NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

H. LEMONNIER

Formules fondamentales de la trigonométrie sphérique et sur les angles de torsion

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 4 (1845), p. 606-616

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1845_1_4__606_1>

FORMULES FONDAMENTALES

de la trigonométrie sphérique et sur les angles de torsion,

PAR M. H. LEMONNIER,
ancien elève de l'Ecole normale, professeur au college de Nantes.

La plupart des livres élémentaires ne présentent le théorème relatif à la projection d'une ligne brisée sur un axe que pour en faire usage dans le problème de la transformation des coordonnées. Les applications dont ce théorème est susceptible sont cependant si variées et si simples, qu'on ne saurait lui accorder trop d'importance. On peut y rattacher immédiatement par une discussion fort simple, comme le fait M. Duhamel dans ses conférencee à l'Ecole normale, le theorème que la projection d'une droite sur une axe est égale à la somme de ses projections sur trois directions rectangulaires respectivement multipliées par les cosinus des angles que font ces directions avec l'axe : ce qui donne le cosinus de l'angle de deux droites. Les deux théorèmes ainsi établis de prime abord, on peut en faire dépendre la trigonométrie tout entière. Les démonstrations des formules fondamentales deviennent d'une simplicité remarquable, et en apportant quelques légers changements aux premières définitions, on pourrait s'épargner bien des discussions fastidieuses et toujours embarrassantes pour les élèves. Si le sujet vous paraissait mériter quelques développements, je me ferais un devoir de vous exposer la manière dont je l'entends. Mais je dois à la vérité de dire que les idées que j'ai à cet égard ne m'appartiennent pas pour le fond : j'en ai puisé le germe aux leçons de M. Duhamel.

L'objet principal de la note que je vous adresse est une démonstration de la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique fondée uniquement sur le théorème dont j'ai rapporté plus haut l'énoncé, ainsi que sur une remarque connue que, deux axes rectangulaires étant pris dans un plan, le cosinus de l'angle que fait avec l'un de ces axes une direction quelconque prise dans le plan, est toujours le sinus de l'angle qu'elle fait avec le second axe, pourvu que ce dernier angle soit compté en allant du second axe vers le premier.

Je présente ensuite une démonstration élémentaire des séries qui expriment sin x et cos x ; elle est analogue à celle que l'on doit, je crois, à M. Cauchy pour le développement de l'exponentielle.

1° Soit un triangle sphérique *quelconque* ABC (*fig.* 60) sur une sphère de rayon égal à l'unité. (*V.* t. I, p. 33.)

Projetons le rayon OC sur la direction OB : cette projection est $\cos a$. Mais si dans le plan COA, et du côté de l'angle COA, on mène une perpendiculaire ON sur le rayon OA, et qu'on projette OC sur les deux axes rectangulaires OA, ON, on aura immédiatement, d'après les théorèmes que j'ai rappelés :

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \cos \mathrm{NOB}.$$

Pour transformer le second terme de cette formule, menons en O un plan perpendiculaire au rayon OA, et soit ON' son intersection avec le plan BOA prise du côté de l'angle BOA ; menons d'ailleurs dans ce plan une perpendiculaire ON'' à ON'. Il est clair que l'angle NON' sera l'angle A du triangle, et que la droite ON'' perpendiculaire à ON' et à OA le sera à la droite OB. La projection de $\sin b$ sur OB pourra s'obtenir en prenant ses projections sur ON' et sur ON'', et les multipliant ensuite par cos N'OB et cos N''OB. Comme ce dernier cosinus est nul, le terme correspondant disparaît. Puis le cosinus de N'OB est le sinus de BOA ou de c. Donc

$$\sin b \cos \mathrm{NOB} = \sin b \cos \mathrm{A} \sin c.$$

On a par conséquent la formule :

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \mathrm{A}.$$

Et elle se trouve établie sans aucune discussion pour tous les cas possibles.

2° Considérons les deux séries :

$$\varphi x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \ldots\ldots$$

$$\psi x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2..5} - \frac{x^7}{1.2...7} + \ldots\ldots$$

On déduit des premières notions sur les séries qu'elles sont convergentes pour toutes les valeurs de x.

