) soit satisfaite, il faut et il suffit que $N^{x-1}-1$ soit divisible par 5 ; ce qui aura toujours lieu pour $x=5$ et ce qui peut aussi avoir lieu pour des valeurs inférieures de x : une analyse semblable à la précédente montrera alors : que la relation (2) sera satisfaite pour $x=2$ et par suite pour toute valeur de x, quand N^1 divisé par 5 donnera le reste 1, c'est-à-dire quand N sera terminé par 6 : que la relation (2) sera satisfaite pour $x=3$ et par suite pour $x=5, 7\ldots$ quand N^2 divisé par 5 donnera le reste 1, c'est-à-dire quand N sera terminé par 4 : que la relation (2) ne sera satisfaite que pour $x=5$ et par suite pour $x=9, 13\ldots$ quand N sera terminé par 2 ou 8.

2° N *divisible par* 5 *sans l'être par* 2. Pour que la relation (2) soit satisfaite, il faut et il suffit que $N^{x-1}-1$ soit divisible par 2; ce qui a toujours lieu. En résumant on conclura que pour les nombres terminés par 0, 1, 5, 6 le dernier chiffre est toujours reproduit : que pour les nombres terminés par 4 et 9, le dernier chiffre se reproduit à toutes les puissances d'exposant impair : que pour les nombres terminés par 2, 3, 7, 8, le dernier chiffre se reproduit à toutes les puissances d'exposant $4n+1$.

IV. Cherchons maintenant à quelle puissance il faut élever N pour que les deux derniers chiffres se reproduisent. en procédant de la même manière, on aura les relations :

$$(3) \qquad \begin{cases} N = 100q + \beta\alpha \\ N^x = 100q' + \beta\alpha \end{cases}$$

$$N\,(N^{x-1}-1) = 100\,(q'-q) \qquad (4)$$

il faudra donc et il suffira que la relation (4) soit satisfaite, c'est-à-dire que $N\,(N^{x-1}-1)$ soit divisible par 100. Je distinguerai encore trois cas : 1° N divisible par 100 : 2° N premier avec 100 · 3° N non divisible par 100 sans être premier avec 100.

V. Dans le premier cas, la relation (4) est satisfaite quel que soit x.

Dans le second cas, pour qu'elle soit satisfaite, il faut et il suffit que $N^{x-1}-1$ soit divisible par 100, c'est-à-dire que N^{x-1} divisé par cent donne le reste 1 : or, comme 100 n'est pas un nombre premier, le théorème de Fermat ne donne pas immédiatement une valeur de x qui satisfasse à cette condition ; mais on sait qu'entre N^0 et N^{100} il y a au moins une puissance qui, divisée par 100, donnera le reste 1 ; cette puissance se trouvera facilement, parce qu'il est aisé d'obtenir la série des restes correspondants aux diverses puissances de N ; on trouvera donc facilement la plus petite valeur de x, satisfaisant à la relation (4) et par suite toutes les autres. Dans le cas spécial où N serait terminé par 01, la relation (4) serait satisfaite pour $x=2$, et par suite pour toute valeur de x. Dans le troisième cas enfin, il peut arriver plusieurs circonstances.

1° N divisible par 4 sans l'être par 5.— Dans ce cas, il faut et il suffit que $N^{x-1}-1$ soit divisible par 25, et comme précédemment, on trouvera facilement la plus petite valeur de x satisfaisant à cette condition. — Dans le cas spécial de N terminé par 76, la relation (4) sera satisfaite pour $x=2$ et par suite pour toute valeur de x.

2° N divisible par 25 sans l'être par 2. —Dans ce cas, il faut et il suffit que $N^{x-1}-1$ soit divisible par 4, et comme précédemment, on cherchera encore la plus petite valeur de x satisfaisant à cette condition. — Dans le cas spécial de N terminé par 25 la relation (4) est satisfaite pour $x=2$ et par suite pour toute valeur de x.

3° N divisible par 2 sans l'être par 4, ou N divisible par 5 sans l'être par 25. — Dans ce cas, la relation (4) est impossible ; car il faudrait que $N^{x-1}-1$ fût encore divisible par 2 ou par 5, ou que $N^{x-1}-1$ divisé par 2 ou 5 ramenât le reste 1 ; ce qui ne peut être, puisque N ne serait pas premier avec 2 ou 5. En résumant, on conclura que pour les nombres terminés par 00, 01, 25, 76 les deux derniers chiffres sont toujours reproduits ; que pour les nombres divisibles par 2 sans l'être par 4, ou divisibles par 5 sans l'être par 25, les deux derniers chiffres ne sont jamais reproduits ; que pour tous les autres nombres, les deux derniers chiffres se reproduisent pour une certaine puissance, dont il est toujours facile de calculer l'exposant.