On a la relation

$$\overline{\varphi x}^2 + \overline{\psi x}^2 = 1.$$

Pour le démontrer, rappelons qu'étant données deux séries dont les modules des termes forment eux-mêmes des séries convergentes, on peut en déduire une série dont la somme soit le produit des sommes des deux séries.

D'après cela, on trouve :

$$\overline{\varphi x}^2 = 1 - \left(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2}\right)x^1 + \left(\frac{1}{1.2.3.4} + \frac{1}{1\ 2.} - \frac{1}{1.2} + \frac{:}{1.2.3.4}\right)x^4 .. \pm$$

$$\pm \left(\frac{1}{12..2_n} + \frac{1}{1..2_{n-2}} + \ldots \frac{1}{12}\right)x^{2n}$$

$$\overline{\psi x}^2 = x^2 - \left(\frac{1}{123} + \frac{1}{123}\right)x^4 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \pm$$

$$\pm \left(\frac{1}{1\ldots 2_{n-1}} + \frac{1}{1.2..2_{n-3}} \frac{1}{1.2.3} + \ldots\right)x^{2n-1}$$

Le coefficient du terme général dans l'expression de $\overline{\varphi x}^2$ revient :

$$\frac{1}{1.2.3\ldots 2n}\left\{1 + \frac{2n.2n-1}{1.2} + \frac{2n.2n-1.2n-2.2n-3}{1.2.3.4.} + \frac{2n\ldots 1}{1.2..2n}\right\};$$

et celui du terme général dans l'expression de $\overline{\psi x}^2$ à

$$\frac{1}{1.2\ldots 2n-1}\left\{1 + \frac{2n-1\ 2n-2}{1.2.3} + \ldots \frac{2n-1\ldots 2}{1.2.3\ldots 2n-1}\right\};$$

mais le développement de $(1-1)^{2n} = 0$, donne

$$0 = 1 - 2n + \frac{2n.2n-1}{1.2} - \frac{2n\ldots 2n-2}{1.2.3} + \ldots \frac{2n..2}{1.2..2n-1} + \frac{2n..1}{1.2..2n}\Big\}$$

d'où

$$1 + \frac{2n.2n-1}{1.2} + \frac{2n..2n-3}{1.2..4} + \ldots + \frac{2n\ldots 1}{1\ldots 2n} =$$

$$= 2n + \frac{2n.2n-1.2n-2}{1.2.3} + \ldots \frac{2n\ldots 2}{1.2..2n-1} =$$

$$= 2n\left\{1 + \frac{2n-1.2n-2}{1.2.3} + \ldots \frac{2n-1.2}{1.2\ .2n-1}\right\};$$

et de là il résulte que les deux coefficients sont égaux.

En ajoutant les deux relations obtenues membre à membre, on aura donc

$$\overline{\varphi x}^2 + \overline{\psi x}^2 = 1.$$

Si on pose $\varphi x = \cos \omega$, on aura donc $\psi x = \sin \omega$, en disposant convenablement du signe de ω.

Cela posé l'expression $\varphi x + \sqrt{-1}\,\psi x$ étant

$$\varphi x + \sqrt{-1}\,\psi x = 1 + \frac{x\sqrt{-1}}{1} + \frac{(x\sqrt{-1})^2}{1.2} + \frac{(x\sqrt{-1})^3}{1.2.3} + ..$$

Si on prend l'expression

$$\varphi y + \sqrt{-1}\,\psi y = 1 + \frac{y\sqrt{-1}}{1} + \frac{(y\sqrt{-1})^2}{1.2} + \frac{(y\sqrt{-1})^3}{1.2.3} + ..$$

On en conclura, comme on le fait pour les développements de e^x et de e^y,

$$(\varphi x + \sqrt{-1}\,\psi x)\,(\varphi y + \sqrt{-1}\,\psi y) = \varphi\,(x+y) + \sqrt{-1}\,\psi\,(x+y),$$

ce qui conduit à

$$(\varphi x + \sqrt{-1}.\psi x)^m = \varphi m x + \sqrt{-1}\,\psi m x;$$

au moins pour toute valeur de m entière et positive.

Cette formule comme celle de Moivre pourrait dès le moment être soumise à la même généralisation et la même discussion, ce qui conduirait à voir que φx et ψx sont des fonctions périodiques à même période. Mais cela n'étant d'aucune utilité pour l'objet que je me propose, je ne m'y arrêterai pas.

Si l'on prend

$$\varphi x + \sqrt{-1}\,\psi x = \cos \omega + \sqrt{-1} \sin \omega,$$

ce qui précède avec la formule de Moivre donne

$$\varphi m x + \sqrt{-1}\,\psi m x = \cos m\omega + \sqrt{-1} \sin m\omega.$$

Soient donc x et x' deux nombres qui représentent des grandeurs commensurables entre elles ; on pourra poser $x = m\xi$, $x' = m'\xi$, et si l'on pose

$$\varphi\xi + \sqrt{-1}\,\psi\xi = \cos\omega + \sqrt{-1}\sin\omega,$$

il viendra

$$\varphi x + \sqrt{-1}\,\psi x = \cos m\omega + \sqrt{-1}\sin m\omega = \cos n + \sqrt{-1}\sin n$$
$$\varphi x' + \sqrt{-1}\,\psi x' = \cos m'\omega + \sqrt{-1}\sin m'\omega = \cos n' + \sqrt{-1}\sin n'$$

on peut donc considérer n et n' comme proportionnels à x et x' : d'où

$$n = \mathrm{K}x\,;$$

et par suite

$$\varphi x = \cos n = \cos \mathrm{K}x = 1 - \frac{x2}{1.2} + \frac{x4}{1..4}$$

$$\psi n = \sin n = \sin \mathrm{K}x = x - \frac{x3}{1.2.3} + \frac{x5}{1.2.3.4.5}.$$

Quant à la constante K, observons pour la déterminer que le rapport $\frac{\sin x}{x}$ comme on le voit en trigonométrie, ayant l'unité pour limite, quand on fait décroître x indéfiniment, le rapport $\frac{\sin \mathrm{K}x}{x}$ aura K pour limite. Mais puisqu'on tire de la série même $\frac{\sin \mathrm{K}x}{x} = 1 - \frac{x2}{1.2.3} +$ cette limite est l'unité même. Donc $\mathrm{K} = 1$.

Je finirai en communiquant un moyen de déterminer l'angle de torsion ; étant fondé en partie sur des considérations géométriques, il n'entraîne dans aucun calcul pénible. J'y ajoute une solution géométrique d'un problème, traité par une analyse ingénieuse, dans un des derniers volumes du journal de M. Liouville, à savoir que l'hélice est la seule courbe qui ait ses deux courbures constantes.

Lemme I : L'angle de contingence en un point d'une courbe a pour complément l'angle que fait la normale principale en ce point, avec la tangente en un point infiniment voisin.

En effet, on a pour le cosinus de ce dernier angle

$$\rho\frac{d\frac{dx}{ds}}{ds}\left\{\frac{dx}{ds}+d\frac{dx}{ds}\right\}+\rho\frac{d\frac{dy}{ds}}{ds}\left\{\frac{dy}{ds}+d\frac{dy}{ds}\right\}+\rho\frac{d\frac{dz}{ds}}{ds}\left\{\frac{dz}{ds}+d\frac{dz}{ds}\right\}$$

ce qui se réduit à

$$\frac{\rho}{ds}\left\{\left(d\,\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(d\,\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(d\,\frac{dz}{ds}\right)^2\right\}=\frac{\rho}{ds}\,\frac{ds^2}{\rho^2}=\frac{ds}{\rho}=\omega\,;$$

ω désignant l'angle de contingence, et ρ le rayon de courbure.

Angle de torsion.

Soit M un point quelconque sur une courbe, soit M′ le point correspondant sur l'arête de rebroussement de la surface polaire.