6. Dans l'application de ce qui précède, il pourra paraître quelquefois pénible de calculer l'exposant de la plus petite puissance qui ramène les deux derniers chiffres du nombre donné; mais ce calcul est très-rapide, si l'on veut faire usage des théorèmes connus à ce sujet, mais je rappellerai ces deux principes qu'on ne trouve pas ordinairement dans les livres élémentaires:

1° Il est toujours facile de trouver combien il y a de nombres premiers avec un nombre quelconque N et inférieurs à N : soit F le nombre cherché et décomposant N en facteurs premiers, soit $N = a^p b^q c^r$, on aura toujours :

$$F = N \times \frac{a-1}{a} \times \frac{b-1}{b} \times \frac{c-1}{c}. \text{ (*)}$$

2° Si un nombre p est premier avec N, l'exposant de la plus petite puissance de N autre que N^0, qui, divisé par p, donne le reste 1 est F ou un diviseur de F. Soit donc, par exemple, un nombre 759; il s'agit de calculer l'exposant de la plus petite puissance qui doit ramener les chiffres finals 59 ce nombre tombe dans le deuxième cas, puisqu'il est premier avec 100; on doit donc chercher la plus petite puissance à laquelle il le faut élever, pour que cette puissance, divisée par 100, donne le reste 1. On a. $F = 100 \times \frac{1}{2} \times \frac{4}{5} = 40$; l'exposant de cette puissance sera 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20 ou 40; on n'aura donc qu'à calculer les résidus correspondants à ces puissances, jusqu'à ce qu'on arrive à un résidu 1 : ce calcul se fera très-vite, si l'on remarque que le résidu de la division par 100 se compose toujours des deux derniers chiffres du

(*) Catalan, t. I. p 467, *Nouv Annales* Tm dividende ; que le résidu du produit de plusieurs facteurs s'obtient en multipliant les résidus des facteurs, et en cherchant le résidu du produit ; que le résidu de la puissance d'un nombre s'obtient en élevant le résidu de ce nombre à la même puissance, et en cherchant le résidu du résultat. C'est ainsi qu'on aura :

Puissances :	$\overline{759}^1$	$\overline{759}^2$	$\overline{759}^4$	$\overline{759}^5$	$\overline{759}^8$	$\overline{759}^{10}$,
Résidus . :	59	81	61	99	21	1.

Ainsi, pour le nombre en question, la plus petite valeur de x qui satisferait à la relation (4) serait $x = 11$. Les chiffres finals 59 reviendraient à la douzième puissance.

Dans le cas d'un nombre N divisible par 25 sans l'être par 2, comme on a à rechercher à quelle puissance il faut élever N, pour que cette puissance divisée par 4 donne le résidu 1, on aura : $F = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$. L'exposant de la puissance en question ne peut donc être que 1 ou 2 ; or, il est 1 dans le cas seulement de N terminé par 25 ; donc dans le cas de N terminé par 75, il sera nécessairement 2, et la relation sera satisfaite pour $x = 3$.

7. Si l'on cherche maintenant à quelle puissance il faut élever N pour que les trois derniers chiffres se reproduisent, on sera conduit à la relation :

$$N\,(N^{x-1} - 1) = 1000\,(q' - q), \qquad (5)$$

et en la traitant comme les précédentes, on sera amené à conclure :

Que pour les nombres terminés par 000, 001, 376, 625, les trois derniers chiffres se reproduisent toujours ; que pour les nombres divisibles par 2 sans l'être par 8, ou divisibles par 5 sans l'être par 125 les trois derniers chiffres ne sont jamais reproduits : que pour tous les autres nombres, les trois derniers chiffres se reproduisent pour une certaine puissance, dont il est toujours facile de calculer l'exposant.

Les calculs se simplifieront d'après les remarques précédemment faites.

Il serait facile de généraliser ces résultats.

8. Je terminerai en observant qu'on pourrait simplifier davantage ces sortes de recherches, en ayant recours aux différents principes démontrés dans les *Disquisitiones arithmeticæ* de Gauss, dont j'énoncerai encore le suivant : si N est un nombre impair et si $p = 2^n$, la puissance de N qui a pour exposant 2^{n-2}, divisée par p, donne le reste 1.

On l'appliquerait facilement au cas où dans la relation (5) on suppose N divisible par 125 ; il faut alors que $N^{x-1}-1$ soit divisible par $8 = 2^3$. Or, N^2 divisé par 8 donnera le reste 1 ; donc la relation sera toujours satisfaite pour $x = 3$.