L'angle de contingence en M′ est, comme on le sait, égal à l'angle de torsion en M, puisque les génératrices de la surface polaire sont perpendiculaires aux plans osculateurs de la courbe.

On sait encore que les plans tangents d'une surface développable, sont osculateurs à son arête de rebroussement. Donc, le plan osculateur en M′ est le plan normal en M, et comme le plan normal y est parallèle au plan osculateur en M′, il s'ensuit que les normales principales en M et M′ sont parallèles.

L'angle de contingence en M′ sera donc, d'après le lemme établi, le complément de l'angle que fait la normale principale en M avec la perpendiculaire au plan osculateur en un point infiniment voisin de M.

Si l'on désigne par l, m, n les angles que la normale au plan osculateur en M fait avec les axes des coordonnées, on aura en conséquence pour l'expression de l'angle de torsion ω'.

$$\pm\omega' = \rho\frac{d\frac{dx}{ds}}{ds}(\cos l + d\cos l) + \rho\frac{d\frac{dy}{ds}}{ds}[\cos m + d\cos m] +$$

$$+\rho\frac{d\frac{dz}{ds}}{ds}(\cos n + d\cos n),$$

c'est-à-dire :

$$\pm\omega' = \rho\frac{d\frac{d\omega}{ds}}{ds}d\cos l + \rho\frac{d\frac{dy}{ds}}{ds}d\cos m + \rho\frac{d\frac{dz}{ds}}{ds}.d\cos n$$

Si l'on observe que la relation

$$\cos l\, d\frac{d\omega}{ds} + \cos m\, d\frac{dy}{ds} + \cos n\, d\frac{dz}{ds} = 0$$

donne

$$d\frac{dx}{ds}.\, d\cos l + \ldots = -\left(\cos l\, d^2\frac{dx}{ds} + \ldots\right),$$

on a cette autre forme de l'angle de torsion :

$$\pm\omega' = -\frac{\rho}{ds}\left\{\cos l\, d^2\frac{dx}{ds} + \cos m\,.d^2\frac{dy}{ds} + \cos n\,.d^2\frac{d_z}{ds}\right\} = -$$

$$= -\frac{1}{\omega}\left(\cos l\, d^2\frac{dx}{ds} + \cos m\, d^2\frac{dy}{ds} + \cos n\, d^2\frac{d_z}{ds}\right).$$

Qu'on veuille déduire de là les expressions ordinaires, il suffira de remarquer que :

$$d^2\frac{dx}{ds} = d.\left\{\frac{d^2x}{ds} - dx\frac{d^2s}{ds.}\right\} =$$

$$= \frac{d^3x}{ds} - 2\frac{d^2x d^2s}{ds^2} - dx\, d.\frac{d^2s}{ds^2}:$$

ce qui, en omettant les termes qui se détruisent, conduit à

$$\pm\omega' = -\frac{1}{\omega ds}(\cos l d^3x + \cos m\, d^3y + \cos n d^3z).$$

Comme on a d'ailleurs :

$$\frac{\cos l}{dyd^2z - dzd^2y} = \frac{\cos m}{dzd^2x - dxd^2z} = \frac{\cos n}{dxd^2y - dyd^2x} = \frac{\rho}{ds^3},$$

il vient :

$$\pm\,\omega' = \frac{\rho^2}{ds^5}\left[(yd^2z - dzd^2y)\,d^3x + (dzd^2d - dxd^2z)\,d^3y + \right.$$

$$+ (dxd^2y - dydx^2)\;d^3z] = \frac{\rho^2}{ds^3}\;[dx\;(d^2yd^3 - d^2zd^3y) +$$

$$+ dy\;(d^2zd^3x - d^2xd^3z + dz\,(d^2xd^3y - d^2yd^3x)],$$

ce qui se réduit, quand on prend x pour variable indépendante, à :

$$\pm\,\omega' = \frac{\rho^2}{ds^5}\,[d^2yd^3z - d^2zd^3x]\,dx.$$

Une courbe dont les deux courbures sont constantes peut se considérer comme limite d'une ligne brisée dont les côtés pris égaux présenteront consécutivement les mêmes angles et qui détermineront deux à deux de proche en proche des plans également inclinés entre eux dans le même sens.

Cela posé, nous allons prouver qu'une pareille ligne brisée peut toujours se considérer comme un polygone de longueur minimum sur une surface prismatique régulière. Quand en multipliant indéfiniment le nombre des côtés de la ligne brisée on le fait converger vers la courbe, il est clair que cette surface prismatique convergera vers une surface cylindrique à base circulaire : et la ligne courbe limite étant sur ce cylindre une courbe de longueur minima sera une hélice même.

Soit ABCDE (fig. 61) la ligne polygonale. Menons les bissectrices des angles C et D, et soit OO′ la perpendiculaire commune à ces deux bissectrices. Le quadrilatère gauche OO′ DC aura ses angles O et O′ droits et ses angles C et D égaux comme moitiés d'angles égaux. Les côtés OC et O′D y seront aussi égaux.

Pour le prouver construisons le prisme OCIO'KD, et considérons l'angle trièdre dont C est le sommet et dont les arêtes sont CO, CK et CD avec le trièdre dont les arêtes sont DO' DK et DC. Ces deux trièdres ont leurs angles plans respectivement égaux, car par construction OCD = O'DC KCD = CDI à cause des parallèles CK, ID et les angles OCK, O'DI sont droits ; donc l'angle dièdre formé suivant CK dans le premier, égale l'angle dièdre formé suivant DI dans le second. Il en résulte que dans le triangle O'KD, les deux angles en K et D sont égaux : donc O'D = O'K = OC.

Si l'on mène la bissectrice de l'angle B et que O_1O'' soit la perpendiculaire commune à cette droite et à CO, on aura de même $O''B=O_1C$. Mais ABCD pouvant d'après la nature de la ligne coïncider avec le système BCDE, il est clair que la coïncidence établie, BO'' tombera sur CO et CO sur DO' · en sorte que la perpendiculaire OO'' coïncidera alors avec OO'. Donc OC=O'D=OC. Le point O_1 est donc le même que le point O. Je dis de plus que OO'' est le prolongement de OO'.

Considérons en effet le trièdre dont CO,CB,CK' sont les arêtes et celui dont les arêtes sont CO,CK et CD. Ces deux trièdres ont un angle dièdre égal suivant OC; les faces adjacentes sont respectivement égales comme moitiés d'un même angle d'un côté et comme angles droits de l'autre. Donc l'inclinaison des deux plans OCB,BCK' est la même que celle des deux plans OCD,KCD. Mais celle-ci est la même que celle des deux plans O'DC,CDI d'après ce qui a été dit des deux trièdres d'abord considérés. Donc l'inclinaison des deux plans OCB,BCK' est la même que celle des deux plans O'DC,CDI. Donc si l'on porte le quadrilatère O CBO'' sur son égal O'DCO en considérant la droite CK' comme invariablement liée avec lui, le plan BCK' tombera sur le plan CDI, par suite CK' coïncidera avec DI. Puisque alors OO'' coïncide avec O'O, il s'ensuit que CK' et OO'' sont parallèles. Donc OO'' est parallèle à OO', et par conséquent en est le prolongement.

Concevons maintenant des plans menés par les différents côtés de la ligne ABCDE parallèlement à l'axe O'OO'', la surface prismatique qui en résultera aura toutes ses faces égales. C'est une conséquence de ce que tous les côtés de la ligne polygonale sont égaux et que d'après ce qui précède leurs inclinaisons sur les autres latérales de cette surface sont égales. De plus, comme les plans O'OC, O'OD sont les plans bissecteurs des angles dièdres que présentent en faces suivant KCK', DI... et qu'il est démontré que l'inclinaison des plans OCK', BCK' est la même que celle des plans O'DI, CDI, les inclinaisons des faces de la surface prismatique sont égales entre elles. Donc cette surface prismatique est une surface régulière dont l'axe est O'OO'', et dont les arêtes sont également inclinées sur les côtés de la ligne brisée dans le même sens ; donc, etc.